FSA1304 MATH4
Fonctions d'une variable complexe.
Exercices.

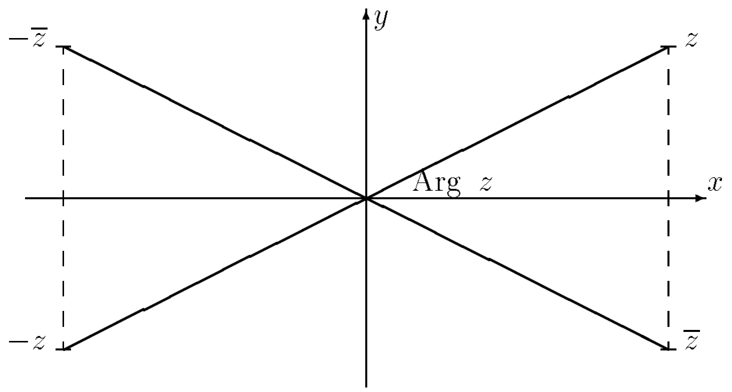
Alphonse Magnus, bât. de Hemptinne, b124,129, tel. (010)(47) 3157 ,
`magnus@anma.ucl.ac.be,  http://www.math.ucl.ac.be/~magnus`

Ces exercices sont d'abord destinés à vous (re)familiariser avec les notions de nombres complexes et de fonctions d'une variable complexe. Ensuite, on passe au contenu du cours proprement dit, avec pas mal d'*ex-cursus*. Evidemment, vous préféreriez sans doute obtenir directement des échantillons représentatifs de questions d'examen, précisant le niveau de virtuosité requis, et signalant les pièges affreux à éviter, mais les jeux video sont déja un peu moins à la mode (γ n'est pas fermé, bang, une vie en moins). Il n'est pas question de briller dans un parcours du combattant, mais de retenir quelques principes et de les appliquer correctement à la solution de problèmes raisonnables.

En petits caractères: exercices facultatifs, de caractère anecdotique et ornemental.

1 Opérations

1. module et argument d'un nombre complexe:



$|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$,

$\operatorname{Arg} \overline{z} = -\operatorname{Arg} z$;
$\operatorname{Arg}(-z) = \operatorname{Arg} z - \pi$ si $0 < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi$, $\operatorname{Arg}(-z) = \operatorname{Arg} z + \pi$ si $-\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant 0$.
Arg est une fonction discontinue en tout point réel négatif (non nul: la fonction Arg n'est pas définie en 0): en effet, si $z < 0$, on examine $\operatorname{Arg}(z \pm h)$, où h est un petit nombre *complexe*.
Comment construire une détermination de l'argument qui soit discontinue sur une direction donnée? Voir plus bas.

2. Si x et y sont les parties réelle et imaginaire de z, que sont les parties réelle et imaginaire de z^2, de $1/z$?

3. Rappel: $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$, $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ (si $z_2 \neq 0$).

4. Montrez que $\overline{z} = 1/z$ si $|z| = 1$.

5. Montrez que $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = 1$ si z est imaginaire pur.

6. Montrez que $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = 1$ si $|z| = 1$ (si $a \in \mathbb{C}, a \neq z$).

7. (Spécialement recommandé par M. Boël): quel est le lieu des points représentés par $|z-1| + |z+1| = 2a$, où $a > 1$ est fixé?

8. Montrez que l'argument d'un produit est la somme des arguments des facteurs (à 2π près, pour retomber dans $(-\pi, +\pi]$). L'argument a donc des propriétés d'un *logarithme*, on y reviendra.

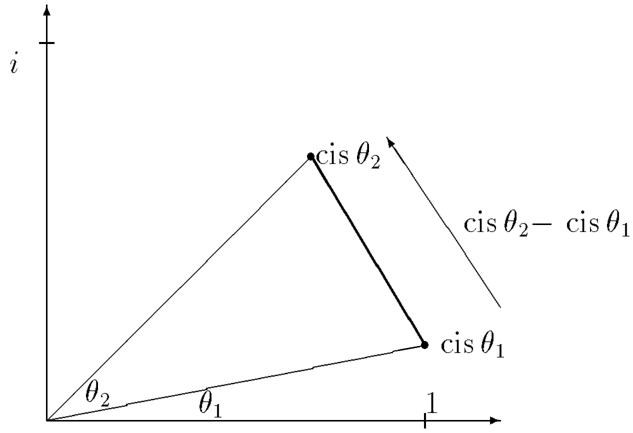
9. Soit la fonction cis: $\operatorname{cis}(x) = \cos x + i \sin x$.
Montrez que

$$\operatorname{cis}(\theta_2) - \operatorname{cis}(\theta_1) = 2i \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

en utilisant la propriété $\operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{cis}(\theta_1)\operatorname{cis}(\theta_2)$:

$$\operatorname{cis}(\theta_2) - \operatorname{cis}(\theta_1) = \operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \operatorname{cis}\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) - \operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right).$$

Interprétation graphique:



10. Montrez que $\dfrac{d\operatorname{cis}x}{dx} = i\operatorname{cis}x$. Tout se passe donc comme si on avait $\operatorname{cis}x = e^{ix}$ … On reviendra là-dessus.

11. Montrez que, quel que soit l'angle θ,

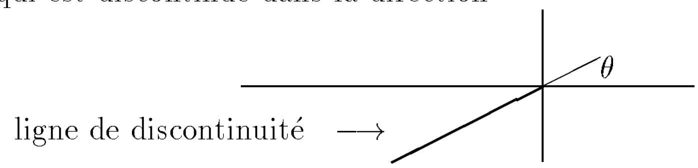
$$\frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{|x+iy|} = \cos(\operatorname{Arg}(x+iy) - \theta)$$

est donc bien entre -1 et $+1$ (cours, formule (3.11), p.19).

12. Constatez que, θ étant un angle donné, la fonction

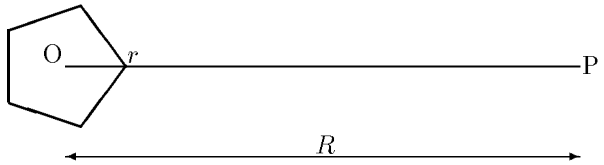
$$\arg_\theta(z) = \theta + \operatorname{Arg}\left(\frac{z}{\operatorname{cis}\theta}\right)$$

donne une détermination de l'argument de z, qui coïncide avec $\operatorname{Arg} z$ à un multiple entier de 2π près, et qui est discontinue dans la direction opposée à θ, voir figure:



13. Quelle figure dans le plan forment les points représentant les racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe non nul?

14. **Théorème de Cotes:**

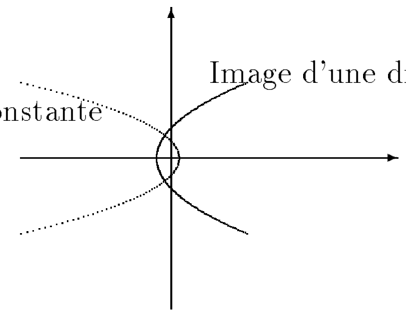


Si P est sur le prolongement d'un segment de droite joignant le centre d'un polygone régulier à un de ses sommets, le produit des distances de P aux sommets du polygone vaut $R^n - r^n$, R étant la distance de P au centre, et r étant le rayon du cercle circonscrit au polygone. (Montrez que les sommets du polygone représentent les racines $n^{\text{èmes}}$ de r^n.) [Application: $\sin(\pi/9)\sin(2\pi/9)\sin(4\pi/9) = \sqrt{3}/8$].

15. Si z n'est pas un réel dans $[-1,1]$, exactement une des deux racines carrées de z^2-1 est telle que $|z+(z^2-1)^{1/2}| > 1$. Soit $a > 1$. Déterminez le lieu des points représentés par $|z+(z^2-1)^{1/2}| = a+\sqrt{a^2-1}$. (Ça ressemble à un problème précédent).

16. Représentation graphique d'une fonction d'une variable complexe:

- $f(z) = az+b$, a et $b \in \mathbb{C}$: montrez que les horizontales Im z = constante et les verticales Re z = constante sont transformées en droite inclinées de Arg(a) et Arg$(a)+\pi/2$.
- $f(z) = z^2$: montrez que les horizontales Im z = constante et les verticales Re z = constante sont transformées en des paraboles



- $f(z) = (az+b)/(cz+d)$ transforme des droites et des cercles en des droites ou des cercles. En effet, soit $Z = f(z) = (az+b)/(cz+d)$. On montre qu'il existe un nombre complexe δ tel que $|Z-\delta|^2 = (Z-\delta)(\overline{Z}-\overline{\delta}) =$ constante quand $|z-\gamma| = r$. Pour montrer cela, inversons la relation entre z et Z: $z = (b-dZ)/(cZ-a)$, et développons $|z-\gamma|^2 = (z-\gamma)(\overline{z}-\overline{\gamma}) = r^2$.

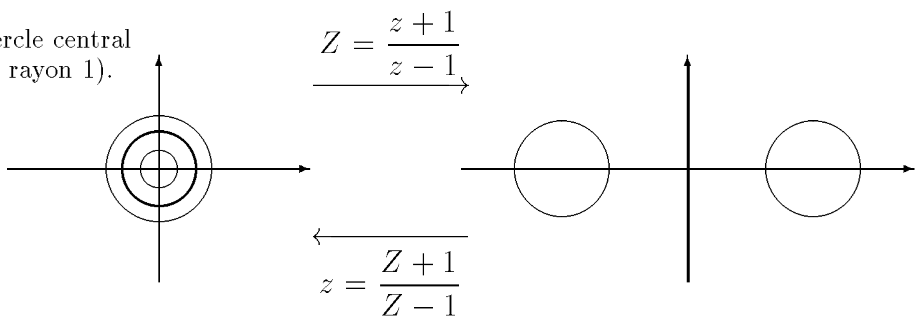
$$\text{Il vient} \quad |d+c\gamma|^2 Z\overline{Z} - (b+a\gamma)(\overline{d+c\gamma})\overline{Z} - (\overline{b+a\gamma})(d+c\gamma)Z + |b+a\gamma|^2$$
$$= r^2|c|^2 Z\overline{Z} - r^2 a\overline{c}\overline{Z} - r^2\overline{a}cZ + |a|^2 r^2,$$

d'où on tire $Z\overline{Z}$ en fonction linéaire de Z et $\overline{Z}$ (si $|d+c\gamma|^2 - r^2|c|^2 \neq 0$). Il suffit alors de prendre δ = coefficient de $\overline{Z}$ pour constater $|Z-\delta|^2 = (Z-\delta)(\overline{Z}-\overline{\delta}) =$ constante. Si $|d+c\gamma|^2 - r^2|c|^2 = 0$, Z parcourt une droite.

En pratique, on cherche où le dénominateur $|cz + d|$ est minimum et maximum: on obtient ainsi deux points diamétralement opposés du cercle image (de la droite si $cz + d$ s'annule).

Examinez en particulier ceci:

(Le cercle central est de rayon 1).



2 Dérivabilité

1. Définition d'un ouvert (non vide) de $\mathbb{C}$.

2. Démontrez soigneusement $f, g \in \mathrm{Hol}(A) \Rightarrow (fg)' = f'g + fg'$ dans A.

3. Constatez que $f, g \in \mathrm{Hol}(A) \Rightarrow f/g \in \mathrm{Hol}(A \backslash Z_g)$, où Z_g est l'ensemble des points où g *s'annule dans* A (on supposera que g ne s'annule qu'en un nombre fini de points de A).

4. Montrez que la fonction f définie dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = \overline{z}$ *n'est holomorphe nulle part* dans $\mathbb{C}$ (cours, ex. 1.2(b) p.3), que $\overline{z}^2$ n'est dérivable qu'à l'origine.

5. Examinez la dérivabilité de $f(z) = x^2y + ixy^2$ (cours, ex. 1.2(c) p.3), en examinant la limite (si elle existe, tout est là) de $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand $h \to 0$: 1) lorsque h est réel, 2) lorsque h est imaginaire pur ($a = c + id$, remarquez que l'on peut mettre c ou d en évidence selon les cas).

6. Dérivées de z, z^2, et quelques autres polynômes en z.

7. Montrez que $|z|^2 = x^2 + y^2$ n'est *pas* un polynôme en z dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire n'est pas une combinaison linéaire de 1, z, z^2.

8. Cauchy-Riemann=
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (= f'(z))$$

9. Avec $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $f \in \mathrm{Hol}(A)$, constater que les composantes du *gradient* de u sont les parties réelle et imaginaire de $\overline{f'(z)}$, et que les composantes du gradient de v sont les parties réelle et imaginaire de $\overline{i\, f'(z)}$.

10. $f = u + iv \in \mathrm{Hol}(A) \Rightarrow u$ et v sont *harmoniques* dans A: $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$ et $\partial^2 v/\partial x^2 + \partial^2 v/\partial y^2 = 0$.

11. Si $f \in \mathrm{Hol}(A)$, et si a est un point de A où $f'(a) = 0$, $|f|$ est-il maximum, minimum, ou autre chose en a? Examiner $|1 + z^2|$ près de $z = 0$.

12. Notion d'ouvert connexe dans $\mathbb{C}$: exemples, contre-exemples. La réunion de deux disques ouverts *tangents* est-elle connexe?

3 Séries potentielles.

Séries numériques. Soit $\{t_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite complexe définie sur les entiers $\geqslant 0$ (la suite des *termes*). On appelle *série* $\sum_{n\geqslant 0} t_n$ la *suite des sommes partielles*
$$\left\{ s_k = t_0 + t_1 + \cdots + t_k = \sum_{n=0}^{n=k} t_n \right\}.$$
La série $\sum_{n\geqslant 0} t_n$ est dite convergente si la suite des sommes partielles $\{s_k\}_{k\geqslant 0}$ possède une limite, qu'on appelle alors la valeur de la série. Le symbole de la série peut alors figurer dans des identités numériques, étant bien entendu qu'il représente la valeur de la série. Par exemple, si $\lim_{k\to\infty} s_k = \ell$, $(\sum_{n\geqslant 0} t_n)^2 + 5$ représente $\ell^2 + 5$.

Séries de fonctions. Les t_n sont maintenant des fonctions, il en est donc de même des sommes partielles s_k.

Séries potentielles. Cas particulier du précédent avec $t_n(z) = a_n(z-c)^n$, $n = 0, 1, \ldots$ a_0 est donc le coefficient constant, a_1 est le coefficient de $z-c$, a_2 est le coefficient de $(z-c)^2$, etc. (ça ne sera pas toujours aussi évident dans les exemples).

1. Par définition du rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, on a

   - $R = +\infty \iff \forall t \geqslant 0,\ a_n t^n \to 0$ quand $n \to \infty$,
   - $R < +\infty \iff \forall \epsilon > 0,\ \sup_{n\geqslant 0} |a_n|(R+\epsilon)^n = +\infty$,
   - $R > 0 \iff \forall \epsilon > 0, \epsilon < R,\ a_n(R-\epsilon)^n \to 0$ quand $n \to \infty$,
   - $R = 0 \iff \forall t > 0,\ \sup_{n\geqslant 0} |a_n| t^n = +\infty$.

   Faut-il en déduire que $0 < \displaystyle\sup_{n\geqslant 0} |a_n| R^n < +\infty$ dans les cas où $0 < R < \infty$?

2. Examen détaillé de la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} z^n$, $z \in \mathbb{C}$:

   $$\text{sommes partielles } s_k(z) = \sum_{n=0}^{k} z^n = \begin{cases} k+1 & \text{si } z = 1, \\ \dfrac{1-z^{k+1}}{1-z} & \text{si } z \neq 1, \end{cases}$$

   (progression géométrique). On en déduit que les sommes partielles $s_k(z)$ tendent vers $1/(1-z)$ quand $n \to \infty$ si $|z| < 1$; que la suite de ces sommes partielles diverge si $|z| \geqslant 1$.
   Voir aussi cours démonstration Prop. 2.1 p.8 et dernière formule p. 22.

3. Rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{r^n}$. Quelle est la valeur de la série quand $|z| < R$?

4. Cas des séries potentielles ne contenant que des puissances paires ou impaires: le rayon de convergence commun à $\sum_{n\geqslant 0} b_n(z-c)^{2n}$ et à $\sum_{n\geqslant 0} b_n(z-c)^{2n+1}$ est la *racine carrée* du rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} b_n Z^n$.

5. Rappel de quelques développements de Taylor (connus jusqu'ici dans un contexte de variables réelles uniquement):

montrez que les séries suivantes convergent effectivement dans un disque $|z-c| < R$, en utilisant les propositions 2.2 et 2.3, pp. 9 et 10.

$$e^z = 1 + z + \frac{z}{2!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots = -\sum_{n\geq 1} \frac{(-z)^n}{n}$$

la même avec $c = 1$:

$$\ln z = z - 1 - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \cdots = -\sum_{n\geq 1} \frac{(1-z)^n}{n}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ne pas se laisser rouler par la notation: un coefficient sur deux est nul: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1/3!$, etc.

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

ici, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1/2!$, $a_3 = 0$, etc.

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n (z)^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)z^n}{n!}$$

dans ce dernier exemple, séparer les cas α entier positif (théorème du binôme élémentaire) et les autres possibilités $\alpha \in \mathbb{C}$ (théorème du binôme généralisé).

6. Une série numérique complexe $\sum_{n\geqslant 0} t_n$ ne peut *pas* converger si $t_n \not\to 0$, $n \to \infty$. Mais $t_n \to 0$ n'implique pas la convergence: cf. la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

7. Si $\sum_{n\geqslant 0} |v_n|$ converge (il suffit que les sommes partielles aient une borne supérieure finie), et si $|u_n| \leqslant |v_n|$ pour tout $n \geqslant 0$, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge également.

8. Séries dérivées de la série géométrique:

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n = (1-z)^{-2}\,, \qquad |z|<1.$$

   Si P est un polynôme de degré $\leq d$,

$$\sum_{n\geq 0} P(n)z^n = \frac{Q(z)}{(1-z)^{d+1}}\,, \qquad |z|<1,$$

   où Q est un polynôme de degré $\leq d$.

9. examiner ces questions de convergence sur les exercices proposés au cours Ex. 2.1, p.11:
   $\sum_{n\geqslant 0} z^n, \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}, \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}, \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n+1}, \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2n}}{c^n}$, avec $c \in \mathbb{C}, c \neq 0, \sum_{n\geqslant 0} 2^{2n} z^{2n}$,
   $\sum_{n\geqslant 0} a^{n^2} z^n$, avec $a \in \mathbb{C}, \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}$,
   dans quels cas a-t-on $a_n \neq 0$ à partir d'une valeur assez grande de n et l'existence de la limite de $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$? Dans quels cas la limite de $|a_n|^{1/n}$ quand $n \to \infty$ existe-t-elle?

10. On a donc étendu la fonction exponentielle à $\mathbb{C}$ par $\exp(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ et démontré $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. L'identité $e^{i\pi} = -1$ a fasciné beaucoup de gens depuis Euler. Représenter graphiquement une demi-douzaine de sommes partielles de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(i\pi)^n}{n!}$, ou essayer plutôt avec $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(i\pi/2)^n}{n!}$.

11. Expérience `matlab`: `exp(4*sqrt(-1)*atan(1))`.

12. Constater que les séries potentielles de
$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \text{ et } \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$
redonnent bien les séries de Taylor familières du cosinus et du sinus. (Mais z peut maintenant être complexe quelconque!)

13. Trouvez un sinus plus grand que 1000. (Autre expérience `matlab: asin(1000)`).

14. Relations entre fonctions trigonométriques et fonctions hyperboliques
$$\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \text{ et } \sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

15. Soit la forme polaire $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho\exp(i\theta)$. Montrez que Cauchy-Riemann devient $f \in \mathrm{Hol}(A) \Rightarrow$
$$\frac{\partial f}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho i}\frac{\partial f}{\partial\theta} \qquad (= \exp(i\theta)f'(z)).$$

16. Démontrez $\dfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\cos(nz) = \dfrac{\sin((n+1/2)z)}{2\sin(z/2)}$ (cours) en utilisant une progression géométrique de raison $\tau = \exp(iz)$.

17. Logarithme complexe: on le définit par
$$\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z).$$
Montrez que l'on a bien $\mathrm{Log}(\exp z) = \exp(\mathrm{Log}\, z) = z$, que Log est holomorphe dans $A = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. Que vaut $\mathrm{Log}\,'z$ dans A?

18. Exemple de rayon de convergence nul: on étudie $f(x) = \int_0^{1/x}\exp(-t^2/2)dt$ quand $x \to 0$, $x > 0$ (c'est utilisé en probabilités), sachant que $\int_0^{\infty}\exp(-t^2/2)dt = \sqrt{\pi/2}$, et on trouve $f(x) = \sqrt{\pi/2} - \exp(-1/(2x^2))[x - x^3 + 3x^5 - 3\times 5x^7 + 3\times 5\times 7x^9 - \cdots]$ (par intégrations par parties successives utilisant $-t\exp(-t^2/2) = (\exp(-t^2/2))'$). Constater qu'il y a anguille sous roche en remarquant que $\exp(1/(2x^2))[f(x) - \sqrt{\pi/2}]$ n'est pas continue en $x = 0$ (voir ce qui se passe en $x < 0$), donc ne peut être holomorphe dans un voisinage de 0.

19. Exemple d'investigation de fonction non élémentaire à partir d'une série potentielle: on définit les *fonctions d'Airy* (très utilisées en théorie

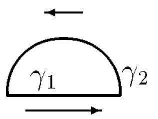
de la diffraction) comme solutions de $f''(z) = zf(z)$, avec $f_1(0) = 1, f_1'(0) = 0$, $f_2(0) = 0, f_2'(0) = 1$. Déterminez les développements en séries potentielles $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de f_1 et f_2, et leurs rayons de convergence. (Poser $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ dans $f''(z) = zf(z)$, et identifier les coefficients en tenant compte des conditions initiales. Constater que les séries convergent effectivement dans tout $\mathbb{C}$, et qu'elles vérifient bien l'équation différentielle).

4 Intégrales de ligne.

1. Evaluer $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = \sum_k \int_{\gamma_k} f(z)dz = \sum_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$ sur le cercle $\gamma(t) = \rho + \rho(\cos t + i\sin t) = \rho(1 + e^{it})$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, et
   a) $f(z) = z$, b) $f(z) = \overline{z}$, c) $f(z) = z^2$, d) $f(z) = \overline{z}^2$.

2. Idem avec le demi-cercle $\gamma(t) = \rho + \rho(\cos t + i\sin t) = \rho(1 + e^{it})$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

3. Idem avec la frontière du demi-disque $\begin{cases} k = 1: & \gamma(t) = 2(t+1)\rho, \quad -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ k = 2: & \gamma(t) = \rho(1 + e^{it}), \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$



4. Comparer avec la formule $\displaystyle\int_\gamma F'(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ lorsque cette formule s'applique.

5. En particulier, si γ est un arc de courbe *fermé* contenu dans l'ouvert A, et si la formule précédente s'applique, on a donc $\int_\gamma F'(z)dz = 0$. Vérifiez avec
   Attention, la ligne qui suit est fausse
   $$F(z) = \overline{z}^2 \text{ dans } \mathbb{C} : F'(z) = 2\overline{z} \Rightarrow \int_\gamma \overline{z}\,dz = 0$$
   Attention, la ligne qui précède est fausse
   sur tout arc γ fermé. Le moindre exemple montre alors que $\pi = 0$, etc. (Oui, ça, c'est faux aussi). Explication: $\overline{z}^2$ n'est holomorphe dans aucun domaine de $\mathbb{C}$, voir plus haut.

6. Vérifiez

$$\int_{\partial B(c,\rho)} (z-a)^{-1}\,dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } a \in B(c,\rho), \\ 0 & \text{si } a \notin B[c,\rho] \end{cases}$$

par calcul direct:

$$\begin{aligned} f(\gamma(t))\gamma'(t) &= f(c+\rho e^{it})i\rho e^{it} \\ &= \frac{i\rho e^{it}}{c-a+\rho e^{it}} \\ &= \frac{i}{\frac{c-a}{\rho}e^{-it}+1} \\ &= \frac{i}{1+\kappa e^{-i(t-\varphi)}} \qquad \text{si on définit } \frac{c-a}{\rho} = \kappa e^{i\varphi} \\ &= \frac{i}{1+\kappa\cos(t-\varphi)-i\sin(t-\varphi)} \\ &= \frac{i(1+\kappa\cos(t-\varphi))-\kappa\sin(t-\varphi)}{1+\kappa^2+2\kappa\cos(t-\varphi)} \\ &= \frac{d}{dt}\left[i\Theta(t)+\frac{1}{2}\ln[1+\kappa^2+2\kappa\cos(t-\varphi)]\right] \end{aligned}$$

avec $\Theta(t) = \operatorname{arctg}\dfrac{\sin(t-\varphi)}{\kappa+\cos(t-\varphi)}$ = angle sous lequel on voit du point a l'arc décrit par le point variable sur γ (*principe de l'argument*).

$\kappa < 1$ $\qquad\qquad$ $\kappa > 1$

Si $\kappa < 1$, il faut faire attention aux deux valeurs de t où $\kappa+\cos(t-\varphi) = 0$. En fait, quand $\kappa > 1$, c'est-à-dire quand a est à l'extérieur de $B[c,\rho]$, on est parfaitement en droit d'utiliser $F(z) = \mathrm{Log}(\exp(-i\varphi)(z-a))$ comme primitive de $(z-a)^{-1}$.

Le but n'est pas ici d'accumuler les traits de virtuosité, mais de montrer que cette formule importante découle de la définition d'intégrale de ligne. C'est d'ailleurs comme cela que Cauchy a fait, (et il s'est d'abord trompé).

7. **Lemme de Schwarz.** Montrez que, si f est holomorphe dans $A \supseteq B[c,\rho]$, *et si* $f(c) = 0$, on a $|f(z)| \leq M|z-c|/\rho$ dans $B[c,\rho]$, M étant le supremum de $|f|$ sur $\partial B(c,\rho)$.

Montrez d'abord (Cor. 3.15, p. 32) que $f(z)/(z-c)$ est encore holomorphe dans $B(c,\rho)$ en constatant que, si $\sum_{n\geq 1} a_n(z-c)^n$ est la série potentielle de f (notez que $a_0 = 0$), $\sum_{n\geq 1} a_n(z-c)^{n-1} = \sum_{n\geq 0} a_{n+1}(z-c)^n$ est la série potentielle de $f(z)/(z-c)$. Appliquer alors la Prop. 3.10, p. 28 (*principe du maximum*) à $f(z)/(z-c)$.

8. Evaluer les intégrales suivantes (cours, Ex. 3.2, p.38) en appliquant le théorème de représentation 3.12, p.31:

$$\int_{\partial B(c,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi-c)^{n+1}}\, d\xi = 2\pi i \frac{f^{(n)}(c)}{n!},$$

f étant holomorphe dans un domaine A contenant entièrement la boule fermée $B[c,r]$, et le théorème d'invariance homotopique Prop. 3.21 p.36. On se contentera d'abord de l'énoncé suivant: l'intégrale sur γ est égale à l'intégrale sur $\partial B(c,r)$ tant que γ reste un arc de courbe fermé simple (= sans recoupement) entièrement situé dans A, orienté dans le sens direct, *gardant c dans son intérieur*, et *n'ayant que des points de A dans son intérieur* (en supposant donc que l'on sait intuitivement ce que c'est que l'intérieur d'une courbe fermée).
Bien choisir A, c (il n'y a que deux cas où on pourrait se tromper), et f.

(a) $\int_{\partial B(0,1)} \dfrac{1}{(z-a)^m(z-b)^n}\, dz$ $a, b \in \mathbb{C}, |a| < 1 < |b|, m$ et n entiers ≥ 0,.

(b) $\int_{\partial B(0,2)} \dfrac{e^z}{(z+1)(z-3)^2}\, dz$,

(c) $\int_{\partial B(0,2)} \dfrac{\sin z}{z+i}\, dz$,

(d) $\int_{\partial B(0,1)} \dfrac{\sin z}{z^3}\, dz$,

(e) $\int_{\partial B(2i,2)} \dfrac{1}{1+z^2}\, dz$,

(f) $\int_{\partial B(0,1)} \dfrac{e^z}{(z-2)^3}\, dz$,

(g) $\int_{\partial B(0,1)} \dfrac{e^{iz}}{z^2}\, dz$,

(h) $\int_{\partial B(0,1)} \dfrac{e^z - e^{-z}}{z^n}\, dz$, n entier ≥ 1.

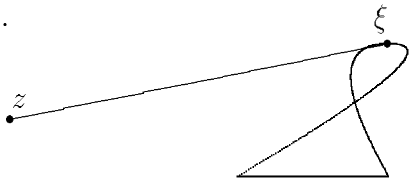
Réflexion faite, il y a *trois*, non, *quatre* cas où on pourrait se tromper dans le choix de c, quels sont ils?

Si γ n'est plus simple (se recoupe), ou n'est plus orienté dans le sens direct, il faut alors utiliser la formule plus générale Prop. 3.22, p. 37

$$\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - c)^{n+1}}\, d\xi = 2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(c) \frac{f^{(n)}(c)}{n!},$$

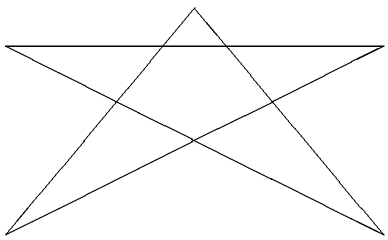
où $\operatorname{ind}_\gamma(c)$ est l'indice de c par rapport à γ:

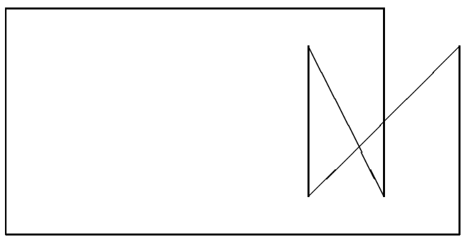
9. Vérifiez cette interprétation géométrique de l'indice d'un point par rapport à une courbe fermée: $\operatorname{ind}_\gamma(z)$ = nombre de tours vus de z lorsque ξ parcourt γ.



Interprétation médico-biologique: ampleur du torticolis subi par un observateur situé en z suivant du regard le point ξ décrivant la courbe [orientée] γ.

Que vaut $\operatorname{ind}_\gamma(z)$ lorsque z se trouve dans les régions $A, B, C, \ldots$ suivantes?





10. Certains logiciels graphiques utilisent l'indice d'un point par rapport à une courbe fermée γ pour déterminer la région à hachurer ou à remplir. Une autre règle consiste à tracer une demi-droite partant de z et à compter les points d'intersection avec γ, on considère z comme point intérieur si ce nombre est *impair*. Examiner cette deuxième règle pour les figures précédentes. Ceci montre que ces notions d'intérieur et d'extérieur ne sont pas évidentes du tout.

5 Développement de Laurent.

1. Singularités apparente(s) de $\dfrac{\sinh z}{z} = \dfrac{e^z - e^{-z}}{z}$ (avec $D = \mathbb{C}\backslash\{0\}$); de $\dfrac{z}{\sinh z}$ (avec $D = \mathbb{C}\backslash\pi i\mathbb{Z}$); $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$ (avec $D = \mathbb{C}\backslash\{0\}$).

2. Pôles de $\dfrac{z}{\sinh z}$, $\dfrac{z}{\sin z}$, $\dfrac{z}{\operatorname{tg} z}$, $\operatorname{cotg} z$, $\operatorname{cotg}(2z)$, $\operatorname{tg} z$ (N.B.: $\operatorname{cotg} z - 2\operatorname{cotg}(2z) = \operatorname{tg} z$.

3. Singularités isolées de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$, $\quad \mathbb{C}\backslash\left(\{0\}\bigcup\{1/n\}_{n=1}^{\infty}\right)$.

4. Montrez que 0 n'est ni une singularité apparente ni un pôle de la fonction suivante: $\mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C} : f(z) = \exp(1/z)$, parce que $|f|$ n'a pas de limite (ni finie, ni infinie) quand $z \to 0$. (Notion de *s*ingularité essentielle). Donnez *toutes* les solutions de $\exp(1/z) = 1$, $z \neq 0$; de $\exp(1/z) = 2$, $z \neq 0$.

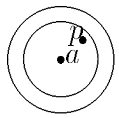
5. Séries de Fourier en tant que développements de Laurent: soit $z = \exp(i\theta)$. Alors,

$$a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = a_0 + \sum_{n\geq 1}[(a_n - ib_n)z^n + (a_n + ib_n)z^{-n}]/2.$$

   Reprenez quelques séries de Fourier usuelles. Dans la plupart des cas, le développement (formel) de Laurent ne vaudra pas dans un véritable anneau, on aura seulement $\rho = \sigma = 1$, mais les fonctions F et G du théor. 4.6 (p. 47) ont encore un sens.

6. **Développement de Laurent d'une fonction rationnelle**: pourquoi tout ce bruit tout-à-coup? d'abord décomposer en fractions simples. Le problème est donc ramené à traiter des fonctions du type $(z-p)^{-m}$ (avec p comme *pôle*) dans un anneau de centre a et de rayons r_1 et r_2, avec $0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant +\infty$.
   Prenons d'abord le cas $m = 1$:

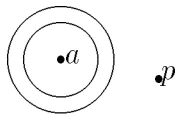
(a) Si p est dans le disque intérieur (fermé) $|p-a| \leqslant r_1$,



$$(z-p)^{-1} = [z-a+(a-p)]^{-1} = (z-a)^{-1}\left[1+\frac{a-p}{z-a}\right]^{-1} = \\ = \sum_{n\geq 0}(p-a)^n\,(z-a)^{-1-n},$$

série (géométrique) potentielle convergente car $|z-a| > r_1 \geqslant |a-p|$.

(b) Si p est hors du grand disque (ouvert) $|p-a| \geqslant r_2$,



$$(z-p)^{-1} = [z-p+(a-p)]^{-1} = (a-p)^{-1}\left[1+\frac{z-p}{a-p}\right]^{-1} = \\ = -\sum_{n\geq 0}(p-a)^{-1-n}\,(z-a)^n,$$

série (géométrique) potentielle convergente car $|z-a| < r_2 \leqslant |p-a|$.

(c) Il n'y a pas d'autres cas, la fonction ne serait pas holomorphe dans l'anneau si $r_1 < |p-a| < r_2$.

Cas m quelconque:

(a) Si p est dans le disque intérieur (fermé) $|p-a| \leqslant r_1$,

$$(z-p)^{-m} = [z-a+(a-p)]^{-m} = (z-a)^{-m}\left[1+\frac{a-p}{z-a}\right]^{-m} = \\ = \sum_{n\geq 0}\frac{(p-a)^n(m+n-1)!}{(m-1)!n!}(z-a)^{-m-n},$$

série potentielle convergente car $|z-a| > r_1 \geqslant |a-p|$.

(b) Si p est hors du grand disque (ouvert) $|p-a| \geqslant r_2$,

$$(z-p)^{-m} = [z-a+(a-p)]^{-m} = (a-p)^{-m}\left[1+\frac{z-a}{a-p}\right]^{-m} =$$
$$= (-1)^m \sum_{n\geq 0} \frac{(m+n-1)!}{(p-a)^{m+n}(m-1)!n!}(z-a)^n,$$

série potentielle convergente car $|z-a| < r_2 \leqslant |a-p|$.

Ne pas oublier de faire figurer la partie polynomiale éventuelle de la décomposition en fractions simples dans F.
Exemple: $f(z) = \dfrac{z^3}{z^2+1} = z - \dfrac{1}{2(z+i)} - \dfrac{1}{2(z-i)}$ dans $A_{0,2}(i)$: $z = i+(z-i)$, $-\dfrac{1}{2(z-i)}$ reste comme il est, $-\dfrac{1}{2(z+i)} = -\dfrac{1}{4i+2(z-i)} = \dfrac{i}{4}\sum_{n\geq 0}(i/2)^n(z-i)^n$, donc $\ldots = a_{-2} = 0$, $a_{-1} = -1/2$, $a_0 = 5i/4$, $a_1 = 7/8$, $a_n = \dfrac{i}{4}(i/2)^n$ à partir de $n=2$.

7. (Cours p. 54) Développement de Laurent de $(z+2)^{-2}(z^2-9)^{-1}$ dans: a) $A_{2,3}(0)$, b) $A_{3,\infty}(0)$, c) $A_{0,1}(-3)$, d) $A_{0,1}(-2)$, e) $A_{0,5}(3)$.

8. Donnez quelques coefficients du développement de Laurent de $1/\sin z$ dans un voisinage de 0 (0 non compris) en identifiant les coefficients des puissances de z dans

$$\left(\frac{a_{-1}}{z} + a_1 z + a_3 z^3 + \cdots\right)\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots\right) = 1.$$

6 Résidus.

C'était le résidu!!!
Comte de Champignac
in "La peur au bout du fil".

Rappel. (Cours, pp. 55 & 56). Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathrm{Hol}(D)$, $a \in \mathbb{C}\backslash D$ une singularité isolée pour D. On appelle alors *résidu* de f en a

$$\text{rés}\,(f;a) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,\tau)} f(z)\,dz,$$

où a_{-1} est le coefficient de $(z-a)^{-1}$ du développement de Laurent de f dans un anneau $A_{0,\sigma}(a)$, avec σ assez petit pour avoir $B(a,\sigma) \subset D \cup \{a\}$, et $0 < \tau < \sigma$.

1. Cas des pôles simples: si $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$ et si $|(z-a)f(z)|$ reste borné dans un voisinage de a (a non compris), alors

$$\text{rés}\,(f;a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

   Examiner $1/z$, $1/\sin z$, $\sin z/z^2$, $1/(e^z-1)$, $\operatorname{cotg} z$, en $a=0$; $1/\sin z$, $\operatorname{cotg} z$ en $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $\operatorname{tg} z$ en $a = (k+1/2)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $1/(1+z^2)$ en $z = \pm i$.

2. Pôles d'ordre $\leqslant m$: si $|(z-a)^m f(z)|$ reste borné dans un voisinage de a (a non compris), on peut définir $g(z) = (z-a)^m f(z)$ holomorphe dans un voisinage de a (y compris a), alors

$$\text{rés}\,(f;a) = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}.$$

   Examiner $1/z$ avec $m=1$ et $m=2$ en $a=0$; $1/z^2$ en $a=0$ (avec $m \geqslant 2$); e^z/z^m en $a=0$; $1/\sin^2 z$, $1/\sin^3 z$ en $a=0$.

3. Que vaut le résidu de f'/f en a si f est holomorphe dans un voisinage de a et a un zéro d'ordre μ en a, c'est-à-dire $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(\mu-1)}(a) = 0$, $f^{(\mu)}(a) \neq 0$?

4. *Principe de l'argument*: si γ est un arc fermé simple parcouru dans le sens direct et ne contenant que des points de A dans son intérieur, et $f \in \mathrm{Hol}(A)$, alors le nombre de zéros de f comptés avec leurs multiplicités dans l'intérieur de γ est

$$N_\gamma(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \ \mathrm{ind}_{\,f(\gamma)}(0),$$

   c'est-à-dire le nombre de tours effectués par $f(z)$ autour de 0 quand z parcourt γ.

Applications au calcul d'intégrales définies de types 1,2.

5. Si F est une fonction rationnelle de deux variables, bornée sur $[-1,1]\times[-1,1]$ on peut évaluer $I=\int_0^{2\pi}F(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ en passant à $z=\exp(i\theta)$: $I=-i\int_\gamma G(z)$, où γ est le cercle unité parcouru dans le sens direct, et $G(z)=z^{-1}F((z+z^{-1})/2,(z-z^{-1})/(2i))$.

6. Par exemple, $\int_0^{2\pi}\sin^{2n}\theta d\theta=-i(-4)^{-n}\int_\gamma z^{-1}(z-z^{-1})^{2n}=2\pi/(-4)^n$ fois le coefficient de z^{2n} dans le développement de $(z^2-1)^{2n}$, ce qui donne $2\pi\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$.

7. (Cours, p. 59-60).

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{p+\cos t}=\frac{2\pi}{\sqrt{p^2-1}},\qquad p>1.$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(p+\cos t)^2}=\frac{2\pi p}{\sqrt{(p^2-1)^3}},\qquad p>1.$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{p+\sin^2 t}=\frac{2\pi}{\sqrt{p^2+p}},\qquad p>0,$$

et si, dans ce dernier exemple, l'intégrale était limitée de 0 à π?

8. Retrouver $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$ en considérant la limite quand $R\to\infty$ de l'intégrale de $(1+z^2)^{-1}$ sur $\gamma:\gamma(t)=t,-R<t<R;\gamma(t)=R\exp(i(t-R)),R<t<R+\pi$.

9. Quelques intégrales proposées dans M. Evgrafov *et al.*, *Recueil de problèmes sur la théorie des fonctions analytiques*, Mir, Moscou, 1974, pp. 211 et 250:

   (a) $\int_{\partial B(1,1)}\dfrac{dz}{1+z^4}$,

   (b) $\int_{\partial B(1+i,2)}\dfrac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$,

   (c) $\int_{x^{2/3}+y^{2/3}=2^{2/3}}\dfrac{\sin z}{(z+1)^3}\,dz$,

(d) $\int_{\partial A_{2,4}(0)} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$,

(e) $\int_{\partial B(0,4)} \frac{z}{z+3}\, e^{z/3}\, dz$,

(f) $\int_{\partial B(0,2)} z \cos \frac{z}{z+1}\, dz$,

(g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\, dx$,

(h) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2ix-2}$,

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$,

(j) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\, dx$,

(k) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$,

(l) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4ix-5)^2}$,

(m) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^3}$, $a>0$,

(n) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6 dx}{(x^4+a^4)^2}$, $a>0$,

(o) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 dx}{(a+bx^2)^4}$, $a>0, b>0$,

(p) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-2i\alpha x-\alpha^2-\beta^2)^n}$, $\alpha>0, \beta>0, n=1,2,\dots$,

(q) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+2}\, dx$,

(r) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-2ix+2}\, dx$,

(s) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+4ix-5)^3}\, dx$,

(t) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3)e^{ix}}{x^2-6x+109}\, dx$,

(u) $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2-2x+5}\,dx$,

(v) $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\sin x}{x}\,dx$,

(w) $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{-ix}}{x^4+8x^2+16}\,dx$,

(x) $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos x}{(x^2+2ix-2)^2}\,dx$,

(y) $\int_{2i-\infty}^{2i+\infty} \dfrac{z\sin zt}{z^2+1}\,dz$, $t>0$,

(z) $\int_{2i-\infty}^{2i+\infty} \dfrac{z\cos zt}{(z^2+1)^2}\,dz$, $t>0$.

Il n'est évidemment pas question de se taper des marathons, mais de réagir aux (petites) difficultés nouvelles: comment intégrer sur le bord d'un anneau quand on n'a vu que le cas d'un seul arc fermé, comment traiter une intégrale en e^{-ix} quand la théorie demande e^{ipx} avec $p>0$, etc.

10. Le type auquel vous avez échappé: soit

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{x^\alpha}{1+x}\,dx\,, \qquad -1<\Re\alpha<0.$$

Soit $z=|z|\exp(i\theta)$, avec $0\leqslant\theta<2\pi$. Alors, $|z|^\alpha\exp(i\alpha\theta)$ est une détermination de z^α holomorphe dans $(|z|,\theta)\in(\varepsilon,R)\times(\varepsilon,2\pi-\varepsilon)$. Alors, on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[\exp(i\varepsilon\alpha)I-\exp(i(2\pi-\varepsilon)\alpha)I] = (1-\exp(2\pi i\alpha))I = 2\pi i\exp(\pi i\alpha),$$

soit $I=-\pi/\sin(\pi\alpha)$.

7 Applications de cette théorie.

Les nombres complexes ont d'abord été inventés au $16^{\text{ème}}$ siècle pour élucider les formules de racines d'équations de degré ≥ 2. L'ensemble des nombres complexes, assimilé au plan $\mathbb{R}^2$, est ainsi progressivement devenu le lieu naturel d'évolution des calculs. On y a donc développé des opérations, des fonctions, le calcul différentiel et le calcul intégral, ainsi que vous venez de le voir.

Vous avez vu que `matlab` et les calculatrices scientifiques de qualité permettent tous les calculs complexes. Les utilisations des fonctions d'une variable complexe sont multiples:

- Tous les phénomènes ondulatoires (optique, électrotechnique, vibrations mécaniques) sont décrits par l'intermédiaire de variables complexes (vecteurs tournants, etc.),

- Tout champ bidimensionnel dérivant d'un potentiel vérifiant l'équation de Laplace $\partial^2 V/\partial x^2 + \partial^2 V/\partial y^2 = 0$ se décrit avantageusement à partir de fonctions holomorphes de la variable complexe $z = x + iy$. Nombreuses applications en mécanique céleste, électro et magnétostatique, aéro et hydrodynamique, ...

- Une série de Fourier $\sum_{n\geq 0}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ n'est autre qu'une série de Laurent $\sum c_n z^n$ en $z = \exp(i\theta)$. En traitement du signal (son, image), on parle souvent de "transformée en z" à propos de telles séries.

- On utilise aussi souvent une transformée dite de Laplace pour étudier des solutions [réelles pourtant] d'équations fonctionnelles (différentielles, intégrales, à retard, ou tout à la fois). On déduit des propriétés [réelles toujours] de ces solutions à partir de leurs transformées de Laplace par investigation de caractéristiques *complexes* (pôles, résidus) de ces dernières.

- L'indice d'un point par rapport à une courbe est utilisé dans des critères de stabilité (diagrammes de Nyquist).

- La théorie quantique (mécanique, physique, chimie) est essentiellement une théorie de nombres complexes et de fonctions de variables complexes.

- Des cosmologistes étudient les débuts de l'univers en recourant à une variable temporelle complexe. Vertige garanti.

Encore quelques opinions:

```
sci.math #123425 (8 + 1069 more)
From:  tim@franck (Tim Hollebeek)
Newsgroups:  sci.math
Re:  Complex numbers purpose
Date:  12 Jan 1996 01:20:03 GMT
Organization:  Princeton University
NNTP-Posting-Host:  franck.princeton.edu
X-Newsreader:  TIN [version 1.2 PL2]

Art'n Magic (deen@algonet.se) wrote:
```

: Does anyone know what purpose the complex numbers serve in real life?
: Is there any business where this mathematic method is used?
Well, for the most part, that's like asking what addition is useful for. Complex
numbers show up or are useful in many many different types of problems.
By 'in real life', I assume you suspect that complex numbers are some sort
of mathematical application with no practical purpose. On the contrary, the
theory of complex numbers is probably the most useful field of mathematics
to engineers, second only to calculus; almost all electrical engineering problems
involve them in one way or another. The same goes for almost any process involving
waves, whether they are light waves or other kinds of waves, since complex
numbers allow you to express and manipulate wave equations very succintly.
Many integrals, which show up in any field which uses calculus, are more easily
handled in terms of complex numbers; the same is true of most series expansions.
-- Tim Hollebeek | Everything above is a true statement, for sufficiently
PChem Grad Student | false values of true.
Princeton Univ. | tim@wfn-shop.princeton.edu
-------------------| http://wfn-shop.princeton.edu/~tim
End of article 123425 (of 123610) -- what next? [npq]

sci.math #123449 (7 + 1069 more)
From: davis_d@spcunb.spc.edu (David K. Davis)
Re: Complex numbers purpose

Art'n Magic (deen@algonet.se) wrote:
: Does anyone know what purpose the complex numbers serve in real life?
If by purpose you mean application, yes. Complex numbers are used extensively
in parts of electronics and circuit design. They are in fact used in many
areas of engineering. They are also used in physics, quantum mechanics in
particular.
: Is there any business where this mathematic method is used?
If you mean, is there an ordinary business mathematics application?, maybe,
but I don't know of any. Certainly your average accountant or even financial
analyst doesn't use them as far as I know.
The reason is that the real numbers are adequate for most ordinary applications.
Complex numbers have an extra dimension beyond that of real numbers and come
into their own when various forms of periodicity come into play.
Finally, mathematics is real life (along with art, music, the flu, etc.) The
complex numbers are important there because they are the end of the line for
numbers that obey the ordinary rules of arithmetic. Any richer set of numbers
is going to start breaking some of those rules, e.g. x times y does not equal
y times x.
-Dave D.
End of article 123449 (of 123610) -- what next? [npq]

sci.math #123597 (6 + 1069 more)
From: Laura Helen <laura@ewald.mbi.ucla.edu>
Re: Complex numbers purpose

On Fri, 12 Jan 1996, David K. Davis wrote:
" Finally, mathematics is real life (along with art, music, the flu, etc.)
The complex numbers are important there because they are the end of the line
for numbers that obey the ordinary rules of arithmetic. Any richer set of
numbers is going to start breaking some of those rules, e.g. x times y does
not equal y times x. "
Hm. You could adjoin a set of transcendentals of any size to the real numbers,
even ordering the whole field. -- there turns out to be a sort of bottomless

pit at the positive and negative end of the rationals, into which any size
set of transcendentals can be tossed.
End of article 123597 (of 123610) -- what next? [npq]

sci.math #123517 (5 + 1069 more)
From: geh@world.std.com (Greg E Hersh)
Re: Complex numbers purpose

Art'n Magic (deen@algonet.se) wrote:
: Does anyone know what purpose the complex numbers serve in real life?
: Is there any business where this mathematic method is used?
Complex numbers are absolutely essential in Circuit Design, and Signals and
Systems Analysis (which is a foundation for topics like Circuit Design, Communication
Theory, and host of other things). Electrical Engineers live by them.
In fact this is what has happened with me: I went through a circuit design
(where it was the first time I've encountered a concept of a 'complex frequency'),
and then in 'Signals and Systems' we immeidately started using a complex exponent
to describe a periodic signal - and the major reason is that it is much easier
to manipulate with a complex exponent than with trig functions. In fact, I've
got so carried away, that I've decided to take a separate course on the Analysis
of Complex Variables.
--MORE--(?%)--MORE--(98%)

sci.math #123586 (4 + 1069 more)
From: psmc@ix.netcom.com(Paul Curran)
Re: Complex numbers purpose
In <Pine.SOL.3.90.960112000639.13330A-100000@sophocles.algonet.se> Art'n Magic
<deen@algonet.se> writes:
"Does anyone know what purpose the complex numbers serve in real life? Is
there any business where this mathematic method is used? "
Whatever happen to concept of knowledge for knowledge's sake? Does everything
we do have to have a purpose in "real life". As though mathematics, astrophysics,
philosophy, etc. are not real life.
Paul Curran
End of article 123586 (of 123610) -- what next? [npq]

sci.math #124175 (0 + 1032 more)
From: jc@cage.rug.ac.be (Jan Cnops)
Re: Complex numbers purpose
Art'n Magic (deen@algonet.se) wrote:
: Does anyone know what purpose the complex numbers serve in real life?
: Is there any business where this mathematic method is used?
Which of course raises the following question:
Does anyone know what purpose business serves in real life? Is there any mathematics
field where these methods are used, or where business raised interesting problems?
Jan Cnops
End of article 124175 (of 124475) -- what next? [npq]

Et encore ceci:

sci.math #109292 (18 + 953 more)
From: cjkushin@eos.ncsu.edu (Carl Joseph Kushinsky)
Imaginary Numbers and Television
I'm not sure if this is the right newgroup but....

In real life positive numbers are used to represent ownership.
(+2 televisions means I own two TV's)
Negetive numbers are used to represent debt.
(-2 TV's means I owe someone two TV's)
What economic condition could imaginary numbers represent?
(2i TV's means what?)
The closest I could get was sort of a 1984 ecomony with here-not here TV's.
(2i TV's means I own two television that don't exist while -2i TV's means I
owe someone two television that I will never build but they still possess.)
This only works for addition and subtraction though. Can anyone describe a
better model?
==
Carl Kushinsky (cjkushin@eos.ncsu.edu)
"Communism was just a Red herring." "We love you Spider!"
"If trees could scream, would we be so cavalier about cutting them down? We
might, if they screamed all the time, for no good reason."
==
End of article 109292 (of 109652) -- what next? [npq]

sci.math #109299 (17 + 953 more)
From: davis_d@spcunb.spc.edu (David K. Davis)
Re: Imaginary Numbers and Television
Carl Joseph Kushinsky (cjkushin@eos.ncsu.edu) wrote: ...
To picture imaginary numbers you need two dimensions, not just one as with
real (i.e. ordinary) numbers. And actually we speak of complex numbers, with
an imaginary part and a real part. So 3 + 2i is just a point or location 3
units to the east and 2 units to the north (from here, or the starting point).
You don't really use complex numbers unless you need two dimensions, so they
don't show up in household arithmetic. But they are very important in physics,
electronics - and - what's most important, they are the basis for some very
beautiful mathematics. Some day study complex function theory, it's just beautiful.
When you're ready read Knopp's books from Dover - they're old and cheap, but
good. Some of the new stuff is more up-to-date, but not as much fun.
-Dave D.
End of article 109299 (of 109652) -- what next? [npq]

sci.math #109440 (16 + 953 more)
From: cjkushin@eos.ncsu.edu (Carl Joseph Kushinsky)
Re: Imaginary Numbers and Television
In article <DF5xqI.9tD@spcuna.spc.edu>, davis_d@spcunb.spc.edu (David K. Davis)
... " or the starting point). You don't really use complex numbers unless
you need two dimensions, so they don't show up in household arithmetic. "
So what sort of economic condition would cause the need for imaginary TV's?
People didn't think negetive numbers were "household" until the idea of debt
was introduced. Is there any sort of concept that would make imaginary TV's
necessary?
==
Carl Kushinsky (cjkushin@eos.ncsu.edu)
End of article 109440 (of 109652) -- what next? [npq]

sci.math #109449 (15 + 953 more)
From: davis_d@spcunb.spc.edu (David K. Davis)
Re: Imaginary Numbers and Television
Carl Joseph Kushinsky (cjkushin@eos.ncsu.edu) wrote:
...

" So what sort of economic condition would cause the need for imaginary TV's?
People didn't think negetive numbers were "household" until the idea of debt
was introduced. Is there any sort of concept that would make imaginary TV's
necessary? "
Imaginary numbers (which are not imaginary or any less real than other numbers)
were discovered prior to any economic necessity - rather they were a mathematical
necessity: you couldn't solve the equation x^2 + 1 = 0 without them. But,
the circuits used in TVs were designed using complex numbers. When I was a
teenager (long ago) I was into electronics and ham radio. I needed to learn
a little math to do my circuit designs. That's when I learned about complex
numbers. I fell in love with math and out of love with ham radio and electronics.
-Dave D.
End of article 109449 (of 109652) -- what next? [npq]

sci.math #109301 (14 + 953 more)
From: roy@dsbc.icl.co.uk (Roy Lakin)
Re: Imaginary Numbers and Television

In article <43mql1$8n@taco.cc.ncsu.edu> cjkushin@eos.ncsu.edu (Carl Joseph
Kushi " ... This only works for addition and subtraction though. Can anyone
describe a better model? "
Virtual Reality, of course !-)
roy
End of article 109301 (of 109652) -- what next? [npq]

sci.math #109322 (13 + 953 more)
Re: Imaginary Numbers and Television
From: RVANRAAM@bcsc02.gov.bc.ca
In article <43mql1$8n@taco.cc.ncsu.edu> cjkushin@eos.ncsu.edu (Carl Joseph
Kushinsky) writes:
" In real life positive numbers are used to represent ownership. (+2 televisions
means I own two TV's) Negetive numbers are used to represent debt. (-2 TV's
means I owe someone two TV's) What economic condition could imaginary numbers
represent? (2i TV's means what?) better model? "
3 : 3 television sets
3i : 3 television sets pushed into another space dimension
3ixi : 3 television sets pushed back into the original space
* * * Regards,
Ray Van Raamsdonk (389-3725) BC Systems
End of article 109322 (of 109652) -- what next? [npq]

sci.math #109351 (12 + 953 more)
From: gorik@cs.kuleuven.ac.be (Gorik De Samblanx)
Re: Imaginary Numbers and Television
In article <1741EE469S86.RVANRAAM@bcsc02.gov.bc.ca>, RVANRAAM@bcsc02.gov.bc.ca
w ...
Try lawyers :
3 = i have/someone owes me 3 TV's
2*3 = 2 people owe me 3 TV's = 6 TV's
3i = i have 3 TV's in trial (someone owes me but doesn't want to give)
2*3i = 2 people owe me 3 court-TV's
i*3 = 1 lawyer ows me 3 TV's (and sure, I'll never get them)
i*3i = 1 lawyer will get me my 3 TV's = -3 (I'll owe him about 3 TV's)
In the real world, there is no difference made between "having a TV" and "there
is someone that ows me a TV". Maybe 'i' can model this difference somehow

(or the situation in-between) ?
Gorik

```
**************************************************************************
* Gorik De Samblanx,            * Department of Computing Science        *
* e-mail:gorik@cs.kuleuven.ac.be * Katholieke Universiteit Leuven, Belgium*
* ---------------------------------------------------------------------- *
*                               * "Et pour quelle raison etrange,        *
*                               *  Les gens qui ne sont pas comme nous,  *
*                               *  Ca nous derange4." (F.Gall)           *
**************************************************************************
```

End of article 109351 (of 109652) -- what next? [npq]

sci.math #109388 (11 + 953 more)
From: "Ian M. Bland" <sssblani>
Re: Imaginary Numbers and Television
This is a multi-part message in MIME format.
--------------------------------656749887200
Content-Transfer-Encoding: 7bit
Content-Type: text/plain; charset=us-ascii
RVANRAAM@bcsc02.gov.bc.ca wrote: ...
surely 3ixi televisions equates to NOT having 3 television sets pushed back
into the origin space since ixi=-1.
Ian Bland, niv. of Reading.
--------------------------------656749887200
Content-Transfer-Encoding: 7bit
Content-Type: text/plain
End of article 109388 (of 109652) -- what next? [npq]

sci.math #109537 (10 + 953 more)
Re: Imaginary Numbers and Television
From: RVANRAAM@bcsc02.gov.bc.ca
In article <43pjtq$s57@susscsc1.rdg.ac.uk>
"Ian M. Bland" <sssblani> writes: ... "surely 3ixi televisions equates to
NOT having 3 television sets pushed back into the origin space since ixi=-1.
"
A minor snag I was trying to resolve. How about
(2+3i) : 2 television sets + 3 imagined television sets
(3+5i) : 3 television sets + 5 imagined television sets
Multiply
(2+3i)(3+5i) = 6 + 19i + 15ixi
6 televison sets + 19 imagined television sets and if you really apply your
imagination intensely to the 15 imagined television sets (15i) which is expressed
as 15ixi then these television sets turn into real sets although negative real
sets. Which means you owe somebody for them and the only way to pay for them
is by getting rid of some of your real TV sets to come up with the capital.
Hence you end up with 6-15 = -9 + 19i television sets. Or 9 sets that you
owe for and 19 imagined sets. So watch what you wish for or else it may get
you into a lot of trouble.
>Date: Tue, 19 Sep 95 16:14:30 PDT
End of article 109537 (of 109652) -- what next? [npq]

sci.math #109349 (9 + 953 more)
From: mareg@csv.warwick.ac.uk (Dr D F Holt)
Re: Imaginary Numbers and Television

```
In article <43mql1$8n@taco.cc.ncsu.edu>, cjkushin@eos.ncsu.edu (Carl Joseph
Kushinsky) writes:  " I'm not sure if this is the right newgroup but....  ...
"
I think you are being misled by the word "imaginary", which was always an unfortunate
choice.
The defining property of i is that i^2 = -1.  So before we can hope to interpret
the concept of i televisions, we have to understand what we mean by the square
of a television.  Any ideas?
Derek Holt.  End of article 109349 (of 109652) -- what next?  [npq]


sci.math #109441 (8 + 953 more)
From:  cjkushin@eos.ncsu.edu (Carl Joseph Kushinsky)
Re:  Imaginary Numbers and Television
In article <43oitt$bd1@crocus.csv.warwick.ac.uk>, mareg@csv.warwick.ac.uk (Dr
D F Holt) writes:
" In article <43mql1$8n@taco.cc.ncsu.edu>, cjkushin@eos.ncsu.edu (Carl Joseph
Kushinsky) writes:  " ...  The defining property of i is that i^2 = -1.  So
before we can hope to interpret the concept of i televisions, we have to understand
what we mean by the square of a television.  Any ideas?
Derek Holt.  " "
That was going to be my next question!
====================================================================
Carl Kushinsky (cjkushin@eos.ncsu.edu)
End of article 109441 (of 109652) -- what next?  [npq]
```

Indications de solutions.

1

1.

2. $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$; $1/z = x/(x^2+y^2) - iy/(x^2+y^2)$.

3.

4. $|z| = 1 \Rightarrow |z|^2 = z\overline{z} = 1 \Rightarrow \overline{z} = 1/z$.

5. $z = iy$, y réel $\Rightarrow (z-1)/(z+1) = -(1-iy)/(1+iy)$, opposé du quotient de deux nombres complexes conjugués, donc de même module.

6. $$\frac{z-a}{1-\overline{a}z} = \frac{1}{z}\ \frac{z-a}{1/z-\overline{a}},$$

   et nous savons que $1/z = \overline{z}$ si $|z| = 1$.

7. On peut effectuer deux élévations au carré pour obtenir l'équation de la courbe, mais voici une autre façon:

   posons $z = (u^2 + 1/u^2)/2$. Alors, $z \pm 1 = (u \pm 1/u)^2/2$, $|z \pm 1| = \frac{1}{2}$ somme des carrés des parties réelle et imaginaire de $u \pm 1/u = [(\mathrm{Re}u \pm \mathrm{Re}(1/u))^2 + (\mathrm{Im}u \pm \mathrm{Im}(1/u))^2]/2$, $|z-1| + |z+1| = (\mathrm{Re}u)^2 + (\mathrm{Re}(1/u))^2 + (\mathrm{Im}u)^2 + (\mathrm{Im}(1/u))^2 = |u|^2 + |1/u|^2$.

   Donc, $|z-1|+|z+1| = \text{constante} = 2a \Rightarrow |u| = \text{constante} = \sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}$. Enfin, avec $u = |u|(\cos\theta/2 + i\sin\theta/2)$, $z = x+iy = \dfrac{|u|^2+1/|u|^2}{2}\cos\theta + i\dfrac{|u|^2-1/|u|^2}{2}\sin\theta$:
   $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, $\qquad (b = \sqrt{a^2-1})$.

   La courbe est une *ellipse* de foyers -1 et 1.

8. $z_1 z_2 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)|z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = |z_1|\,|z_2|[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)] = |z-1|\,|z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$.

9. Partir de $\theta_2 = \dfrac{\theta_2+\theta_1}{2} + \dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}, \theta_1 = \dfrac{\theta_2+\theta_1}{2} - \dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}$.

   Graphique: $\mathrm{cis}\,\theta_1$ et $\mathrm{cis}\,\theta_2$ sont aux extrémités de la base d'un triangle isocèle d'angle au sommet $\theta_2 - \theta_1$.

10. $\dfrac{d\mathrm{cis}x}{dx} = \dfrac{d\cos x}{dx} + i\dfrac{d\sin x}{dx}$.

11. Remplacer x par $|x+iy|\cos\mathrm{Arg}(x+iy)$ et y par $|x+iy|\sin\mathrm{Arg}(x+iy)$.

12.

13. Racines $n^{\text{èmes}}$ de $z = |z|(\cos\mathrm{Arg}z + i\sin\mathrm{Arg}z) = |z|^{1/n}[\cos(\mathrm{Arg}z + 2k\pi)/n + i\sin(\mathrm{Arg}z + 2k\pi)/n]$, $\quad k = 0, 1, \ldots, n-1$. Forment les sommets d'un polygone régulier de n côtés, inscrit dans un cercle de rayon $|z|^{1/n}$.

14. Produit des distances d'un point correspondant au nombre complexe z aux n racines $n^{\text{èmes}}$ de $r^n = \prod_{k=0}^{k=n-1} |z - r\,\mathrm{cis}(2k\pi/n)| = |F(z)|$, où F est le polynôme qui s'annule aux racines $n^{\text{èmes}}$ de r^n: $F(z) = z^n - r^n$. Quand $z = R > r$, produit $= R^n - r^n$.

    Quand $z \to r$, produit des distances aux *autres* racines $= \lim_{R\to r} \dfrac{R^n - r^n}{R - r} = nr^{n-1}$. Donc,
    $n = \prod_{k=1}^{k=n-1} |1 - \mathrm{cis}\,(2k\pi/n)| = \prod_{k=1}^{k=n-1} |\mathrm{cis}\,0 - \mathrm{cis}\,(2k\pi/n)| = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{k=n-1}\sin(k\pi/n)$.

15. En effet, $v_1 = z + (z^2-1)^{1/2}$ et $v_2 = z - (z^2-1)^{1/2}$ sont les deux racines de $v^2 - 2zv + 1 = 0$, donc $v_1 v_2 = 1$, $|v_1|\,|v_2| = 1$: l'une des deux racines a un module > 1 et l'autre a un module < 1, sauf si les deux racines ont le même module unité: $v_1 = \mathrm{cis}\,\theta$ et $v_2 = \mathrm{cis}(-\theta)$, ce qui n'arrive que si $2z = v_1 + v_2 = 2\cos\theta$, donc si z est réel $\in [-1, 1]$.

Si $v_1 = \rho \mathrm{cis}\,\theta$, avec $\rho = \text{constante} = a + \sqrt{a^2 - 1}$, $v_2 = 1/v_1 = \rho^{-1}\mathrm{cis}(-\theta)$, $z = (v_1 + v_2)/2 = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)/2 + \rho^{-1}(\cos\theta - i\sin\theta)/2 == \dfrac{\rho + \rho^{-1}}{2}\cos\theta + i\dfrac{\rho - \rho^{-1}}{2}\sin\theta$, on retrouve l'ellipse d'un problème précédent.

16. •

- Horizontale $z = x + ic \Rightarrow z^2 = x^2 - c^2 + 2icx$: parabole d'axe horizontal, de sommet $-c^2$. Le foyer est à l'origine (l'abscisse de la directrice est $-2c^2$). verticale $z = c + iy \Rightarrow z^2 = c^2 - y^2 + 2icy$: parabole d'axe horizontal, de sommet c^2.

•

2

1.

2.

3.

4.

5. Si h est réel, $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{(c+h)^2 d + i(c+h)d^2 - c^2 d - icd^2}{h} = d(2c + h + id) \to_{h\to 0} d(2c + id)$;
   Si h est imaginaire pur $h = ik$, $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{f(a+ik) - f(a)}{ik} = \dfrac{c^2(d+ik) + ic(d+ik)^2 - c^2 d - icd^2}{ik} = c(c + 2id - k) \to_{k\to 0} c(c + 2id)$.

6. Les formules “normales” s'appliquent: $dz^n/dz = nz^{n-1}$.

7. Une combinaison de 1, z et z^2 ne contient x^2 et y^2 que associés dans la différence $x^2 - y^2$, il n'est pas possible de faire apparître la somme $x^2 + y^2$.

8.

3

9. 1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

4

9. 1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

5

9. 1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

6

9. 1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

Dans la plupart des cas, je me contente de recopier les réponses du bouquin. Une prime (notre considération) à qui trouve des erreurs.

(a) $-\pi i/\sqrt{2}$

(b) $-\pi i/2$

(c) $\pi i \sin 1$

(d) $-3\pi i/64$

(e) $16\pi i/3$

(f) $\pi i(\cos 1 + 2\sin 1)$

(g) $5\pi/12$

(h) 0

(i) $\pi\sqrt{2}$

(j) $4\pi/3$

(k) $3\pi/8$

(l) 0

(m) $\pi/(16a^3)$

(n) $3\pi\sqrt{2}/(16a)$

(o) $\pi a^{-3/2}b^{-5/2}/32$

(p) 0

(q) $\pi i e^{-1+i}$

(r) $-(2\pi\sin 1)/e$

(s) 0

(t) $\pi i e^{3i-10}$

(u) $\pi(1-i)e^{-3i-6}$

(v) π

(w) $3\pi e^{-2}/32$

(x) $\pi(\sin 1 - \cos 1)/(2e)$

(y) $\pi\cosh t$

(z) $\pi(t-i)e^{it}$