EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 2

MAT2410
2009-2010

Alphonse Magnus,
Institut de Mathématique Pure et Appliquée,
Université catholique de Louvain,
Chemin du Cyclotron,2, B-1348 Louvain-la-Neuve (Belgium)
(++32)(0)10 473157 , alphonse.magnus@uclouvain.be,
http ://perso.uclouvain.be/alphonse.magnus/

Matière vue. Mai 2010

1. Problèmes elliptiques, formulations variationnelles, approximation de la solution. Espaces $\mathscr{C}_I^m(\Omega)$, théorème de Gauss-Green sur Ω, calcul des variations, dérivées distributionnelles.

Approximation de Galerkin, théorème d'existence de la solution (dans $U_h \subset U$), interprétation de la solution approchée comme meilleure approximation selon la $a-$norme (si a est symétrique).

Existence dans U Hilbert : Lax-Milgram (cas a symétrique).

Éléments finis : description d'un élément fini comme ensemble { éléments e_k, espaces V_k, formes F_i, indices de correspondance $i \in Q_k$}. A déterminer : conditions d'unisolvance $V_k \leftrightarrow \{F_i\}_{i\in Q_k}$ (base de Lagrange $\{L_i\}$) et continuité $\mathscr{C}_I^?$.

(1) interpolants de Lagrange et Hermite unidimensionnels,
(2) éléments produits $e_{k_1}\times f_{k_2}, V_{k_1}\otimes W_{k_2}, F_{i_1}G_{i_2}, Q_{k_1}\times R_{k_2}$, rectangle à 9 points, mention du serendip (8 points),rectangle d'Hermite,
(3) triangles à 3 et 6 points, triangle d'Hermite.

Sobolev : $H^m(\Omega) =$ complétion de $\mathscr{C}_I^m(\Omega)$ pour $\|u\|_m = [\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2]^{1/2}$.

Formes et opérateurs bornés : $F(u) =$ limite de $F(u_k)$ si $\{u_k\}$ est une suite de Cauchy de $\mathscr{C}_I^m(\Omega)$ déterminant u. Alors, $U = H^m \bigcap \mathrm{Ker}(F)$ est Hilbert.

(1) $u(P) \leqslant c\|u\|_m$ si $m > n/2$ et prop. cône : preuve 1-D, contre-exemple 2-D si $m = 1$.
(2) dérivée faible : $\|D^\alpha u\|_{L^2} \leqslant c\|u\|_m$ si $|\alpha| \leqslant m$, et $\int_\Omega vD^\alpha u\ dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega uD^\alpha v$ pour tout $v \in \mathscr{C}_0^m(\Omega)$.
(3) Trace : $\|\gamma u = u|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant c\|u\|_m$ si $m \geqslant 1$ et frontière lipschitzienne (sans dém.).

Coercivité de $a(u, v) = \int_\Omega \boldsymbol{grad}\ u \cdot \boldsymbol{grad}\ v\ dx$ dans $H_0^1(\Omega)$ par compacité dans L^2 des fermés bornés de H^1 (Rellich).

Théorème de convergence $\|u-u_h\|_m \to 0$, conditions sur la géométrie $|D^\alpha L_i| = O(h^{|\beta_i|-|\alpha|})$.

2. Opérateurs discrétisés.

Discrétisation L_h de l'opérateur L, consistance, stabilité numérique. Cas du laplacien à 1 et 2 dimensions.

Détermination exacte du spectre du laplacien discrétisé sur un intervalle et sur un rectangle, inégalités pour $\Omega \subseteq$ rectangle R.

Matrices d'inverse positive, convergence, interprétation stochastique.

3. Problèmes d'évolution.

Équation de la chaleur et autres problèmes paraboliques, noyau de Poisson, exemple de problème mal posé, application à $\partial u/\partial t = -Mu$ avec M symétrique semi défini positif, dans le cas autonome $\partial M/\partial t = 0$, par valeurs et fonctions propres de M dans $U \subset V$, espaces de Hilbert avec injection compacte.