Augusto Ponce

Descriptif des travaux

Mes centres d'intérêt tournent autour de I) interactions entre les EDP elliptiques non linéaires et la théorie de la mesure, de II) classification des singularités isolées, de III) applications de Sobolev entre variétés et de IV) propriétés des fonctions faiblement dérivables.

1. Équations elliptiques avec données mesures

1.1. Le principe du maximum

J'ai étudié en collaboration avec H. Brezis [14] le principe du maximum fort pour l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + a(x)$, avec un potentiel $a \in L^1(B_1)$. Plus précisément, nous avons démontré le

Théorème 1 *Soit $u \in L^1(B_1)$, $u \geq 0$ p.p. sur B_1, tel que $\Delta u \in L^1(B_1)$ et*

$$-\Delta u + a(x)u \geq 0 \quad \text{p.p. sur } B_1, \tag{1}$$

avec $a \in L^1(B_1)$. Si $u = 0$ sur un ensemble de mesure positive, alors $u = 0$ p.p. sur B_1.

Le principe du maximum classique affirme que si le potentiel a appartient à L^p, avec $p > \frac{N}{2}$, et si $u = 0$ en un point, alors $u \equiv 0$ sur B_1. Cette version tombe en défaut dans notre situation : la fonction u peut avoir des zéros à l'intérieur du domaine sans être identiquement nulle. Le Théorème 1 avait été établi par Ancona [1] en utilisant des outils de la théorie du potentiel. Nous avons présenté dans [14] une preuve purement « EDP ».

J'ai démontré avec L. Dupaigne [15] une espèce de réciproque du principe du maximum :

Théorème 2 (Principe du maximum inverse) *Soit $u \in L^1(B_1)$ tel que Δu est une mesure finie sur B_1. Si $u \geq 0$ p.p. sur B_1, alors*

$$(-\Delta u)_{\mathrm{c}} \geq 0 \quad \text{sur } B_1. \tag{2}$$

L'indice « c » désigne la partie de la mesure concentrée sur un ensemble de capacité newtonienne nulle.

1.2. Équations non linéaires liées au problème de Thomas-Fermi

J'ai étudié en collaboration avec H. Brezis et M. Marcus [12] l'existence des solutions du problème elliptique non linéaire :

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu & \text{dans } B_1, \\ \qquad\qquad\; u = 0 & \text{sur } \partial B_1, \end{cases} \tag{3}$$

où $\mu \in \mathcal{M}(B_1)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante et continue avec $g(t) = 0, \forall t \leq 0$.

Étant donnée g, l'équation (3) n'admet pas nécessairement de solution pour toute mesure μ. La mesure μ est dite bonne (relative à g) si (3) admet une solution. Dans [12], nous introduisons le concept de mesure réduite μ^*, donnée par

$$\mu^* = -\Delta u^* + g(u^*), \tag{4}$$

où u^* est la plus grande sous-solution de (3). La mesure réduite a plusieurs propriétés remarquables. Nous avons démontré par exemple que

Théorème 3 *μ^* est la plus grande bonne mesure $\leq \mu$.*

Théorème 4 *La mesure $\mu - \mu^*$ est concentrée sur un ensemble de capacité nulle.*

Le concept de mesure réduite est un outil très efficace dans la caractérisation de l'ensemble des bonnes mesures associées à (3). En effet, en collaboration avec D. Bartolucci, F. Leoni et L. Orsina [2] j'ai montré que

Théorème 5 *Si $N \geq 3$ et $g(t) = \mathrm{e}^t - 1$, alors* (3) *a une solution pour toute mesure $\mu \leq 4\pi\mathcal{H}^{N-2}$*

La caractérisation des bonnes mesures pour l'exponentielle en dimension $N = 2$ avait été obtenue par Vázquez [23].

1.3. Solutions topologiques de l'équation de Chern-Simons

Après un changement de variables, l'équation autoadjointe de Chern-Simons devient

$$\begin{cases} -\Delta u + \mathrm{e}^v(\mathrm{e}^u - 1) = \mu & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ -\Delta v + \mathrm{e}^u(\mathrm{e}^v - 1) = \nu & \text{dans } \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{5}$$

où μ et ν sont des mesures dans $\mathbb{R}^2$.

Nous avons récemment étudié avec C.-S. Lin et Y. Yang [18] le problème d'existence de solutions topologiques du système (5) (i.e. telles que $u, v \to 0$ à l'infini) :

Théorème 6 *Soient μ et ν deux mesures positives finies dans $\mathbb{R}^2$. Alors* (5) *admet une solution $u, v \in L^1(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si*

$$\mu(\{x\}) + \nu(\{x\}) \leq 4\pi \quad \forall x \in \mathbb{R}^2. \tag{6}$$

2. Singularités isolées d'équations non monotones

En collaboration avec M.-F. Bidaut-Véron et L. Véron [6], nous avons étudié le problème de singularité isolée pour l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u = u^q & \text{dans } B_1^+, \\ u = 0 & \text{sur } \partial B_1^+ \setminus \{0\}, \\ u > 0 & \text{dans } B_1^+. \end{cases} \tag{7}$$

où B_1^+ désigne la moitié supérieure de la boule unité dans $\mathbb{R}^N$. Plus précisément, u est une fonction continue sur $\overline{B_1^+} \setminus \{0\}$ qui vérifie l'équation (7). Le comportement des solutions de (7) au voisinage de 0 n'était pas connu lorsque $q \geq \frac{N+1}{N-1}$:

Nous avons montré par exemple le

Théorème 7 *Si $\frac{N+1}{N-1} < q < \frac{N+1}{N-3}$ et $q \neq \frac{N+2}{N-2}$ alors ou bien u est continue en 0, ou bien*

$$u(r, \sigma) \sim r^{-2/(q-1)}\omega_0(\sigma) \quad \textit{lorsque } r \to 0. \tag{8}$$

3. Espaces de Sobolev entre variétés

3.1. Densité dans $W^{2,p}(M;N)$

Étant données deux variétés riemanniennes compactes sans bord $M, N \subset \mathbb{R}^d$, on définit l'espace de Sobolev

$$W^{2,p}(M;N) = \{u \in W^{2,p}(M;\mathbb{R}^d);\ u(x) \in N \text{ p.p.}\}.$$

Les applications $\varphi : M \to N$ de classe C^∞ ne sont pas nécessairement denses dans $W^{2,p}(M;N)$ par rapport à la topologie forte. Le problème de densité des fonctions lisses dans $W^{1,p}(M,N)$ a été résolu par Bethuel [3] et complété par Hang-Lin [17]. La preuve pour $W^{1,p}$ nécessite des arguments de *recollement* qui ne se généralisent pas aisément au cas $W^{2,p}$.

En collaboration avec P. Bousquet et J. Van Schaftingen, nous avons développé des nouveaux outils qui permettent désormais d'étudier la densité forte dans $W^{2,p}(M;N)$. Dans [9], nous avons démontré le

Théorème 8 *Soit $m-1 \le 2p < m$ avec $m = \dim M$. Alors $C^\infty(M,N)$ est dense dans $W^{2,p}(M,N)$ si et seulement si le groupe d'homotopie $\pi_{m-1}(N)$ est trivial.*

Prenons par exemple $M = S^m$ et $N = S^{m-1}$. Comme $\pi_{m-1}(S^{m-1}) = \mathbb{Z}$, on déduit du Théorème 8 que si $m-1 < 2p < m$ alors $C^\infty(S^m;S^{m-1})$ n'est pas dense dans $W^{2,p}(S^m, S^{m-1})$. On peut se demander quels sont les éléments de cet espace qui peuvent être approchés par des applications lisses. La réponse est donnée en fonction du jacobien distributionnel $\mathrm{Det}\,(\nabla u)$ introduit par Brezis-Coron-Lieb [11] :

Théorème 9 *Soit $u \in W^{2,p}(S^m, S^{m-1})$ avec $m-1 \le 2p < m$. Il existe une suite dans $C^\infty(S^m, S^{m-1})$ convergeant fortement vers u dans $W^{2,p}$ si et seulement si $\mathrm{Det}\,(\nabla u) = 0$ dans $\mathcal{D}'(S^m)$.*

Dans un article en préparation [10], on s'intéresse au problème de densité de $C^\infty(M;N)$ dans $W^{2,p}(M;N)$ par rapport à la distance $W^{2,p}$ pour tout $p \ge 1$.

3.2. Énergie relaxée des applications dans $W^{1,1}(S^2;S^1)$

Dans [8], Bourgain-Brezis-Mironescu ont considéré le problème de minimisation suivant :

$$\underset{u\in H^1_g(B^3;S^1)}{\mathrm{Min}} \int_{B^3} |\nabla u|^2, \tag{9}$$

avec $g \in H^{1/2}(S^2;S^1)$. Ils ont étudié le comportement des minimiseurs u_ε de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau associée lorsque $\varepsilon \downarrow 0$.

Je rappelle que $W^{1,1}(S^2;S^1)$ n'est pas inclus dans $H^{1/2}(S^2;S^1)$. Ces deux espaces ont néanmoins plusieurs propriétés en commun. On rappelle que toute application g dans $W^{1,1}(S^2;S^1)$ admet un déterminant jacobien $\mathrm{Det}\,(\nabla g)$ qui s'écrit sous la forme

$$\mathrm{Det}\,(\nabla g) = \pi \sum_{j=1}^{\infty} (\delta_{p_j} - \delta_{n_j}) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(S^2),$$

avec des points $p_j, n_j \in S^2$ tels que $\sum_j d(p_j, n_j) < \infty$.

J'ai étudié plusieurs propriétés de g dans un article en collaboration avec H. Brezis et P. Mironescu [13]. Nous avons démontré le

Théorème 10

$$\operatorname*{Min}_{\substack{\varphi\in BV(S^2;\mathbb{R})\\ g=e^{i\varphi}\ sur\ S^2}} \int_{S^2} |D\varphi| = \int_{S^2} |\nabla g| + 2\pi L(g), \tag{10}$$

où $L(g)$ désigne la longueur de la connexion minimale entre les singularités positives et négatives de g.

Le membre de gauche de (10) coïncide avec l'énergie relaxée de g :

$$E_{\mathrm{rel}}(g) = \mathrm{Inf}\left\{ \liminf_{n\to\infty} \int_{S^2} |\nabla g_n| \ ;\ g_n \in C^\infty(S^2;S^1) \text{ et } g_n \to g \text{ p.p.} \right\}.$$

Cette notion joue un rôle très important dans le cadre des courants cartésiens (voir [16]).

3.3. Les distributions de la forme $\sum_j (\delta_{p_j} - \delta_{n_j})$

Les résultats précédents mettent en lumière l'intérêt d'étudier les distributions de la forme

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} (\delta_{p_j} - \delta_{n_j}) \quad \text{dans } \big[\,\mathrm{Lip}\,(X)\big]^*, \tag{11}$$

où X est un espace métrique complet et $\sum_j d(p_j, n_j) < \infty$. La longueur de la connexion minimale de T est définie comme

$$L = \operatorname*{Sup}_{|\zeta|_{\mathrm{Lip}}\le 1} \langle T, \zeta\rangle. \tag{12}$$

Bourgain-Brezis-Mironescu [8] avaient montré que L admet la caractérisation duale :

$$L = \operatorname*{Inf}_{\substack{(\tilde p_j)\\(\tilde n_j)}} \left\{ \sum_j d(\tilde p_j, \tilde n_j)\ ;\ T = \sum_j (\delta_{\tilde p_j} - \delta_{\tilde n_j}) \text{ dans } \big[\,\mathrm{Lip}\,(X)\big]^* \right\}. \tag{13}$$

Alors que le supremum dans (12) est toujours atteint, j'ai montré que ceci n'est pas toujours le cas pour l'infimum dans (13). J'ai établi par contre le

Théorème 11 *Si $\mathcal{H}^1(\operatorname{supp} T) = 0$, alors ils existent deux suites $(\tilde p_j), (\tilde n_j) \subset X$ telles que*

$$T = \sum_j (\delta_{\tilde p_j} - \delta_{\tilde n_j}) \quad et \quad L = \sum_j d(\tilde p_j, \tilde n_j).$$

Une question naturelle est de savoir sous quelles conditions la distribution T est une mesure. Dans [20], j'ai donné la réponse à ce problème :

Théorème 12 *T est une mesure si et seulement si T s'écrit comme une somme finie de dipôles.*

Ce théorème avait été établi par Smets [22] sous l'hypothèse supplémentaire que X soit localement compact. Les Théorèmes 11 et 12 ci-dessus sont une conséquence de l'existence d'une représentation irréductible de T, une notion que j'ai introduite dans [20].

4. Propriétés des espaces de Sobolev

4.1. Une nouvelle caractérisation de $W^{1,p}$

Bourgain-Brezis-Mironescu [7] ont démontré que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_1}\int_{B_1} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^p}\rho_n(x-y)\,dx\,dy = K_{p,N}\int_{B_1}|\nabla f|^p \quad \forall f\in W^{1,p}(B_1), \tag{14}$$

où $(\rho_n)\subset L^1(\mathbb{R}^N)$ est une suite de fonctions radiales positives qui converge vers la masse de Dirac δ_0, et $K_{p,N}$ est une constante géométrique qui dépend seulement de p et de la dimension N de l'espace.

Motivé par ce résultat, j'ai établi dans [19] le

Théorème 13 *Si $N\geq 2$, ils existent $n_0\geq 1$ et $C>0$ tels que*

$$\int_{B_1}|f-f_{B_1}|^p \leq C\int_{B_1}\int_{B_1}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^p}\rho_n(x-y)\,dx\,dy \quad \forall f\in L^p(B_1), \quad \forall n\geq n_0. \tag{15}$$

Cette estimation peut être déduite pour tout $N\geq 1$ d'un théorème de compacité dans [7], sous l'hypothèse que les fonctions ρ_n sont radiales *décroissantes*. J'ai montré que l'inégalité (15) reste vraie sans cette dernière condition. Ce résultat est assez inattendu, car dans [7] les auteurs avaient construit un contre-exemple en dimension $N=1$ pour des fonctions ρ_n qui ne sont pas décroissantes. En passant à la limite dans (15) lorsque n tend vers ∞, nous retrouvons l'inégalité de Poincaré classique.

4.2. Continuité des fonctions avec $N^{\text{ème}}$ dérivée mesure

D'après le théorème d'immersion de Sobolev

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^N)\subset L^q(\mathbb{R}^N) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{k}{N},$$

pour tout entier $k\geq 1$ et tout $1\leq p<\infty$ tels que $kp<N$. Dans le cas critique $kp=N$, les fonctions dans $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ ne sont pas nécessairement bornées sauf lorsque $k=N$ et $p=1$. En effet, on démontre assez facilement que

$$\|u\|_{L^\infty}\leq \int_{\mathbb{R}^N}|\partial_1\cdots\partial_N u|; \tag{16}$$

donc,

$$W^{N,1}(\mathbb{R}^N)\subset C^0(\mathbb{R}^N).$$

Si $u\in W^{N-1,1}(\mathbb{R}^N)$ et $D^N u$ est supposé être seulement une mesure finie, l'estimation (16) reste encore vraie ; on en déduit que $u\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. En revanche, u n'est pas nécessairement continu en dimension $N=1$. En collaboration avec J. Van Schaftingen [21], nous avons démontré le

Théorème 14 *Soit $N\geq 2$. Si $u\in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ et si $\partial_1\cdots\partial_N u$ est une mesure finie, alors u est une fonction continue dans $\mathbb{R}^N$.*

Ceci répond affirmativement à une question posée par A. Cohen.

Références

[1] A. Ancona, *Une propriété d'invariance des ensembles absorbants par perturbation d'un opérateur elliptique*. Comm. Partial Differential Equations **4** (1979), 321–337.

[2] D. Bartolucci, F. Leoni, L. Orsina et A. Ponce, *Semilinear equations with exponential nonlinearity and measure data*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **22** (2005), 799–815.

[3] F. Bethuel, *The approximation problem for Sobolev maps between two manifolds*. Acta Math. **167** (1991), 153–206.

[4] F. Bethuel, H. Brezis et J.-M. Coron, *Relaxed energies for harmonic maps*. In : Variational methods (Paris, 1988), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 4, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 37–52.

[5] F. Bethuel et X. M. Zheng, *Density of smooth functions between two manifolds in Sobolev spaces*. J. Funct. Anal. **80** (1988), 60–75.

[6] M.-F. Bidaut-Véron, A. Ponce et L. Véron, *Boundary singularities of positive solutions of some nonlinear elliptic equations*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **344** (2007), 83–88.

[7] J. Bourgain, H. Brezis et P. Mironescu, *Another look at Sobolev spaces*. In : Optimal Control and Partial Differential Equations (J. L. Menaldi, E. Rofman, and A. Sulem, eds.), IOS Press, 2001, pp. 439–455. A volume in honour of A. Benssoussan's 60th birthday.

[8] J. Bourgain, H. Brezis et P. Mironescu, *$H^{1/2}$ maps with values into the circle : minimal connections, lifting, and the Ginzburg-Landau equation*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **99** (2004), 1–115.

[9] P. Bousquet, A. Ponce et J. Van Schaftingen, *A case of density in $W^{2,p}(M;N)$*. À paraître dans C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.

[10] P. Bousquet, A. Ponce et J. Van Schaftingen, *Strong density in $W^{2,p}(M;N)$*. En préparation.

[11] H. Brezis, J.-M. Coron et E. H. Lieb, *Harmonic maps with defects*. Comm. Math. Phys. **107** (1986), 649–705.

[12] H. Brezis, M. Marcus et A. Ponce, *Nonlinear elliptic equations with measures revisited*. In : Mathematical Aspects of Nonlinear Dispersive Equations (J. Bourgain, C. Kenig, and S. Klainerman, eds.), Annals of Mathematics Studies, 163, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007, pp. 55–110.

[13] H. Brezis, P. Mironescu et A. Ponce, *$W^{1,1}$-maps with values into S^1*. In : Geometric analysis of PDE and several complex variables, Contemp. Math., 368, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 69–100.

[14] H. Brezis et A. Ponce, *Remarks on the strong maximum principle*. Differential Integral Equations **16** (2003), 1–12.

[15] L. Dupaigne et A. Ponce, *Singularities of positive supersolutions in elliptic PDEs*. Selecta Math. (N.S.) **10** (2004), 341–358.

[16] M. Giaquinta, G. Modica et J. Souček, Cartesian currents in the calculus of variations I et II. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[17] F. Hang et F.-H. Lin, *Topology of Sobolev mappings. II*. Acta Math. **191** (2003), 55–107.

[18] C.-S. Lin, A. Ponce et Y. Yang, *A system of elliptic equations arising in Chern-Simons field theory*. J. Funct. Anal. **247** (2007), 289–350.

[19] A. Ponce, *An estimate in the spirit of Poincaré's inequality*. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **6** (2004), 1–15.

[20] A. Ponce, *On the distributions of the form* $\sum_i(\delta_{p_i} - \delta_{n_i})$. J. Funct. Anal. **210** (2004), 391–435.

[21] A. Ponce et J. Van Schaftingen, *The continuity of functions with Nth derivative measure*. Houston J. Math. **33** (2007), 927–939.

[22] D. Smets, *On some infinite sums of integer valued Dirac's masses*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **334** (2002), 371–374.

[23] J. L. Vázquez, *On a semilinear equation in* $\mathbb{R}^2$ *involving bounded measures*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **95** (1983), 181–202.