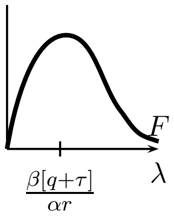
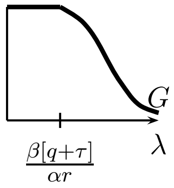




$e[r\lambda + q + \tau][\gamma^{-1} - 1] = A^{1/[1-\gamma]}\gamma^{\gamma/[1-\gamma]}[1-\gamma]\lambda^{\beta/[1-\gamma]}[r\lambda+q+\tau]^{-\gamma/[1-\gamma]}$, fonction positive, nulle en $\lambda = 0$ et $\lambda = +\infty$ (car $\beta < \gamma$). Le maximum en λ est atteint en $\lambda = \beta[q+\tau]/[\alpha r]$, où la fonction vaut
$F_{\max}(\tau; A) = A^{1/[1-\gamma]}[1-\gamma]\alpha^{\alpha/[1-\gamma]}\beta^{\beta/[1-\gamma]}r^{-\beta/[1-\gamma]}[q+\tau]^{-\alpha/[1-\gamma]}$.

Ensuite, on définit $G(\lambda,\tau;A) = \max\limits_{\substack{\mu\geqslant\lambda\\ e\geqslant 0}} Ae^{\gamma}\mu^{\beta} - [r\mu+q+\tau]e = \max_{\mu\geqslant\lambda} F(\mu,\tau;A)$, et vaut donc $F_{\max}(\tau;A)$ tant que $\lambda \leqslant \beta[q+\tau]/[\alpha r]$, et coïncide avec F au-delà.

2. Problème à deux périodes.

2.1. **Problème absolu.**

On doit maximiser en λ une somme et/ou intégrale de fonctions

$$\Omega(\lambda) = \max_{e\geqslant 0}\left\{ e^{\gamma}\lambda^{\beta} - [r\lambda+q]e + \tau_0[\overline{e}_0 - e] + \rho\int_{\pi_{\min}}^{\pi_{\max}} f(\pi)\max_{\substack{\mu\geqslant\lambda\\ e_1\geqslant 0}}\left[e_1^{\gamma}\mu^{\beta} - [r\mu+q+\tau_0\pi]e_1 + \tau_0\pi\underbrace{[\tilde{e}_1 - \delta[\overline{e}_0 - e]]}_{\overline{e}_1}\right] d\pi \right\}$$

$$= \max_{e\geqslant 0}\left\{ e^{\gamma}\lambda^{\beta} - [r\lambda+q+\tau_0-\rho\delta\tilde{\pi}_1\tau_0]e + \tau_0\overline{e}_0 + \rho[\tilde{e}_1 - \delta\overline{e}_0]\tilde{\pi}_1\tau_0 + \rho\int_{\pi_{\min}}^{\pi_{\max}} f(\pi)\max_{\substack{\mu\geqslant\lambda\\ e_1\geqslant 0}}\left[e_1^{\gamma}\mu^{\beta} - [r\mu+q+\tau_0\pi]e_1\right] d\pi\right\}$$

où $\tilde{\pi}_1$ est l'espérance de la loi f.

On a donc, avec $\tau_0' := \tau_0[1-\rho\delta\tilde{\pi}_1]$,

$$\Omega(\lambda) = \text{const.} + F(\lambda,\tau_0';1) + \rho\int_{\pi_{\min}}^{\pi_{\max}} f(\pi)G(\lambda,\tau_0\pi;1)\,d\pi. \tag{2}$$

Toutes les fonctions G sont décroissantes en λ, il suffit donc d'examiner $\Omega(\lambda)$ en $\lambda \leqslant \lambda_0^{\text{ref}} := \beta[q+\tau_0']/[\alpha r]$, là où F est encore croissante.

N.B.: ON EST EN RÉGIME I pour tous les $\tau_0 > 0$ si $\tau_0' \leqslant 0$, donc si $\rho\delta\tilde{\pi}_1 > 1$, puisque λ_0^{ref} est alors inférieur à $\overline{\lambda_0} = \beta q/[\alpha r]$.

Dans la suite, on supposera $\rho\delta\tilde{\pi}_1 < 1$.

2.2. **Problème relatif.**

$$\Omega_r(\lambda) = \max_{e\geqslant 0}\left\{ y - [r\lambda+q]e + \tau_0\left[\frac{\overline{e}}{\overline{y}} - \frac{e}{y}\right]y + \rho \text{ idem plus haut } \right\}$$

où $y = e^{\alpha}k^{\beta} = e^{\gamma}\lambda^{\beta}$, et où $\overline{e}$ et $\overline{y}$ sont les solutions du problème absolu quand $\tau_0 = 0$, donc $\overline{\lambda_0} = \lambda_0^{\text{ref}}$ en $\tau_0 = 0$: $\beta q/[\alpha r]$, et $\overline{e} = \left[\dfrac{\alpha\overline{\lambda_0}^{\beta}}{q}\right]^{1/[1-\gamma]} = \left[\dfrac{\beta\overline{\lambda_0}^{\beta-1}}{r}\right]^{1/[1-\gamma]}$. Enfin, $\overline{e}/\overline{y} = \overline{e}^{1-\gamma}/\overline{\lambda_0}^{\beta} = \beta/[r\overline{\lambda_0}] = \alpha/q$ On retrouve (2), mais avec $F(\lambda,\tau_0';A) = \max\limits_{e\geqslant 0}\{Ae^{\gamma}\lambda^{\beta} - [r\lambda+q+\tau_0']e\}$ au lieu de

F. On obtient maintenant $e = \left[\dfrac{A\gamma\lambda^\beta}{r\lambda + q + \tau}\right]^{1/[1-\gamma]}$, et $F_r = e[A\lambda^\beta/e^{1-\gamma} - r\lambda - q - \tau_0'] =$ l'ancien F fois $A^{1/[1-\gamma]}$, $(A = 1 + \tau_0\alpha/q)$.

Avant de reprendre la discussion, qui sera différente et sans doute plus simple qu'auparavant, un petit coup de jus numérique:

λ_0 est maintenant tellement proche de λ_0^{ref} que l'erreur relative sur $\lambda_0^{\text{ref}} - \lambda_0$ peut être importante.

```
c: omega   .m        2549  12.04.104  15:02   \calc\matlab4

% omeg1.m   avr 2004
%
% max omega= A e0^gam la0^bet -[r la0+q] e0 +t0[eb0-e0]
%     +rho  max  e1^gam la1^bet -[r la1+q] e1 +t1[eb1-e1]
%           en e1 et la1>=la0
%
%  avec eb1=et1-del[eb0-e0]
%
clear all;     wsimp=[1 4 2 4 1]/12;  % Simpson
% base:
 alp=0.2;bet=0.7;del=1.0;r=0.12;q=1;rho=0.95;pmin=0.0;pmax=1.5;
fprintf(1,[' alpha=%4.2f, beta=%4.2f, delta=%4.2f, r=%4.2f, q=%4.2f, rho=%4.2f ,'  ...
  'pimin=%5.2f, pimax=%5.2f\n'],alp,bet,del,r,q,rho,pmin,pmax);
 fprintf(1,' tau0   lama ea ka ya  lamr er kr yr  laref 1-lama/laref 1-lamr/laref\n');
  gam=alp+bet; pmoy=(pmin+pmax)/2;  lbar=q*bet/(alp*r);
   t0v=[];larefv=[];laav=[];larv=[];
   tstep=0.05;
   for it0=0:2.0/tstep;t0=tstep*it0;
     t0p=t0*(1-rho*del*pmoy);laref=bet*(q+t0p)/(alp*r);
%    AA=[1 , 1+t0*alp/(q-rho*del*tmoy)]; AAg=AA.^(1/(1-gam));
    AA=[1 , 1+t0*alp/q]; AAg=AA.^(1/(1-gam));
     stepas=0.0005;
      la0=lbar+(laref-lbar)*[stepas:stepas:1];
      intg=0;
      for iw=1:5; p1=pmin+(iw-1)*(pmax-pmin)/4;
%      la1=(alp*r*la0-bet*(q+p1*t0) )./( bet*(q+t0p)-alp*r*la0);
%      la2=( (r*la0+q+p1*t0)./(r*la0+q+t0p) ).^(1/(1-gam));
        e1=(gam*la0.^bet./(r*la0+q+p1*t0)).^(1/(1-gam));
       Flt =e1.^gam.*la0.^bet-(r*la0+q+p1*t0).*e1;
       lax=bet*(q+p1*t0)/(alp*r);e1x=(gam*lax^bet/(r*lax+q+p1*t0))^(1/(1-gam));
       ilax=min( size(Flt,2) , ceil(  lax/(laref*stepas) ) )-1;
       Fltx=e1x^gam*lax^bet-(r*lax+q+p1*t0)*e1x;
       Glt=[Fltx*ones(1,ilax),Flt(ilax+1:size(Flt,2))];
       intg=intg+wsimp(iw)*Glt;
      end; % end iw
      e1a=(gam*la0.^bet./(r*la0+q+t0p)).^(1/(1-gam));
      Flta =e1a.^gam.*la0.^bet-(r*la0+q+t0p).*e1a ;
      omegaa=Flta+rho*intg;
      e1r=(AA(2)*gam*la0.^bet./(r*la0+q+t0p)).^(1/(1-gam));
      Fltr =AA(2)*e1r.^gam.*la0.^bet-(r*la0+q+t0p).*e1r ;
      omegr=Fltr+rho*intg;
   [ma,ia]=max( omegaa );
   [mr,ir]=max( omegr );
%  plot(la0(ia:ir),la1(ia:ir)/rho,la0(ia:ir),la2(ia:ir),la0(ia:ir),la1(ia:ir)/(rho*AAg(2)));
%  titre=sprintf( ' tau0=%5.2f  delta=%5.2f lama=%8.3f lamr=%8.3f laref=%8.4f  ',...
%    t0,del,la0(ia),la0(ir),laref);title(titre);
     fprintf(1,[' %8.4f %8.3f %8.3f %8.3f %8.3f %8.3f ' , ...
       '%8.3f %8.3f %8.3f %8.3f %8.4f %8.4f \n'],...
```

```
     t0,la0(ia),e1a(ia),la0(ia)*e1a(ia),la0(ia)^bet*e1a(ia)^gam,...
        la0(ir),e1r(ir),la0(ir)*e1a(ir),la0(ir)^bet*e1a(ir)^gam,...
     laref,1-la0(ia)/laref,1-la0(ir)/laref);
%  hold
%  pause;
   t0v=[t0v t0];larefv=[larefv laref];laav=[laav la0(ia)];larv=[larv la0(ir)];
   end  %tau0
omega
```

alpha=0.20, beta=0.70, delta=1.00, r=0.12, q=1.00, rho=0.95 ,pimin= 0.00, pimax= 1.50

tau0	lama	ea	ka	ya	lamr	er	kr	yr	laref	1-lama/laref	1-lamr/laref
0.00	29.167	1838.686	53628.339	9193.429	29.167	1838.686	53628.339	9193.429	29.167	0.0000	0.0000
0.05	29.580	1761.900	52116.761	8934.710	29.580	1946.234	52116.761	8934.710	29.586	0.0002	0.0002
0.10	29.982	1689.827	50663.929	8686.756	29.982	2059.889	50663.929	8686.756	30.005	0.0008	0.0008
0.15	30.372	1622.099	49266.851	8448.971	30.372	2179.966	49266.851	8448.971	30.424	0.0017	0.0017
0.20	30.752	1558.352	47922.985	8220.795	30.752	2306.742	47922.985	8220.795	30.844	0.0030	0.0030
0.25	31.122	1498.303	46629.473	8001.701	31.122	2440.578	46629.473	8001.701	31.263	0.0045	0.0045
0.30	31.482	1441.591	45384.604	7791.201	31.482	2581.670	45384.604	7791.201	31.682	0.0063	0.0063
0.35	31.833	1388.035	44185.353	7588.832	31.833	2730.475	44185.353	7588.832	32.102	0.0084	0.0084
0.40	32.174	1337.411	43029.423	7394.160	32.174	2887.370	43029.423	7394.160	32.521	0.0107	0.0107
0.45	32.506	1289.455	41915.243	7206.787	32.506	3052.610	41915.243	7206.787	32.940	0.0132	0.0132
0.50	32.831	1243.971	40840.932	7026.338	32.831	3226.541	40840.932	7026.338	33.359	0.0158	0.0158
0.55	33.147	1200.840	39804.011	6852.449	33.147	3409.690	39804.011	6852.449	33.779	0.0187	0.0187
0.60	33.456	1159.841	38803.410	6684.803	33.456	3602.289	38803.410	6684.803	34.198	0.0217	0.0217
0.65	33.759	1120.823	37837.561	6523.093	33.759	3804.709	37837.561	6523.093	34.617	0.0248	0.0248
0.70	34.050	1083.786	36903.259	6366.987	34.050	4017.833	36903.259	6366.987	35.036	0.0281	0.0281
0.75	34.339	1048.403	36001.557	6216.280	35.276	4157.089	36249.025	6221.135	35.456	0.0315	0.0051
0.80	34.621	1014.697	35129.371	6070.669	35.697	4375.632	35407.513	6076.577	35.875	0.0350	0.0050
0.85	34.894	982.565	34285.325	5929.909	36.116	4604.322	34594.551	5936.997	36.294	0.0386	0.0049
0.90	35.159	951.911	33468.118	5793.768	36.536	4843.241	33809.537	5802.173	36.714	0.0423	0.0048
0.95	35.420	922.573	32677.637	5662.075	36.958	5092.765	33051.203	5671.891	37.133	0.0461	0.0047
1.00	35.678	894.471	31912.872	5534.639	37.376	5353.745	32317.513	5545.946	37.552	0.0499	0.0047
1.05	35.929	867.598	31171.648	5411.225	37.800	5625.699	31608.995	5424.154	37.971	0.0538	0.0045
1.10	36.172	841.886	30452.922	5291.648	38.220	5910.007	30922.898	5306.328	38.391	0.0578	0.0044
1.15	36.414	817.196	29757.023	5175.805	38.641	6206.639	30259.050	5192.300	38.810	0.0617	0.0043
1.20	36.643	793.613	29080.429	5063.400	39.063	6516.035	29616.497	5081.909	39.229	0.0659	0.0042
1.25	36.876	770.863	28426.349	4954.504	39.486	6838.652	28994.336	4975.002	39.648	0.0699	0.0041
1.30	37.097	749.109	27789.843	4848.745	39.910	7174.955	28391.712	4871.434	40.068	0.0741	0.0039
1.35	37.317	728.161	27172.987	4746.152	40.334	7525.426	27807.813	4771.068	40.487	0.0783	0.0038
1.40	37.537	707.973	26575.163	4646.612	40.754	7891.435	27240.973	4673.767	40.906	0.0824	0.0037
1.45	37.745	688.641	25992.585	4549.810	41.180	8271.800	26692.252	4579.418	41.326	0.0866	0.0035
1.50	37.952	669.988	25427.726	4455.831	41.600	8668.871	26159.162	4487.893	41.745	0.0908	0.0035
1.55	38.154	652.045	24878.376	4364.465	42.028	9081.230	25642.845	4399.088	42.164	0.0951	0.0032
1.60	38.350	634.776	24343.917	4275.604	42.449	9511.532	25140.872	4312.891	42.583	0.0994	0.0032
1.65	38.547	618.084	23825.541	4189.280	42.871	9959.341	24653.550	4229.202	43.003	0.1036	0.0031
1.70	38.739	602.002	23320.991	4105.278	43.294	10425.249	24180.314	4147.926	43.422	0.1078	0.0030
1.75	38.925	586.503	22829.733	4023.505	43.716	10909.863	23720.625	4068.971	43.841	0.1121	0.0028
1.80	39.106	571.557	22351.255	3943.876	44.140	11413.807	23273.971	3992.249	44.260	0.1165	0.0027
1.85	39.289	557.079	21887.027	3866.465	44.563	11937.721	22839.863	3917.677	44.680	0.1207	0.0026
1.90	39.467	543.106	21434.713	3791.048	44.987	12482.263	22417.835	3845.174	45.099	0.1249	0.0025
1.95	39.640	529.615	20993.870	3717.550	45.412	13048.106	22007.442	3774.666	45.518	0.1291	0.0023
2.00	39.808	516.585	20564.074	3645.900	45.828	13637.873	21607.365	3706.078	45.938	0.1334	0.0024

exit   10408503 flops.

2.3. **Dérivées.**

$$d\Omega(\lambda)/d\lambda = \underbrace{\partial F(\lambda, \tau_0'; A)/\partial\lambda}_{\geqslant 0} + \rho \int_{\frac{\beta[q+\tau_0\pi]}{\alpha r} \leqslant \lambda} f(\pi) \underbrace{\partial F(\lambda, \tau_0\pi; 1)/\partial\lambda}_{\leqslant 0} \, d\pi$$

Comme λ est lui-même $\leqslant \lambda_0^{\text{ref}}$, l'intégrale ne porte que sur des $\pi \leqslant \tau_0'/\tau_0 = 1 - \rho\delta\tilde{\pi}_1$.

Donc, si $1-\rho\delta\tilde{\pi}_1 \leqslant \pi_{\min}$, il n'y a pas de contribution intégrale, et $d\Omega/d\lambda$ se réduit à $\partial F(\lambda, \tau_0'; 1)/\partial\lambda$, et la réponse est $\lambda_0 = \lambda_0^{\text{ref}}$,

et ce, pour TOUS les $\tau_0 > 0$! Par ailleurs, quand $\tau_0 = 0$, tous les F et G ont leur maximum en $\lambda = \overline{\lambda_0} = \beta q/[\alpha r]$.

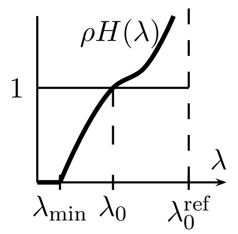
Si $1 - \rho\delta\tilde{\pi}_1 > \pi_{\min}$, on résout $d\Omega(\lambda)/d\lambda = 0$:

$$\rho H(\lambda) = 1, \tag{3}$$

où

$$H(\lambda) = \int_{\frac{\beta[q+\tau_0\pi]}{\alpha r} \leqslant \lambda} f(\pi) \frac{-\partial F(\lambda, \tau_0\pi; 1)/\partial\lambda}{\partial F(\lambda, \tau_0'; A)/\partial\lambda} \, d\pi,$$

où on n'a donc que des termes positifs.



Tant que $\lambda < \lambda_{\min} := \beta[q + \tau_0\pi_{\min}]/[\alpha r]$, $H(\lambda) = 0$;
quand λ se rapproche de λ_0^{ref}, $\partial F(\lambda, \tau_0')/\partial\lambda$ tend vers 0, donc $H(\lambda) \to \infty$.

2.4. **Monotonie, 1.**

Il serait très agréable de s'assurer que H est une fonction ***croissante***, ce qui définirait clairement λ_0 comme solution unique de (3).

Comme $F(\lambda, \tau) = \text{const.}\ \lambda^{\beta/[1-\gamma]}[r\lambda + q + \tau]^{-\gamma/[1-\gamma]}$,
le rapport figurant dans H est

$$\left[\frac{r\lambda + q + \tau_0'}{r\lambda + q + \tau}\right]^{1/[1-\gamma]} \frac{\alpha r\lambda - \beta[q + \tau]}{\beta[q + \tau_0'] - \alpha r\lambda} \tag{4}$$

($\tau = \tau_0\pi$).

Cette fonction est croissante en λ si

$$\frac{1}{1-\gamma}\left[\frac{1}{\lambda + [q + \tau_0']/r} - \frac{1}{\lambda + [q + \tau]/r}\right] + \frac{1}{\lambda - \beta[q + \tau]/[\alpha r]} - \frac{1}{\lambda - \beta[q + \tau_0']/[\alpha r]}$$

ici, $\tau = \tau_0\pi$, $\tau_{\min} = \tau_0\pi_{\min}$, etc.

$$= \frac{\tau_0' - \tau}{r[1-\gamma]}\left[\frac{\beta[1-\gamma]/\alpha}{[\lambda - \frac{\beta[q+\tau]}{\alpha r}][\frac{\beta[q+\tau_0]}{\alpha r} - \lambda]} - \frac{1}{[\lambda + \frac{q+\tau}{r}][\lambda + \frac{q+\tau_0'}{r}]}\right] \geqslant 0$$

ou

$$\frac{\beta[1-\gamma]}{\alpha} \geqslant \max_{\lambda} \frac{[\lambda - \frac{\beta[q+\tau]}{\alpha r}][\frac{\beta[q+\tau_0']}{\alpha r} - \lambda]}{[\lambda + \frac{q+\tau}{r}][\lambda + \frac{q+\tau_0'}{r}]} \tag{5}$$

maximum évalué dans $\lambda \in \left[\frac{\beta[q+\tau]}{\alpha r}, \frac{\beta[q+\tau_0']}{\alpha r}\right]$.

Première condition suffisante:

le maximum de (5) est inférieur au produit des maxima séparés de $\dfrac{\lambda - \frac{\beta[q+\tau]}{\alpha r}}{\lambda + \frac{q+\tau}{r}}$ et $\dfrac{\frac{\beta[q+\tau_0']}{\alpha r} - \lambda}{\lambda + \frac{q+\tau_0'}{r}}$, et qui sont, pour le premier rapport (qui est croissant), $\dfrac{\frac{\beta[\tau_0'-\tau]}{\alpha r}}{\frac{\beta[q+\tau_0']}{\alpha r} + \frac{q+\tau}{r}}$, et, pour le second rapport (décroissant), $\dfrac{\frac{\beta[\tau_0'-\tau]}{\alpha r}}{\frac{\beta[q+\tau]}{\alpha r} + \frac{q+\tau_0'}{r}}$.

Tout ira bien si $\beta[1-\gamma]/\alpha$ est supérieur au produit de ces deux maxima, produit lui-même supérieur au maximum de (5):

$$\frac{\beta[1-\gamma]}{\alpha} \geqslant \frac{\beta^2[\tau_0' - \tau]^2}{[\gamma q + \beta\tau_0' + \alpha\tau][\gamma q + \beta\tau + \alpha\tau_0']}$$

pour tout $\tau \geqslant \tau_{\min}$. Comme l'expression ci-dessus est décroissante en τ, il suffit que l'inégalité soit vraie en $\tau = \tau_{\min} = \tau_0\pi_{\min}$. On obtient, avec

$$x = \frac{\tau_0' - \tau_{\min}}{q + \tau_{\min}} \leqslant \tau_0 \frac{1 - \rho\delta\tilde{\pi}_1}{q},$$

$$1 - \gamma \geqslant \frac{\alpha\beta x^2}{[\gamma + \beta x][\gamma + \alpha x] = \gamma^2[x+1] + \alpha\beta x^2},$$

ou

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma[1-\gamma]} \leqslant \frac{x+1}{x^2}.$$

Avec $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.7$, on peut grimper à $x = 1.5$.

Si on ne veut rien savoir de plus sur α et β que leur somme γ, on maximise encore le membre de gauche en prenant $\alpha = \beta = \gamma/2$, ce qui donne maintenant

$$\gamma \leqslant \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{4[1+x]}},$$

donc, par exemple, $8/9 = 0.88888\ldots$ si $x \leqslant 1$.

ceci en tout petit, puisque ça ne plaît pas, et ce n'est peut-être pas indispensable:

Et puis non, c'est trop bête, on peut évaluer ***exactement*** le maximum dans (5): soit $a = [q+\tau]/r$, $b = [q+\tau_0']/r = \alpha\lambda_0^{\text{ref}}/\beta$, $\xi = \beta/\alpha$. Le second membre de (5) est donc

$$\frac{[\lambda - a\xi][b\xi - \lambda]}{[\lambda + a][\lambda + b]}, \tag{6}$$

qui annule sa dérivée en λ tel que

$$0 = \frac{1}{\lambda - a\xi} + \frac{1}{\lambda - b\xi} - \frac{1}{\lambda + a} - \frac{1}{\lambda + b} = [1+\xi]\left[\frac{a}{[\lambda - a\xi][\lambda + a]} + \frac{b}{[\lambda - b\xi][\lambda + b]}\right],$$

ou $[a+b]\lambda^2 + 2ab[1-\xi]\lambda - ab[a+b]\xi = 0$, on arrive à

$$\lambda = \frac{[\xi - 1]ab + \sqrt{ab[a+b\xi][b+a\xi]}}{a+b},$$

$$[a+b][\lambda + a] = a[b\xi + a] + \sqrt{ab[a+b\xi][b+a\xi]},$$

$$[a+b][\lambda + b] = b[a\xi + b] + \sqrt{ab[a+b\xi][b+a\xi]},$$

$$[a+b][\lambda - a\xi] = -a[a\xi + b] + \sqrt{ab[a+b\xi][b+a\xi]},$$

$$[a+b][\lambda - b\xi] = -b[b\xi + a] + \sqrt{ab[a+b\xi][b+a\xi]},$$

$$\frac{\lambda - a\xi}{\lambda + a} = \frac{-a[a\xi + b] + \surd}{a[b\xi + a] + \surd} = \frac{a[a\xi + b]\xi[a^2 - b^2]}{[a[b\xi + a] + \surd][-a[a\xi + b] - \surd]} = \frac{[a\xi + b]\xi[b - a]}{[b\xi + a][a\xi + b] + [1+\xi]\surd}.$$