MAT 1111

Mathématiques générales (1^{re} partie)

M. Cherpion, C. Debiève, P. Habets, J. Van Schaftingen et E. Vitale

Table des matières

Chapitre 1

Les fonctions

1 Les nombres réels

Les nombres réels apparaissent dans la mesure des longueurs. Tout d'abord, les rationnels, encore appelés les fractions, permettent de situer convenablement un point X sur une droite. On a dû ensuite introduire d'autres nombres comme par exemple $\sqrt{2}$ pour pouvoir définir le rapport de la longueur de la diagonale d'un carré à celle de son côté. Le nombre π sera nécessaire pour calculer le rapport entre longueur du cercle et diamètre. Les mathématiciens se sont ainsi trouvés confrontés à un ensemble de nombres imposés par les applications. Ils ont alors été amenés à l'augmenter de façon à le munir d'une structure suffisamment riche pour servir de base à une étude rationnelle. Cet ensemble "augmenté" est l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels dont nous rappelons ci-dessous la structure.

1.1 Addition et multiplication

L'ensemble $\mathbb{R}$ est doté de deux lois, l'addition "+" et la multiplication "." qui le munissent d'une structure de *corps commutatif*. Cela signifie que les propriétes suivantes sont satisfaites.

- *Associativité.* Pour tout x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3,$$
$$x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3.$$

Lorsque l'on écrit par exemple $x_1 + x_2 + x_3$, la notation est a priori ambigüe car on ne sait pas si elle signifie $x_1 + (x_2 + x_3)$ ou $(x_1 + x_2) + x_3$. Mais pour une loi associative, cette ambiguïté n'a pas d'importance car, dans les deux cas, le résultat est le même.

- *Éléments neutres.* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x + 0 = 0 + x = x,$$
$$x.1 = 1.x = x.$$

- *Inverses.* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y = y + x = 0$, on note $y = -x$; pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x.y = y.x = 1$, on note $y = 1/x$.

- *Commutativité.* Pour tout x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1,$$
$$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1.$$

- *Distributivité.* Pour tout x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$, on a

$$x_1 \cdot (x_2 + x_3) = (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3),$$
$$(x_1 + x_2) \cdot x_3 = (x_1 \cdot x_3) + (x_2 \cdot x_3).$$

1.2 L'ordre

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation $x \leq y$ qui vérifie les propriétés suivantes.

- *Structure d'ordre.* La relation est *réflexive* : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$;
elle est *transitive* : pour tout x, y et $z \in \mathbb{R}$, $(x \leq y$ et $y \leq z) \Rightarrow x \leq z$;
elle est *antisymétrique* : si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$.
- *L'ordre est total.* Pour tout x et $y \in \mathbb{R}$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.
- *L'ordre est compatible avec l'addition et la multiplication.*
Pour tout x, y et $z \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$;
pour tout x, y, $z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $0 \leq z$ alors $x.z \leq y.z$.

Remarquons que l'on notera indifféremment $x \leq y$ ou $y \geq x$. De même, on utilise les notations $x < y$ pour signifier $x \leq y$ et $x \neq y$ et $x > y$ pour signifier $x \geq y$ et $x \neq y$.

1.3 L'axiome d'Archimède

La propriété suivante est vérifiée par les réels et les rationnels mais ne se déduit pas des structures d'addition, de multiplication et d'ordre.

Axiome d'Archimède *L'ensemble $\mathbb{R}$ est tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier k tel que*

$$k\varepsilon \geq 1.$$

Cet axiome implique que la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ converge vers zéro si x tend vers l'infini (cfr 2-5.1). En effet, pour tout $x \geq k$, on a bien

$$0 < \tfrac{1}{x} \leq \tfrac{1}{k} \leq \varepsilon.$$

1.4 L'axiome de complétude

On peut remarquer que les ensembles des rationnels et des réels possèdent les mêmes propriétés d'addition, de multiplication, d'ordre et vérifient l'axiome d'Archimède. Par contre, les rationnels ne vérifient pas l'axiome de complétude. Pour énoncer ce dernier axiome, introduisons la définition suivante.

Définition Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que $a \in \mathbb{R}$ est un *supremum* de A si :
a est un *majorant* de A, c.-à-d. que $\forall x \in A,\ x \leq a$, et
a est le plus petit des majorants, c.-à-d. que si b est un majorant de A alors $a \leq b$.

Si un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ possède un majorant, on dit qu'il est *majoré.* Ces définitions permettent d'énoncer l'axiome de complétude comme suit.

Axiome de complétude *Toute partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$ *possède un supremum.*

Cet axiome s'exprime de façon intuitive en disant que l'ensemble des réels n'a pas de "trous" par opposition avec l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels. Ainsi, on peut écrire

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2\},$$

tandis que dans $\mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{R} \neq \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 2\}.$$

Ceci met en évidence le "trou" $\sqrt{2}$. Ce point, $\sqrt{2}$, qui manque dans $\mathbb{Q}$, est le supremum de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$. C'est en quelque sorte l'existence de ce supremum qui comble le "trou" entre A et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 2\}$.

1.5 Notations

Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes :
$\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels non nuls ;
$\mathbb{R}^*_+$ est l'ensemble des réels positifs, non nuls ;
$\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des réels positifs ou nuls ;
$\mathbb{R}^*_-$ est l'ensemble des réels négatifs, non nuls ;
$\mathbb{R}_-$ est l'ensemble des réels négatifs ou nuls ;
$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers positifs ou nuls ;
$\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers positifs, non nuls ;
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers positifs, nuls ou négatifs ;
$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels n/m, où $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

1.6 Les intervalles

La majorité des domaines rencontrés en pratique s'écrivent au moyen d'*intervalles* de nombres réels. Si a et b sont des réels tels que $a \leq b$, on définit :
l'*intervalle ouvert :* $]a, b[= \{x : a < x < b\}$,
l'*intervalle fermé :* $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$,
les *intervalles semi-ouvert et semi-fermé :* $[a, b[= \{x : a \leq x < b\}$ et $]a, b] = \{x : a < x \leq b\}$,
les *intervalles non bornés :* $]-\infty, b] = \{x : x \leq b\}$, $]-\infty, b[= \{x : x < b\}$, $[a, +\infty[= \{x : a \leq x\}$, $]a, +\infty[= \{x : a < x\}$ et $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

2 La notion de fonction

2.1 Définitions

Une *fonction* $f : A \subset X \to Y, x \mapsto f(x)$ est une relation qui, à chaque élément de $A \subset X$, associe un et un seul élément de Y. L'ensemble A est le *domaine* de f et se note parfois $\operatorname{dom} f$. L'ensemble

$$B = \{f(x) \mid x \in A\}$$

est *l'image* de f et se note $\operatorname{Im} f$. La fonction f est *définie en a* si a fait partie de son domaine A. L'*image* de x, ou encore la *valeur* de f en x, est notée $f(x)$. Les éléments x de $A \subset X$ pour lesquels $f(x) = y$ sont les *préimages* de y. Pour tout $y \in \operatorname{Im} f$, on définit alors l'ensemble des préimages

$$f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\},$$

qu'on appelle l'*image réciproque* de y.

Question 1.1 (a) Pouvez-vous donner des exemples de fonctions en précisant leurs domaine et image ?
(b) Indiquez des exemples d'images réciproques qui soient réduites à un point, deux points, un intervalle.

2.2 Graphes

Soit une fonction $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. L'ensemble

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

des points (x, y) dont les coordonnées satisfont à l'équation $y = f(x)$ forme le *graphe* de la fonction f. La figure 1, qui représente le graphe d'une fonction, est une source fondamentale d'intuition.

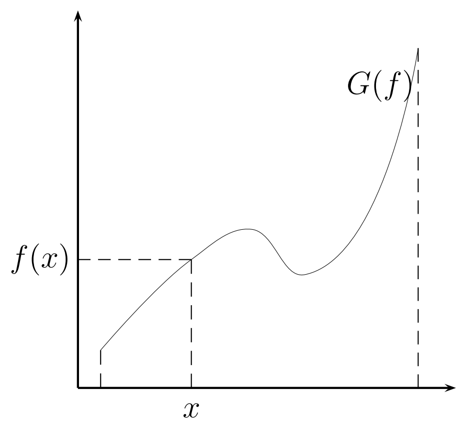


Fig. 1

Question 1.2 Pouvez-vous tracer le graphe des fonctions que vous avez étudiées à la question 1.1 ?

2.3 Fonctions monotones

Une fonction $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *croissante* si pour tout $x \in A$ et tout $y \in A$ tels que $x \leq y$, on a $f(x) \leq f(y)$.

La fonction f est *décroissante* si pour tout $x \in A$ et tout $y \in A$ tels que $x \leq y$, on a $f(x) \geq f(y)$.

Une fonction est dite *monotone* si elle est soit croissante, soit décroissante.

Question 1.3 (a) Donnez des exemples de fonctions monotones en indiquant explicitement le domaine de la fonction considérée.
(b) Dessinez le graphe des fonctions que vous avez considérées ci-dessus.

2.4 Fonctions paires et impaires

Une fonction $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *paire* si pour tout $x \in A$, on a $-x \in A$ et $f(x) = f(-x)$. Elle est *impaire* si pour tout $x \in A$, on a $-x \in A$ et $f(x) = -f(-x)$.

Question 1.4 (a) Donnez des exemples de fonctions paires, impaires et de fonctions qui ne sont ni paires ni impaires en indiquant explicitement le domaine de la fonction considérée.
(b) Dessinez le graphe des fonctions que vous avez considérées ci-dessus et remarquez que le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des y, le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.
(c) Pouvez-vous démontrer les propriétés énoncées à la question (b) ?

Proposition 1.1 *La seule fonction $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et impaire est la fonction identiquement nulle.*

Question 1.5 Pouvez-vous démontrer la proposition ci-dessus ?

Le théorème suivant est un résultat de structure des fonctions. Il établit que toute fonction peut s'exprimer comme combinaison simple de fonctions particulières, ici comme addition de fonctions paires et impaires. Ceci renforce l'intérêt qu'on peut trouver dans l'étude des fonctions paires et impaires.

Théorème 1.2 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ on ait $-x \in A$ et soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors, f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

Question 1.6 Pouvez-vous démontrer le théorème ci-dessus ?

3 Composition de fonctions, fonctions réciproques

3.1 Composition de fonctions

Soit $g : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ et $f\ : B \to \mathbb{R}$ deux fonctions. La *fonction composée* de f et g est la fonction $f \circ g\ : A \to \mathbb{R}$ définie par $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

On peut se représenter cette définition sur la base de la figure 2. Si on considère que "faire" $g(x)$ consiste à suivre la flèche g à partir de x et "faire" $f(y)$ à suivre la flèche f à partir de y alors "faire" la composée $(f \circ g)(x)$ revient à suivre les flèches g puis f à partir de x.

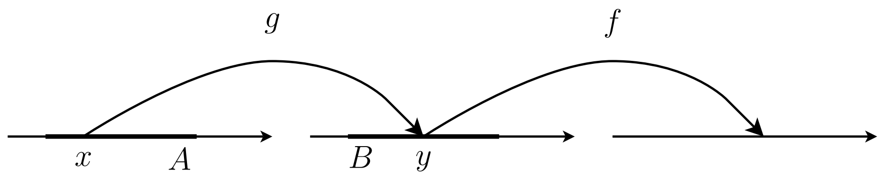


Fig. 2

3.2 Fonctions réciproques

Soit $f : A \subset X \to Y$ une fonction dont l'image est $B = \{y \in Y \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$. S'il existe une fonction $g : B \to A$ telle que

$$\forall x \in A,\ g(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in B,\ f(g(y)) = y,$$

on dit que f est *inversible* et on appelle g la *fonction réciproque* ou *fonction inverse* de f. Cette fonction g est souvent notée f^{-1}.

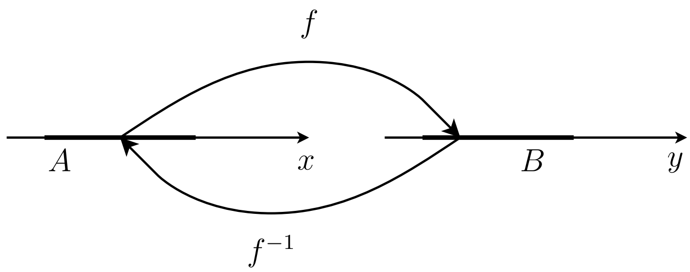


Fig. 3

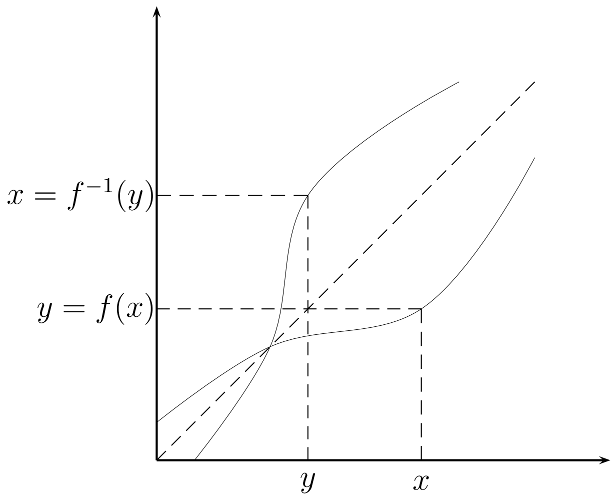


Fig. 4

Question 1.7 (a) Vérifiez que si f est inversible, la fonction réciproque f^{-1} l'est aussi.
(b) Vérifiez que si f est inversible, la fonction réciproque est unique.

On peut interpréter la définition ci-dessus en remarquant qu'une fonction f est inversible si, à chaque élément y de l'image B de f, correspond une et une seule préimage $x \in A$. Alors, la loi qui à y associe son unique préimage x définit la fonction réciproque $f^{-1} : B \subset Y \to A$.

3.3 Fonctions injectives, surjectives, bijectives

L'existence d'une fonction inverse se déduit de deux propriétés fondamentales. On dit qu'une fonction $f : A \subset X \to Y$ est *surjective sur* $B \subset Y$ si tout élément de B est l'image par f d'un élément de A, i.e. $\forall y \in B$, $\exists x \in A$, $\quad f(x) = y$. Une fonction $f : A \subset X \to B$ est *injective* si deux éléments différents de A ont des images différentes, i.e.

$$(\forall x_1 \in A), (\forall x_2 \in A, x_2 \neq x_1), \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

On peut montrer qu'une fonction, qui est la fois injective et surjective, possède un inverse. On dit qu'elle est *inversible* ou *bijective*.

Question 1.8 Que peut-on dire des solutions de l'équation

$$f(x) = y,$$

si la fonction $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est
(a) injective, (b) surjective, (c) bijective ?

Question 1.9 (a) Indiquez des exemples de fonctions inversibles et de fonctions qui ne le sont pas.
(b) Indiquez des fonctions injectives et non surjectives, des fonctions surjectives et non

injectives.
(c) En prenant pour exemple la fonction sinus, expliquez pourquoi une fonction qui n'est pas injective ne peut pas être inversible. N'y a-t-il pas une contradiction avec l'existence de la fonction arcsinus ?
(d) Est-il vrai qu'une fonction est toujours surjective sur son image ?
(e) Remarquez que le graphe de la fonction réciproque de f s'obtient en construisant le symétrique du graphe de f par rapport à la première bissectrice (voir figure 4). Pouvez-vous démontrer cette affirmation ?
(f) Est-il vrai que si on dessine le graphe d'une fonction inversible sur une feuille de papier, on peut voir le graphe de la réciproque en retournant la feuille et en regardant le graphe par transparence ?

4 Fonctions affines et droites

4.1 Définition

On considère le plan cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ formé des couples (x, y) de réels. La *droite*

$$d = \{(x, mx + p) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

de paramètres p et m, est l'ensemble des points (x, y) du plan qui satisfont l'équation

$$y = mx + p.$$

C'est le graphe de la *fonction affine* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = mx + p$.

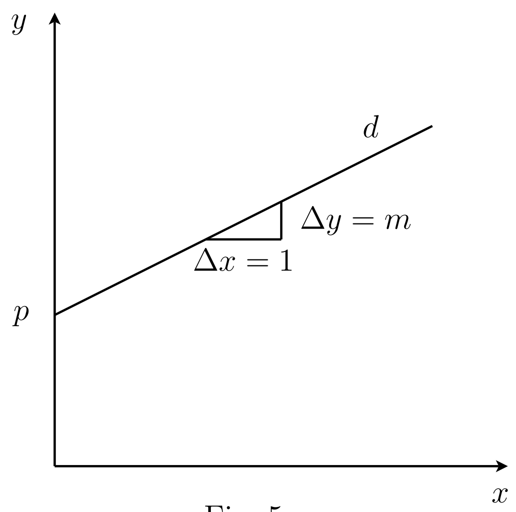


Fig. 5

Le nombre p est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des y. On peut interpréter le nombre m en remarquant que l'accroissement Δy de la variable y résultant d'un accroissement Δx de la variable x est tel que

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = m\Delta x.$$

Dès lors le rapport $\Delta y/\Delta x$ reste constant et égal à m quel que soit le point x et l'accroissement Δx. Ce rapport s'appelle la *pente* ou le *coefficient angulaire* de la droite d d'équation $y = mx + p$. En particulier, si $\Delta x = 1$, on a $\Delta y = m$.

On peut aussi exprimer m au moyen de l'angle ϕ entre la droite d et une droite horizontale. En effet, on peut écrire $\operatorname{tg}\phi = m$.

Remarquons que le plan contient encore les droites d'équation $x = q$ qui ne sont pas le graphe d'une fonction.

Question 1.10 (a) Étudiez les propriétés de monotonie de la fonction $f(x) = mx + p$.
(b) La fonction $f(x) = mx + p$ est-elle linéaire ?
Cette question sous-entend que vous sachiez ce qu'est une fonction linéaire.

4.2 Problèmes

Le lecteur devrait pouvoir résoudre les problèmes qui suivent sans en regarder la réponse. Il doit aussi pouvoir se convaincre, sans calculs, que la réponse donnée est correcte.

Question 1.11 *Déterminez l'équation de la droite passant par deux points donnés* (x_1, y_1) *et* (x_2, y_2).
On vérifie qu'elle s'écrit

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Dans cette expression, peut-on diviser par $x_2 - x_1$?

Question 1.12 *Déterminez l'équation de la droite de pente* m *donnée et passant par un point* (x_0, y_0) *donné.*
L'équation de cette droite s'écrit

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

Question 1.13 *Déterminez l'équation de la droite parallèle à une droite donnée d'équation* $y = mx + p$ *et passant par un point* (x_0, y_0) *donné.*
Cette droite a pour équation

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

Question 1.14 *Déterminez l'équation de la droite perpendiculaire à une droite donnée d'équation* $y = mx + p$ *et passant par un point* (x_0, y_0) *donné.*
Cette droite a pour équation

$$y = y_0 - \frac{1}{m}(x - x_0).$$

5 Valeur absolue et puissance

La fonction *valeur absolue* $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$|x| = x \quad \text{si } x \geq 0 \quad \text{et} \quad |x| = -x \quad \text{si } x < 0.$$

Question 1.15 Tracer le graphe de la fonction $|\cdot|$.

On déduit de cette définition l'équivalence suivante.

Proposition 1.3 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, on a $|x| < \varepsilon$ si et seulement si $-\varepsilon < x < \varepsilon$.*

L'intérêt de la valeur absolue provient des propriétés fondamentales suivantes qui permettent de mesurer l'écart entre deux points x et y par le nombre $|x - y|$.

Proposition 1.4 *(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$.*
(b) $x = 0$ si et seulement si $|x| = 0$.
(c) Pour tout $\alpha \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $|\alpha x| = \alpha|x|$
(d) Pour tout x et $y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Question 1.16 Interprétez les propriétés ci-dessus en montrant que le nombre $|x - y|$ a bien les propriétés que l'on attend de l'écart entre les points x et y.

Question 1.17 Démontrez les Propriétés 1.3 et 1.4 ci-dessus.

Question 1.18 (a) Représentez le graphe de la fonction $f(x) = |x - 1|$.
(b) À partir de ce graphe étudiez l'ensemble des solutions de l'inégalité $|x-1| \geq 1$. Représentez-le sur une droite réelle.
(c) Etudiez l'ensemble des solutions de l'inégalité $|x - 1| \geq 1$ à partir de la définition de valeur absolue et sans utiliser le graphe de la fonction $f(x) = |x - 1|$.

Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on définit les *fonctions puissances*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^n$$

et

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Question 1.19 (a) Que vaut la fonction $f(x) = x^n$ si $n = 0$?
(b) Représentez le graphe des fonctions $f(x) = x^n$ et $g(x) = x^{-n}$ pour divers valeurs de $n \in \mathbb{N}$.
(c) Démontrez analytiquement les propriétés de symétrie des fonctions $f(x) = x^n$ et $g(x) = x^{-n}$.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on peut définir la fonction

$$h : [0, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto h(x) = \sqrt[m]{x}$$

que l'on note aussi $h(x) = x^{1/m}$. Cette notation provient du fait que $(\sqrt[m]{x})^m = x$ et on veut pouvoir écrire

$$(x^{\frac{1}{m}})^m = x^{m\frac{1}{m}},$$

par analogie avec

$$(x^n)^m = x^{mn}.$$

Ensuite pour $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ ($n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^*$), on définit la fonction

$$k :]0, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto k(x) = (\sqrt[m]{x})^n$$

et on note $x^{n/m} = (\sqrt[m]{x})^n$.

Question 1.20 (a) Pourquoi ne définit-on pas les fonctions $h(x) = \sqrt[m]{x}$ et $k(x) = (\sqrt[m]{x})^n$ sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
(b) Y a-t-il des valeurs de $m \in \mathbb{N}$ pour lesquelles on peut définir $h(x) = \sqrt[m]{x}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
(c) Expliquez pourquoi la notation $x^{n/m}$ est utile.

6 Fonctions homographiques

Soit a, b, c et d des nombres réels tel que c soit non nul. On définit alors la *fonction homographique* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

où le domaine de f s'écrit $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -d/c\}$.

Question 1.21 Construisez le graphe de cette fonction en discutant suivant les valeurs des paramètres.
Ce graphe est représenté à la figure 6 si $ad - bc > 0$ et à la figure 7 si $ad - bc < 0$.
Étudiez le cas où $ad - bc = 0$.

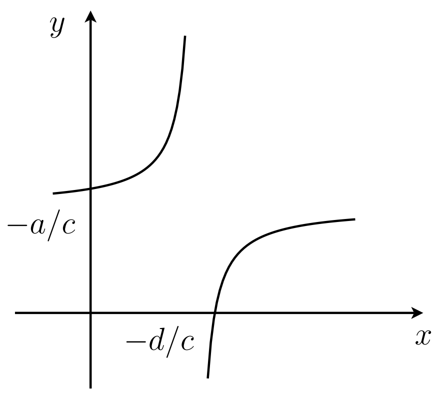


Fig. 6

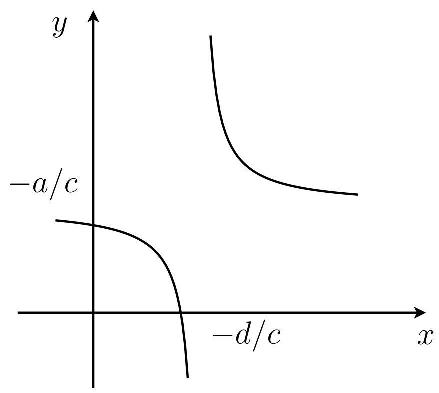


Fig. 7

7 Fonctions circulaires et circulaires réciproques

7.1 Mesure d'un angle

Un *angle* est une partie du plan limitée par deux demi-droites d_1 et d_2 issues d'un même point O, le *sommet* de l'angle. On définit alors la *mesure de l'angle* comme la longueur x de l'arc du cercle unité, centré au point O et intercepté par l'angle.

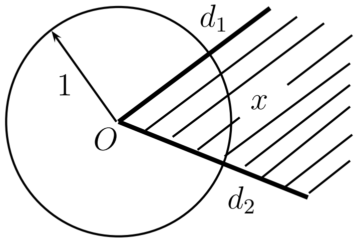


Fig. 8

Cette définition est telle que la mesure de l'angle égal à un demi-plan est π. Il s'agit de la mesure des angles en *radians*.

On utilise souvent une mesure en degrés. Il s'agit en fait d'un changement d'échelles. Le *degré* est la mesure d'un angle dont l'arc, qui intercepte le cercle unité centré au sommet O de l'angle, a une longueur égale à $1/360$ de la longueur 2π de la circonférence du cercle unité.

Question 1.22 Déterminez les formules de passage de degrés en radians et réciproquement.

7.2 Fonctions sinus, cosinus et tangente

Considérons la figure 9 ci-dessous.

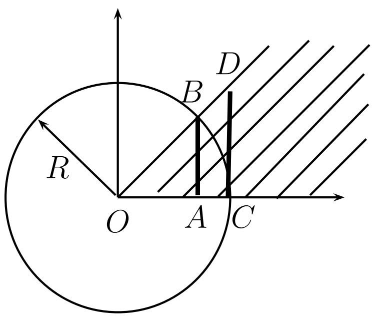


Fig. 9

Si la mesure $x = \text{arc}(BC)/R$ de l'angle hachuré est dans $[0, 2\pi]$, on peut y associer les quotients de longueurs $\sin x = \text{long}(AB)/R$ et $\cos x = \text{long}(OA)/R$, où les longueurs des segments AB et OA sont prises positives s'ils sont dans le sens des axes et négatives sinon. De même, si $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, on définit $\text{tg}\, x = \text{long}(CD)/R$, où la longueur de CD est aussi prise positive dans le sens des axes et négative sinon. On définit ainsi des fonctions

$$\begin{aligned} \sin &: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x, \\ \cos &: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos x, \\ \text{tg} &:]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}, x \mapsto \text{tg}\, x, \end{aligned}$$

qu'on étend par périodicité. Le domaine des fonctions sinus et cosinus est étendu à $\mathbb{R}$ tout entier en posant

$$\sin x = \sin(x + k2\pi) \quad \text{et} \quad \cos x = \cos(x + k2\pi),$$

où $k \in \mathbb{Z}$ est tel que $x + k2\pi \in [0, 2\pi[$. De même, le domaine de la tangente est étendu à $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ en posant

$$\text{tg}\, x = \text{tg}(x + k\pi),$$

où $k \in \mathbb{Z}$ est tel que $x + k\pi \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Question 1.23 Vérifiez que le procédé d'extension du domaine des fonctions sinus, cosinus et tangente correspond bien à l'idée qu'on se fait d'une extension par périodicité.

Les graphes de ces fonctions sont représentés ci-dessous.

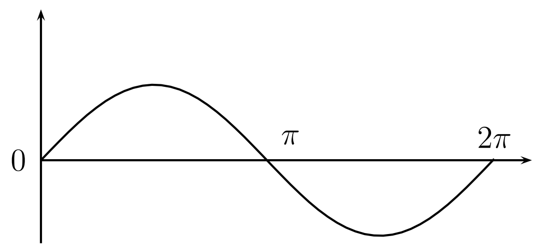


Fig. 10 – Fonction sinus

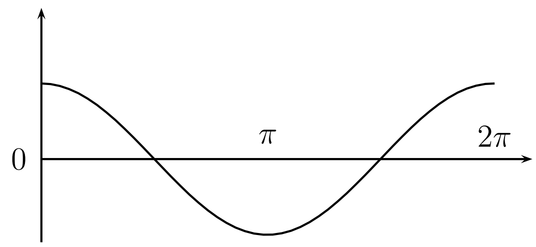


Fig. 11 – Fonction cosinus

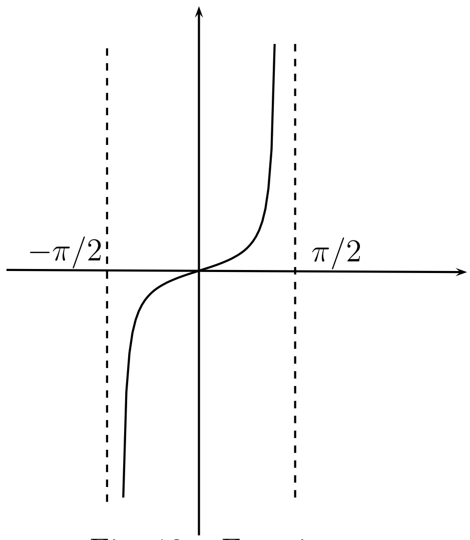


Fig. 12 – Fonction tangente

Question 1.24 (a) Étudiez les propriétés de symétrie des graphes de chacune des fonctions sinus, cosinus et tangente.
(b) Pourquoi ne définit-on pas la fonction tangente en $-\pi/2$ et en $\pi/2$?

Remarque – Les fonctions introduites ci-dessus sont telles que les angles sont mesurés en radians. On utilise souvent des fonctions sinus, cosinus et tangentes où les angles sont mesurés en degrés. A strictement parler, il s'agit de fonctions différentes. Plus précisement, si on considère une seule période de la fonction sinus, nous avons introduit la fonction

$$\sin\ : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}.$$

Par contre, si on avait mesuré les angles en degrés, nous aurions introduit une fonction

$$\text{Sin}\ : [0, 360] \to \mathbb{R}.$$

Nous avons utilisé la notation "Sin" pour différencier cette deuxième fonction sinus de la première. Le fait qu'elles soient définies sur des intervalles différents montre clairement qu'il s'agit de fonctions différentes. Si on réfléchit, on trouvera d'autres évidences qui prouvent que ces fonctions sont différentes. Par exemple, on peut voir que $\sin \pi = 0$ tandis que $\text{Sin}\, \pi > 0$. Il reste que l'on veut penser que les fonctions Sin et sin représentent la même chose. Pour comprendre le lien entre ces deux fonctions il suffit de voir que $\text{Sin}\, x = \sin(\pi x/180)$ ou, ce qui revient au même, $\text{Sin}\, x = \sin y$ pour $y = \pi x/180$. La fonction Sin apparaît ainsi comme la composée de la fonction $\sin y$ et de la fonction $f(x) = \pi x/180$. Le lecteur a probablement déjà rencontré cette difficulté dans l'usage des calculatrices. Elle montre tout le moins qu'il faut être prudent dans l'utilisation des degrés. Dans ce cours, nous parlerons toujours des fonctions sinus, cosinus et tangentes définies en termes de radians.

Remarque – On peut définir les fonctions sinus et cosinus de façon totalement analytique. Par exemple, on peut se baser sur les représentations

$$\sin x = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} + \dots$$

et

$$\cos x = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \dots$$

Une approche de ce type peut être plus satisfaisante que l'approche géométrique. Elle nécessite pourtant une théorie des séries, sommes infinies, et est fort éloignée de l'intuition qu'on peut avoir des fonctions sinus et cosinus. C'est pour cette raison que nous ne l'avons pas suivie.

Fonctions cosécante, sécante et cotangente

Dans des expressions algébriques, on est amené à diviser par des fonctions sinus, cosinus et tangente. Ceci conduit alors à définir les fonctions *cosécante, sécante et cotangente* par les formules

$$\operatorname{coséc} x = \frac{1}{\sin x}, \quad \operatorname{séc} x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cotan} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

Question 1.25 (a) Déterminez le domaine le plus grand possible des fonctions cosécante, sécante et cotangente.
(b) Tracez les graphes de ces fonctions.

7.3 Quelques formules de trigonométrie

Il peut être utile de rappeler les relations fondamentales entre les fonctions circulaires. Ces relations fondent la trigonométrie et permettent de simplifier fortement l'étude des fonctions trigonométriques.

Formulaire $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b,$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b,$$

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b},$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a,$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a,$$

$$\operatorname{tg}(2a) = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a},$$

$$|\sin(a/2)| = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}},$$

$$|\cos(a/2)| = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}},$$

$$|\operatorname{tg}(a/2)| = \sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}; \qquad \operatorname{tg}(a/2) = \frac{1-\cos a}{\sin a} = \frac{\sin a}{1+\cos a}.$$

7.4 Fonctions circulaires réciproques

Si on restreint convenablement le domaine des fonctions circulaires, on peut les rendre inversibles. Il est facile de voir que plusieurs restrictions sont possibles. Pour chacune des fonctions circulaires l'usage a consacré un choix particulier. On définit ainsi les fonctions

$$\begin{gathered}\sin^{-1} : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2],\\ \cos^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi],\\ \operatorname{tg}^{-1} : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[,\end{gathered}$$

qui sont les inverses des fonctions

$$\begin{gathered}\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1], x \mapsto \sin x,\\ \cos : [0,\pi] \to [-1,1], x \mapsto \cos x,\\ \operatorname{tg} :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{tg} x.\end{gathered}$$

Remarquons que l'on utilise aussi les notations $\arcsin x = \sin^{-1} x$, $\arccos x = \cos^{-1} x$ et $\arctan x = \operatorname{tg}^{-1} x$.

Question 1.26 Tracez les graphes des fonctions $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ et $\operatorname{tg}^{-1} x$.

8 Fonctions exponentielles, logarithmes

8.1 Logarithmes

Classiquement, on définit la fonction logarithme comme la primitive (voir chapitre 6) de la fonction

$$1/x :]0, \infty[\to \mathbb{R}$$

qui prend la valeur 0 au point 1 et on la note $\ln x$. On définit ainsi une fonction

$$f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \ln x = \int_1^x \frac{1}{s}\, ds$$

dont le graphe est représenté à la figure 13 ci-dessous.

Cette fonction a les propriétés calculatoires énoncées ci-dessous.

Proposition 1.5 *Pour tout $x > 0$, $y > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, on a*
(a) $\ln xy = \ln x + \ln y$,
(b) $\ln x^a = a \ln x$.

Remarquons que ces propriétés se déduisent facilement des propriétés de l'intégrale.

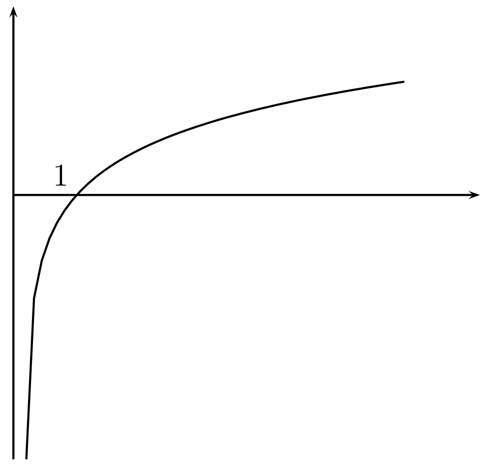


Fig. 13

Le logarithme en base a

Pour $a \in]0,1[$ et $a \in]1,\infty[$, on définit aussi la fonction

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

On dit que a est la *base* du logarithme et que $\log_a x$ est le *logarithme de x en base a*. Ce type de logarithmes se rencontre dans les applications où on utilise le plus souvent le logarithme en base 10 ($a = 10$).

Question 1.27 Faites le graphe des fonctions $\log_a x$ en discutant suivant la valeur de a et en précisant le domaine de ces fonctions.

8.2 Exponentielles

On peut démontrer que la fonction $\ln x$ est inversible et que son image est $\mathbb{R}$ tout entier. On définit alors la fonction *exponentielle*

$$\exp\ : \mathbb{R} \to]0,+\infty[,\ x \mapsto \exp(x),$$

comme l'inverse du logarithme, c'est-à-dire telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(\exp(x)) = x$$

et

$$\forall x \in]0,\infty[, \quad \exp(\ln(x)) = x.$$

Plus généralement, on s'intéresse aux fonctions $f(x) = \exp(ax)$, où $a \in \mathbb{R}$, et dont le graphe est représenté aux figures 14 et 15.

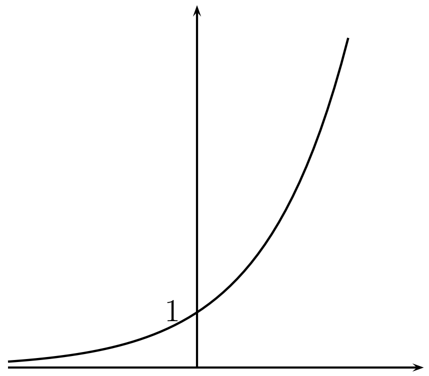


Fig. 14 – cas $a > 0$

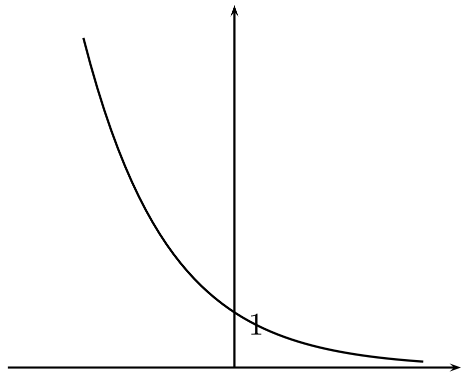


Fig. 15 – cas $a < 0$

L'exponentielle a les propriétés calculatoires suivantes.

Proposition 1.6 *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On a les égalités suivantes :*
(a) $\exp(0) = 1$ *;*
(b) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ *;*
(c) $(\exp(x))^y = \exp(xy)$*.*

Question 1.28 Démontrez la Proposition 1.6 à l'aide de la Proposition 1.5.

On définit maintenant le nombre $e = \exp(1)$ et on peut montrer, à l'aide des propriétés de l'intégrale, que $e < 3$.

Question 1.29 Quelle différence faites-vous entre e^x et *exp*(x) ? Montrez que ces deux nombres sont égaux. Étudiez le cas particulier où $x \in \mathbb{Q}$.

L'exponentielle en base a

Pour $a \in]0, 1[$ et $a \in]1, \infty[$, on a défini le logarithme en base a. On peut voir que cette fonction est inversible. On définit alors l'*exponentielle en base a*

$$\exp_a : \mathbb{R} \to]0, +\infty[, \; x \mapsto \exp_a(x)$$

comme l'inverse du logarithme en base a, c.-à-d. telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \log_a(\exp_a(x)) = x$$

et

$$\forall x \in]0, \infty[, \quad \exp_a(\log_a(x)) = x.$$

Remarquons que, tout comme pour la fonction $\exp(x)$ (Question 1.29), les deux écritures $\exp_a(x)$ et a^x ont un sens différent, mais si l'une et l'autre sont définies, elles représentent le même nombre. Pour cette raison, on les assimilera souvent et on écrira a^x pour $\exp_a(x)$. Nous avons écrit ci-dessous les propriétés fondamentales de l'exponentielle en base a en utilisant les deux types de notations. Le lecteur utilisera l'une ou l'autre suivant ce qui est le plus approprié.

Proposition 1.7 *Soit $a > 0$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On a les égalités suivantes :*

(a) $\exp_a(0) = 1$;	*(a)* $a^0 = 1$;
(b) $\exp_a(x + y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$;	*(b)* $a^{x+y} = a^x a^y$;
(c) $(\exp_a(x))^y = \exp_a(xy)$;	*(c)* $(a^x)^y = a^{xy}$;
(d) $\exp_{ab} x = \exp_a(x)\exp_b(x)$;	*(d)* $(ab)^x = a^x b^x$.

Question 1.30 Cherchez à démontrer les propriétés ci-dessus.

Remarque − Par définition de la fonction $\exp_a(x)$, le nombre $b = \exp_a(1)$ est tel que $1 = \log_a b = \ln b/\ln a$. Et donc $\ln b = \ln a$ ou encore $b = a$.

On peut également voir que si $n \in \mathbb{N}$, $\exp_a(n) = \exp_a(1)\exp_a(n-1) = a \ldots a = a^n$. De même, si $n/m \in \mathbb{Q}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on peut calculer $\exp_a(n) = \exp_a(n/m)^m$. On en déduit $\exp_a(n/m) = \sqrt[m]{\exp_a n} = \sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}$.

Remarquons finalement que si $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$, les propriétés 1.7 ci-dessus restent vraies pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
De même, si $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$, elles restent vraies pour $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Question 1.31 (a) Tracez les graphes des fonctions $f(x) = a^x$ en discutant suivant les valeurs de a.
(b) Tracez les graphes des fonctions $g(x) = x^a$ en discutant suivant les valeurs de a. Remarquez que les fonctions $f(x) = a^x$ et $g(x) = x^a$ sont totalement différentes.

9 Fonctions hyperboliques

On définit les fonctions *sinus hyperbolique*

$$\sinh\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sinh x,$$

cosinus hyperbolique

$$\cosh\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cosh x,$$

et *tangente hyperbolique*

$$\tanh\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \tanh x,$$

par

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Les graphes de ces fonctions sont représentés à la figure 16.

Les fonctions hyperboliques vérifient les propriétés suivantes.

Proposition 1.8 *Pour tout x réel, on a les égalités ci-dessous :*
(a) $\cosh x + \sinh x = e^x$;
(b) $\sinh(-x) = -\sinh x$ *et* $\cosh(-x) = \cosh x$;
(c) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;
(d) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$;
(e) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.

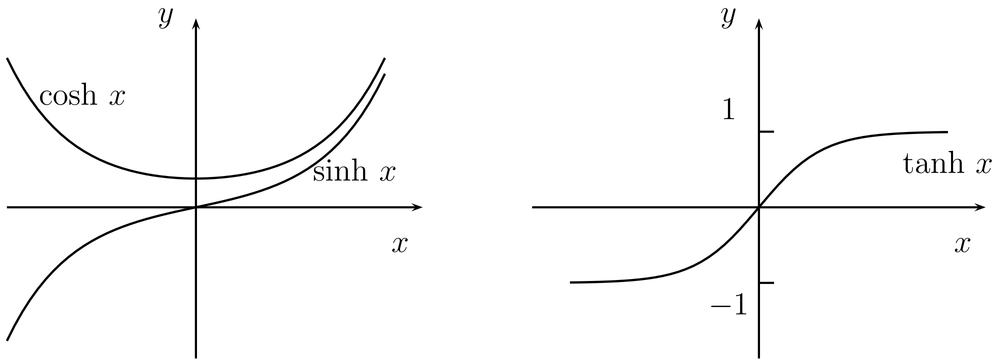


Fig. 16

Question 1.32 Cherchez à démontrer les propriétés ci-dessus.

Remarque – On peut définir les fonctions hyperboliques de façon géométrique en effectuant sur une hyperbole équilatère d'équation $x^2 - y^2 = 1$ une démarche semblable celle que nous avons suivie pour définir sinus et cosinus. Plus précisément, à u, le double de l'aire hachurée OBC, on peut faire correspondre $\cosh u = \text{long}(OA)$ et $\sinh u = \text{long}(AB)$.

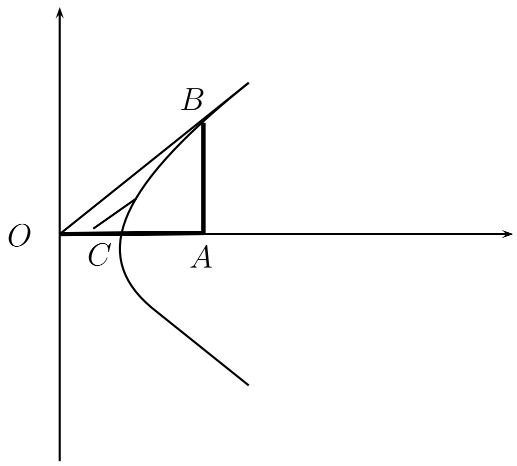


Fig. 17

Chapitre 2

Limite de fonctions

1 Limite en un point a réel

La notion de limite sous-tend les concepts de fonction continue, de dérivée et, dans une large mesure, celui d'intégrale. Elle apparaît donc comme un des outils de base de l'analyse. Fondamentalement, il s'agit d'attribuer une valeur "naturelle" à une fonction en un point où elle n'est pas encore définie. Ainsi l'expression $\frac{x^2-1}{x-1}$ n'est pas définie en $x = 1$. Elle définit donc une fonction f dont le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Si on remarque que, pour tout $x \neq 1$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$, on obtient la valeur "naturelle" $f(1) = 2$. De même, le quotient $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ n'est pas défini en $x = 0$ et on lui attribue la valeur "naturelle" $f(0) = 1$. On pourrait se convaincre que 1 est bien la valeur naturelle à choisir à partir d'un graphe ou d'une suite de valeurs numériques. Le concept de limite cherche à formaliser et à généraliser ce type de résultat. C'est dans ce but que nous introduisons les définitions qui suivent.

Définition Une première étape consiste à décrire les points où on peut appliquer le concept de limite. On dit qu'un point $a \in \mathbb{R}$ est *adhérent* à un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $|x - a| \leq \varepsilon$.

Question 2.1 (a) Le point $a = 0$ est-t-il adhérent à l'ensemble $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$?
(b) Montrez qu'un point a peut être adhérent à un ensemble A et pourtant ne pas y appartenir.

Définition Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à A. La *limite en a d'une fonction f* existe et vaut $L \in \mathbb{R}$ si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une valeur $\delta > 0$ telle que, lorsque $x \in A$ est à une distance inférieure à δ de a, $f(x)$ est à une distance inférieure à ε de L, ce qui s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A \ \text{ on a } \ (|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon). \tag{1.1}$$

Notations On note la limite L d'une fonction f au point a

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Remarquons que cette notation est tout fait équivalente à

$$\lim_{t\to a} f(t) = L, \quad \lim_{y\to a} f(y) = L, \quad \ldots$$

Quelquefois on rappelle le domaine A de la fonction en écrivant

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = L$$

ou

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = L,$$

si on veut marquer que a n'est pas dans le domaine de f.

Remarque Une définition comme celle de limite ne s'*apprend* pas par cœur. Elle se *connaît* par cœur suite à une étude fondée sur l'usage. Il s'agit de chercher des exemples de fonctions ayant une limite en un point a et d'autres n'en ayant pas. Il faut aussi pouvoir interpréter géométriquement la définition sur des dessins. Il faut réfléchir aux implications de la définition, à ses propriétés. Son usage dans les démonstrations est aussi un élément fondamental de l'étude d'un tel concept. Ce travail peut s'amorcer à l'occasion des remarques et questions qui suivent.

Remarque La définition de limite ci-dessus est *locale* en ce sens que l'on peut restreindre le domaine de f à un voisinage de a. Plus précisément, si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et a est un point adhérent à A, on peut définir $\hat{f} : A \cap [a-\eta, a+\eta] \to \mathbb{R}$, où $\eta > 0$, par la condition $\hat{f}(x) = f(x)$. La fonction $\hat{f}$ est la restriction de f au voisinage $[a-\eta, a+\eta]$ de a et on a alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{si et seulement si} \qquad \lim_{x\to a} \hat{f}(x) = L.$$

Remarque On peut aussi écrire la définition de limite de la fonction f au point a comme suit

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ (\forall x \in A, |x-a| \leq \delta) \ \text{ on a } \ |f(x) - L| \leq \varepsilon. \tag{1.2}$$

Cette écriture a l'avantage d'être plus facilement niée que la première.

Question 2.2 (a) Vérifiez que les écritures (1.1) et (1.2) sont bien équivalentes.
(b) Niez formellement chacune des écritures (1.1) et (1.2). Rappelez-vous des règles que l'on utilise pour nier de telles expressions

Question 2.3 (a) Donnez un exemple de fonction f ayant une limite en un point a de son domaine. Vérifiez explicitement la définition.
(b) Donnez un exemple de fonction f n'ayant pas de limite en un point a de son domaine.
(c) Donnez un exemple de fonction f ayant une limite en un point a qui n'est pas dans son domaine. Vérifiez explicitement la définition.
(d) Donnez un exemple de fonction f n'ayant pas de limite en un point a qui soit adhérent à son domaine.

Remarque Une autre remarque concerne la définition alternative de limite qui suit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (\forall x \in A, 0 < |x-a| \leq \delta) \text{ on a } |f(x) - L| \leq \varepsilon. \tag{1.3}$$

Cette définition, dite de *limite pointée*, est souvent adoptée dans l'enseignement secondaire. Bien que la différence avec la nôtre ne tient qu'à un point, le point $x = a$, ces deux définitions ne sont pas équivalentes. Certaines fonctions peuvent avoir une limite pointée sans avoir de limite.

Question 2.4 (a) Trouvez un exemple de fonction ayant une limite pointée en un point a sans y avoir de limite.
(b) Existe-t-il un exemple de fonction ayant une limite au point a sans y avoir de limite pointée ?

Interprétation géométrique On peut interpréter la définition de limite sur la figure 1 ci-dessous.

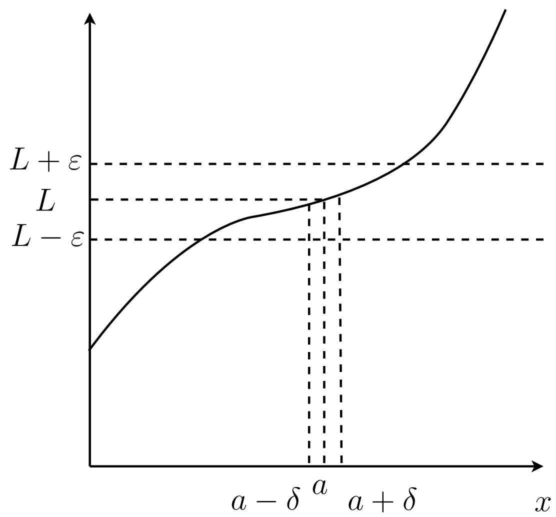


Fig. 1

Cette figure représente le graphe d'une fonction f dont on "voit" que la limite en a est L. En fait, pour toute bande horizontale définie autour de L par les ordonnées $L-\varepsilon$, $L+\varepsilon$, on peut déterminer une bande verticale autour de a par les abscisses $a-\delta$, $a+\delta$, telle que la partie du graphe de f qui se trouve dans la bande $[a-\delta, a+\delta]$ soit entièrement dans la bande $[L-\varepsilon, L+\varepsilon]$. En d'autres mots, on arrive à enfermer le graphe dans une bande horizontale (aussi petite soit-elle) pourvu qu'on ne regarde que la partie du graphe qui se trouve dans une bande verticale suffisamment petite.

Une autre façon de "voir" la définition de limite est représentée à la figure 2. La partie supérieure représente une fonction f ; les points a et L sont marqués. Dans la partie intermédiaire, on s'est choisi un intervalle $[L-\varepsilon, L+\varepsilon]$ que l'on peut penser comme une cible à atteindre. Plus $\varepsilon > 0$ est petit, plus l'objectif est précis. La troisième partie montre la précision à réaliser ; l'intervalle $[a-\delta, a+\delta]$ est tel que tous ses points sont envoyés par f dans la cible $[L-\varepsilon, L+\varepsilon]$.

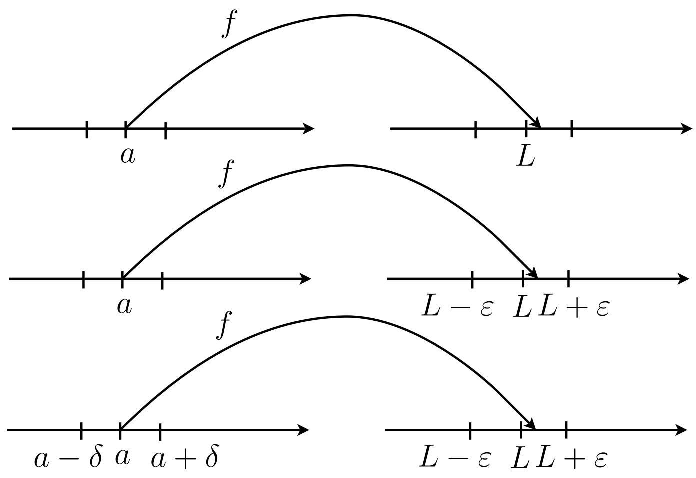


Fig. 2

Il devrait être clair, sur base de ces vues géométriques, que la vérification d'une limite demande d'abord de fixer une valeur de $\varepsilon > 0$, puis d'en déduire une valeur de $\delta > 0$ telle que pour tout $x \in [a-\delta, a+\delta]$ la valeur $f(x)$ vérifie la condition $|f(x) - L| \leq \varepsilon$. Cette démarche a dû apparaître pour vérifier explicitement la définition sur des exemples.

Question 2.5 Soit $a \in A$ et $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que la limite de f au point a existe. Montrez que cette limite est $f(a)$.

Ce résultat montre que la limite est une façon de donner une valeur "naturelle" à la fonction en un point a. Si $a \in A$ et que la limite de f existe, la valeur "naturelle", la limite, est bien $f(a)$. Si la limite en a n'existe pas, on peut se convaincre qu'il n'y a pas de valeur "naturelle" de f en a. Par contre, si a est adhérent A et que sa limite existe, on peut aussi se persuader, par exemple sur base de la question suivante, que cette limite est une bonne définition de valeur de f en a.

Question 2.6 Étudiez les limites en a des fonctions suivantes :
(a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $a = 1$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, $a = \pi/2$; (c) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $a = 0$.

2 Propriétés des limites

2.1 Unicité de la limite

Proposition 2.1 *Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à A. Si f a une limite au point a, cette limite est unique.*

Remarquez que l'unicité de la limite n'est pas une propriété évidente. On peut définir des concepts de "limite faible" très semblables au concept de limite mais qui n'ont pas cette propriété d'unicité.

Question 2.7 Démontrez la proposition ci-dessus.

2.2 Propriétés algébriques des limites

Proposition 2.2 *Soit deux fonctions f et $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à A.*

(a) Si les limites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent, alors la limite $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ existe et

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x);$$

(b) Si les limites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent, alors la limite $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))$ existe et

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x);$$

(c) Si la limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et est différente de zéro, alors la limite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$ existe et

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}.$$

Question 2.8 (a) Pouvez-vous donner des exemples d'application des Propositions 2.2 ? (b) Pouvez-vous démontrer ces propositions ?

2.3 Propriétés liées à l'ordre

Proposition 2.3 *Soit deux fonctions f et $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à A. Supposons que pour tout $x \in A$, $f(x) \leq g(x)$. Si de plus les limites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent, alors*

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

Question 2.9 Pouvez-vous démontrer la proposition ci-dessus ?

2.4 Limite de fonctions composées

Proposition 2.4 *Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$, a un point adhérent à A, b un point adhérent à B et $L \in \mathbb{R}$. Si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to b} g(x) = L$$

alors la limite en a de $g \circ f$ existe et

$$\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = L.$$

La démonstration de cette proposition peut se construire à partir de la figure 3 ci-dessous qui prolonge l'intuition liée à la figure 2.

La partie supérieure représente la composée $g \circ f$ des fonctions g et f ; les points a, b et L sont marqués de même que la cible $[L-\varepsilon, L+\varepsilon]$ à atteindre. Il est important de réaliser que celle-ci est fixée a priori de façon totalement arbitraire.

Dans la partie intermédiaire, on s'est choisi un intervalle $[b-\eta, b+\eta]$, la précision à réaliser au moyen de g, tel que tous les points de cet intervalle $[b-\eta, b+\eta]$ soient envoyés par g dans la cible $[L-\varepsilon, L+\varepsilon]$.

La troisième partie met en oeuvre l'idée de base de la démonstration. Comme on veut que $g(f(x))$ appartienne à la cible $[L-\varepsilon, L+\varepsilon]$, et qu'on sait que $g(y)$ appartient à cette cible si $y \in [b-\eta, b+\eta]$, il suffit que $f(x)$ appartienne à $[b-\eta, b+\eta]$ pour obtenir le résultat souhaité. La partie inférieure montre la précision à réaliser sur f, l'intervalle $[a-\delta, a+\delta]$, tel que tous ces points soient envoyés par f dans l'intervalle $[b-\eta, b+\eta]$.

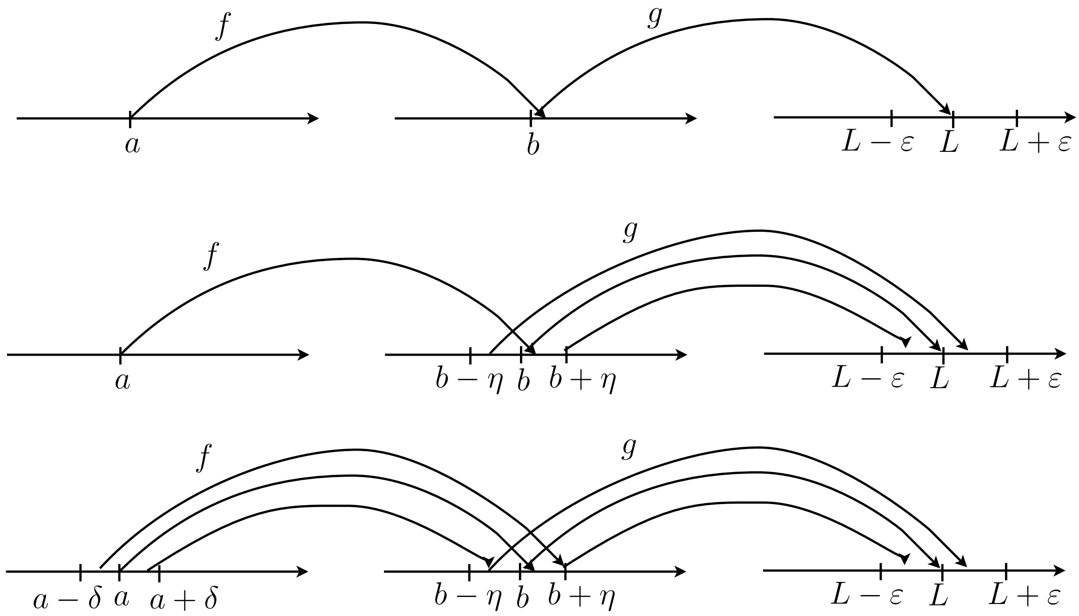


Fig. 3

Maintenant, nous pouvons écrire une démonstration qui explicite l'idée ci-dessus.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ fixé.
Puisque la limite de g existe en b et vaut L, nous pouvons déterminer $\eta > 0$ tel que

$$\forall y \in B \quad \text{on a} \quad |y-b| \leq \eta \Rightarrow |g(y)-L| \leq \varepsilon.$$

Remarquons maintenant que $\eta > 0$ est fixé. Dès lors, et puisque la limite de f existe en a et vaut b, nous pouvons déterminer $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in A \quad \text{on a} \quad |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-b| \leq \eta.$$

En conclusion, nous avons déterminé $\delta > 0$ tel que pour tout point x de A, si $|x-a| \leq \delta$, alors $y = f(x)$ est tel que $|y-b| = |f(x)-b| \leq \eta$ et donc $|g(y)-L| = |g(f(x))-L| \leq \varepsilon$. ■

Question 2.10 La Proposition 2.4 est fausse si au lieu de la définition de limite (1.1), on utilise la définition de limite pointée (1.3).
(a) Cherchez un exemple de fonctions f et g ayant des limites pointées en a et b et dont pourtant la composée $g \circ f$ n'a pas de limite pointée ou, si vous préférez, a une limite pointée différente de la limite pointée de g en b.
(b) Cherchez dans la démonstration ci-dessus la faute que l'on commet si on utilise des limites pointées.

3 Calcul des limites

3.1 Non-existence de limites

Avant tout calcul de limite, il faudrait pouvoir s'assurer que la limite existe, et donc que son calcul a un sens. Un tel résultat est souvent difficile à obtenir. Parfois, on peut montrer un résultat négatif et établir que la limite n'existe pas. Un outil fort utile dans ce but est le théorème suivant.

Théorème 2.5 *Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $B \subset A$ et a un point adhérent à B. Considérons la restriction $\hat{f} : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de f à B, définie par $\hat{f}(x) = f(x)$. Si f possède une limite en a alors $\hat{f}$ possède aussi une limite en a et*

$$\lim_{x \to a} \hat{f}(x) = \lim_{x \to a} f(x).$$

Notation On note souvent la thèse du théorème ci-dessus

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x).$$

Application : non existence de limites. Soit une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à A. Supposons qu'il existe deux ensembles $B_1 \subset A$ et $B_2 \subset A$ tels que a soit adhérent à B_1 et à B_2. Si de plus

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in B_1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x \in B_2}} f(x),$$

on déduit du Théorème 2.5 que la limite de f au point a n'existe pas.

Par exemple, la fonction $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite lorsque x tend vers zéro. Il suffit de prendre les ensembles $B_1 = \{\frac{2}{(4k-1)\pi} \mid k \in \mathbb{N}, k \neq 0\}$ et $B_2 = \{\frac{2}{(4k+1)\pi} \mid k \in \mathbb{N}, k \neq 0\}$, de vérifier que 0 adhère à B_1 et B_2, et que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in B_1}} f(x) = -1 \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x \in B_2}} f(x) = 1.$$

Question 2.11 Écrivez des exercices d'application de cette méthode pour établir qu'une limite n'existe pas.

Limites à droite et à gauche. Un cas particulier important concerne les limites à droite et à gauche d'une fonction. Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à A. Si la restriction $f_d : A \cap [a, \infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_d(x) = f(x)$ de la fonction f à $A \cap [a, \infty[$ possède une limite L en a, on dit que L est la *limite à droite de f en a* et on écrit

$$\lim_{x \to a} f_d(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \geq a}} f(x) = L.$$

De même, si la restriction $f_g : A \cap]-\infty, a] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_g(x) = f(x)$ de la fonction f à $A \cap]-\infty, a]$ possède une limite L en a, on dit que L est la *limite à gauche de f en a* et on écrit

$$\lim_{x \to a} f_g(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \leq a}} f(x) = L.$$

Le résultat suivant est un corollaire du Théorème 2.5. Dans la majorité des cas, il suffit pour décider qu'une fonction n'a pas de limite.

Théorème 2.6 *Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à $A \cap]-\infty, a]$ et à $A \cap [a, \infty[$. Si f possède une limite en a alors elle y possède une limite à droite et une limite à gauche qui sont toutes deux égales à la limite en a de f.*

Question 2.12 (a) Déduisez du Théorème 2.6 que la fonction $f(x) = -1$ si $x < 0$, $f(x) = 1$ si $x > 0$ n'a pas de limite en $a = 0$.
(b) Définissez les limites pointées

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x).$$

(c) Trouvez un exemple tel qu'au point a, les limites pointées existent à gauche et à droite, sont égales, et tel que pourtant la limite au point a n'existe pas.

3.2 Conditions suffisantes d'existence de limites

L'existence d'une limite peut s'étudier sur base du théorème suivant.

Théorème 2.7 *Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à $A \cap]-\infty, a]$ et à $A \cap [a, \infty[$. Si f possède une limite à droite et une limite à gauche en a qui sont toutes deux égales à L, alors f possède une limite en a égale à ce même nombre L.*

Un autre outil utile pour calculer des limites est la condition suffisante suivante.

Théorème 2.8 (Théorème de l'étau) *Soit f, g et $h : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à A. Supposons que pour tout $x \in A$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Si de plus*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

alors g possède une limite en a et

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

Question 2.13 (a) Interprétez le Théorème 2.8 sur base du dessin de la figure 4.
(b) Utilisez ce même théorème pour montrer que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x \sin \tfrac{1}{x} = 0.$$

Particularisez la figure 4 à ce cas.

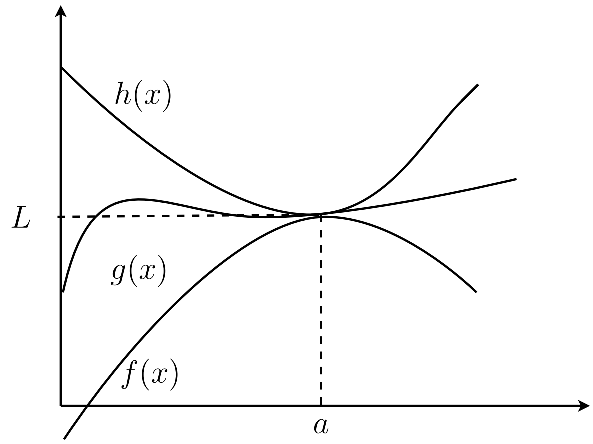


Fig. 4

On calcule parfois des limites sur base de l'idée suivante. On veut calculer la limite en $a = 0$ de la fonction

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0, \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Dans ce but, on considère la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, c.-à-d. la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $\hat{f}(x) = x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$. Il est facile de voir que la limite de $\hat{f}$ en 0 existe et vaut $f(0)$. Le théorème qui suit permet alors d'affirmer que la limite cherchée, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, est la limite de la restriction $\hat{f}$, c.-à-d.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \hat{f}(x) = f(0).$$

Théorème 2.9 *Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et a un point de A. Considérons la fonction $\hat{f}$: $A \setminus \{a\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, restriction de f à $A \setminus \{a\}$. Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ si et seulement si*

$$\lim_{x\to a} \hat{f}(x) = f(a).$$

Notation On note généralement $\lim\limits_{x\to a} \hat{f}(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$.

Question 2.14 Calculez la limite en $a = \pi/2$ de la fonction

$$f(x) = \frac{|\operatorname{tg} x|}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad \text{si } x \in [0, \pi/2[\, \cup\,]\pi/2, \pi], \quad \text{et} \quad f(\pi/2) = 0.$$

Étudiez la limite d'une restriction $\hat{f}$ sur base de la Proposition 2.4.

3.3 Le calcul des limites

Le calcul des limites se base sur les propriétés des limites, qui permettent de se ramener à un ensemble de limites connues. Au départ, on calcule des limites directement à partir de la définition, puis on enrichit l'ensemble des limites connues en utilisant l'une ou l'autre des conditions suffisantes d'existence que nous avons énoncées. En particulier, on peut calculer les limites élémentaires suivantes.

Limites de fonctions élémentaires

$\lim_{x\to a} a_n x^n + \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n a^n + \dots a_2 a^2 + a_1 a + a_0.$

$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a,$ $\lim_{x\to a} \arcsin x = \arcsin a,\ a \in [-1,+1],$

$\lim_{x\to a} \cos x = \cos a,$ $\lim_{x\to a} \arccos x = \arccos a,\ a \in [-1,+1],$

$\lim_{x\to a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a,\ a \neq \pi/2 + k\pi.$ $\lim_{x\to a} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} a,$

$\lim_{x\to a} \exp x = \exp a,$ $\lim_{x\to a} \ln x = \ln a,\ a > 0,$

$\lim_{x\to a} \sinh x = \sinh a,$ $\lim_{x\to a} \cosh x = \cosh a,$ $\lim_{x\to a} \tanh x = \tanh a,$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1,$ $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e.$

4 Limites infinies

Définitions Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à A. Nous dirons que la *limite en a d'une fonction f vaut* $+\infty$ si quel que soit K, il existe une valeur $\delta > 0$ telle que, lorsque $x \in A$ est à une distance inférieure à δ de a, $f(x)$ est supérieur à K. Cette définition s'écrit

$$\forall K \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A \ \text{ on a } \ (|x-a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq K)$$

et se note

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

Nous dirons que la *limite en a d'une fonction f vaut* $-\infty$ si quel que soit K, il existe une valeur $\delta > 0$ telle que, lorsque $x \in A$ est à une distance inférieure à δ de a, $f(x)$ est inférieur à K, ce qui s'écrit

$$\forall K \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A \ \text{ on a } \ (|x-a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq K)$$

et se note

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Si la limite au point a d'une fonction existe ou est $\pm\infty$, nous dirons que la limite de f en a *existe au sens large.*

Ces concepts ont des propriétés semblables aux limites définies à la Section 1. À titre d'exemple, on peut démontrer les propositions suivantes.

Proposition 2.10 *Soit deux fonctions f et $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à A.*

(a) Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et si la limite $\lim_{x\to a} g(x)$ existe ou vaut $+\infty$ alors $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty$;

(b) Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *alors* $\lim_{x\to a}(-f(x)) = -\infty$.
De même, si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ *alors* $\lim_{x\to a}(-f(x)) = +\infty$.
(c) Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *et si la limite* $\lim_{x\to a} g(x)$ *est strictement positive ou égale* $+\infty$ *alors* $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = +\infty$.
(d) Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *alors* $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Le calcul des limites au sens large donne lieu à des *formes indéterminées*. Dans ce cas une application trop rapide des propriétés des limites conduit souvent à des erreurs comme le montrent les questions suivantes.

Question 2.15 (a) Montrez que si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, la limite de $f - g$ en a peut ne pas exister, être un nombre réel, être $+\infty$ ou $-\infty$.
(b) Montrez que si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, la limite de $f.g$ en a peut ne pas exister, être un nombre réel, être $+\infty$ ou $-\infty$.
(c) Montrez que si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, la limite de f/g en a peut ne pas exister, être un nombre réel, être $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème 2.11 (Théorème de l'étau) *Soit* f *et* $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, et* a *un point adhérent à* A*. Supposons que pour tout* $x \in A$*,* $f(x) \leq g(x)$*. Si de plus*

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$

alors

$$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty.$$

Question 2.16 Énoncez un théorème similaire lorsque la limite de f est $-\infty$.

5 Limites à l'infini

5.1 Définitions

Un ensemble A est *non borné supérieurement* si, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $x \in A$ tel que $x \geq M$.

Soit A un ensemble non borné supérieurement et $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La *limite en* $+\infty$ *de* f existe et vaut $L \in \mathbb{R}$ si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une valeur $M \in \mathbb{R}$ telle que, lorsque $x \in A$ est plus grand que M, $f(x)$ est à une distance inférieure à ε de L, ce qui s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A \ \text{ on a } \ (x \geq M \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon)$$

et se note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

La *limite en* $+\infty$ *de* f vaut $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, quel que soit $K \in \mathbb{R}$, il existe une valeur $M \in \mathbb{R}$ telle que, lorsque $x \in A$ est plus grand que M, $f(x)$ est supérieur à K (resp. inférieur à K) ce qui s'écrit

$\forall K \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A$ on a $(x \geq M \Rightarrow f(x) \geq K)$ (resp. $x \geq M \Rightarrow f(x) \leq K$)

et se note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty).$$

De même, un ensemble A est *non borné inférieurement* si, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $x \in A$ tel que $x \leq M$.

Soit A un ensemble non borné inférieurement et $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La *limite en* $-\infty$ *de* f existe et vaut $L \in \mathbb{R}$ si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une valeur $M \in \mathbb{R}$ telle que, lorsque x est plus petit que M, $f(x)$ est à une distance inférieure à ε de L, ce qui s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A \text{ on a } (x \leq M \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon)$$

et se note

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

La *limite en* $-\infty$ *de* f vaut $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, quel que soit $K \in \mathbb{R}$, il existe une valeur $M \in \mathbb{R}$ telle que, lorsque $x \in A$ est plus petit que M, $f(x)$ est supérieur à K (resp. inférieur à K), ce qui s'écrit

$\forall K \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A$ on a $(x \leq M \Rightarrow f(x) \geq K)$ (resp. $x \leq M \Rightarrow f(x) \leq K$)

et se note

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty. \quad (\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty).$$

Question 2.17 Trouvez des exemples qui illustrent les définitions ci-dessus.

Question 2.18 Montrez que l'axiome d'Archimède (1-1.3) est bien équivalent à dire que la limite de la fonction $f(x) = 1/x$ en $x = +\infty$ est 0.

5.2 Propriétés

Les propriétés du calcul des limites de sommes, produits et quotients de fonctions en des points finis restent d'application pour les limites à l'infini.

Question 2.19 Écrivez et démontrez quelques propriétés des limites à l'infini en paraphrasant les propriétés correspondantes des limites au point a.

5.3 Application : Problème des asymptotes.

Soit une courbe $\mathcal{C}$ définie comme le graphe d'une fonction $f\ : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$. On définit l'*asymptote* à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$ comme une droite d d'équation $y = mx + p$ telle que la distance verticale r, de la droite d à la courbe $\mathcal{C}$, au droit du point $(x, 0)$, tende vers zéro lorsque x tend vers l'infini. Si $m = 0$ on parle d'*asymptote horizontale* et si $m \neq 0$ d'*asymptote oblique*.

Question 2.20 (a) Faites une figure qui met en évidence les éléments ci-dessus.
(b) Montrez que la définition ci-dessus s'écrit

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - p) = 0. \tag{5.1}$$

(c) Montrez que les coefficients m et p sont tels que

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad p = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx).$$

(d) Écrivez en détail une théorie semblable pour définir des asymptotes en $-\infty$.

Un autre type d'asymptotes est les asymptotes verticales. Dans ce cas, la courbe $\mathcal{C}$ est définie comme le graphe d'une fonction $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, où a est adhérent à A. On dit alors que la droite d'équation $x = a$ est une *asymptote verticale* si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty.$$

Remarquons que cette définition permet que la limite à droite soit $+\infty$ et que la limite gauche n'existe pas.

Question 2.21 Illustrez cette définition par des figures et des exemples bien choisis.

Chapitre 3

Continuité

1 Définitions

Définitions Une fonction $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *continue en* $a \in A$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Nous dirons qu'une fonction $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *continue* si elle est continue en tout point $a \in A$. Si la restriction de f à $B \subset A$ est continue, on dit que f est *continue sur* B.

Question 3.1 (a) Illustrez ces définitions d'exemples.
(b) La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est-elle continue ?
(c) Existe-t-il des fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues en aucun point, continues en un point seulement ?

2 Propriétés élémentaires

Pour déterminer si une fonction est continue, ou continue en un point, on peut s'aider de propositions qui sont des récritures de propositions semblables sur les limites.

Proposition 3.1 *Soit f et $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $a \in A$. Alors*
(a) la fonction $f + g$ est continue en a ;
(b) la fonction fg est continue en a ;
(c) si de plus $f(a) \neq 0$, la fonction $1/f$ est continue en a.

Proposition 3.2 *Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ et a un point de A. Si les fonctions f et g sont continues respectivement en a et en $b = f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en a.*

Question 3.2 (a) Écrivez des exercices qui illustrent les propriétés ci-dessus.
(b) Démontrez les propriétés ci-dessus.

(c) Montrez que toute fonction affine $f(x) = mx + p$ est continue.
(d) Montrez que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\exists L \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \tag{2.1}$$

est continue. (Une fonction qui vérifie la condition (2.1) est dite lipschitzienne.)
(e) Pouvez-vous généraliser la propriété (d) ci-dessus ?

Question 3.3 Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ une fonction inversible, continue et $a \in A$. Montrez que la fonction réciproque f^{-1} n'est pas nécessairement continue en $b = f(a)$.

3 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues

L'intérêt du concept de fonction continue réside principalement dans les théorèmes ci-dessous. La notion de limite, puis de continuité au point a, apparaissent alors comme des étapes qui introduisent le concept important, à savoir la définition de fonction continue en tous les points de son domaine.

3.1 Propriétés des valeurs intermédiaires

Théorème 3.3 (Théorème de Bolzano) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes différents (c.-à-d., $f(a)f(b) < 0$). Alors, il existe au moins un nombre c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Le théorème ci-dessus peut s'interpréter graphiquement au moyen de la figure 1.

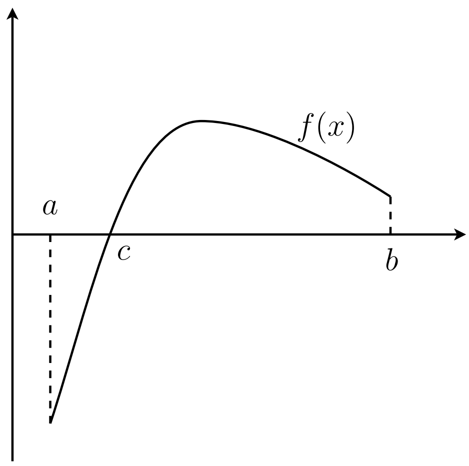


Fig. 1

Théorème 3.4 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et α un nombre strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (c.-à-d. $\alpha \neq f(a)$ et $\alpha \neq f(b)$). Alors il existe au moins un nombre c dans $]a, b[$ tel que $f(c) = \alpha$.*

Question 3.4 (a) Interprétez graphiquement le Théorème 3.4.
(b) Peut-on interpréter le Théorème des valeurs intermédiaires en disant que l'image par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle ?
(c) Montrez que la thèse des Théorèmes 3.3 et 3.4 est fausse si f n'est pas défini sur un intervalle.
(d) Déduisez le Théorème des valeurs intermédiaires du Théorème de Bolzano.
(e) Pouvez-vous étendre les Théorèmes 3.3 et 3.4 au cas où f est défini sur un intervalle non borné ?

Applications On peut construire un algorithme numérique de recherche de zéro d'une fonction sur base des théorèmes ci-dessus. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) \leq 0$.

On procède alors comme suit :

- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$. On a
$$f(a_0)f(b_0) \leq 0 \text{ et } b_0 - a_0 = b - a.$$
On déduit du Théorème 3.3 que la fonction f possède un zéro dans l'intervalle $[a_0, b_0]$.
- Supposons donnés $a_0 \leq a_1 \leq \ldots a_n \leq b_n \leq \ldots \leq b_1 \leq b_0$, tels que pour tout $i = 1, \ldots, n$, on ait
$$f(a_i)f(b_i) \leq 0 \text{ et } b_i - a_i = (b - a)/2^i.$$
Par le Théorème 3.3, la fonction f possède donc un zéro dans chacun des intervalles $[a_i, b_i]$.
- Puisque $f(a_n)f(b_n) \leq 0$, on a toujours l'un des cas suivants
$$f(a_n)f(\tfrac{a_n+b_n}{2}) \leq 0$$
ou
$$f(a_n)f(\tfrac{a_n+b_n}{2}) > 0 \text{ et } f(\tfrac{a_n+b_n}{2})f(b_n) \leq 0.$$
Dans le premier cas, la fonction f possède un zéro dans l'intervalle $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$. On pose
$$a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \tfrac{a_n+b_n}{2}.$$
Dans le second cas, f possède un zéro dans l'intervalle $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ et on pose
$$a_{n+1} = \tfrac{a_n+b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n.$$
Dans les deux cas, on a
$$f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \leq 0 \text{ et } b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/2 = (b - a)/2^{n+1}.$$
On déduit du Théorème 3.3 que la fonction f possède un zéro dans l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.
- On définit ainsi une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$ dont la longueur tend vers zéro et qui contiennent un zéro x_0 de f. Les nombres a_n et b_n sont donc des approximations par défaut et par excès de ce zéro. De plus, on a les estimations d'erreur
$$0 \leq x_0 - a_n \leq (b - a)/2^n \text{ et } 0 \leq b_n - x_0 \leq (b - a)/2^n.$$

Question 3.5 Dans l'algorithme ci-dessus,
(a) explicitez comment on trouve a_1 et b_1 ;
(b) explicitez comment, étant donné a_0, a_1, b_0 et b_1, on trouve a_2 et b_2.

Remarque Une réflexion profonde conduira peut-être certains à remarquer que l'algorithme ci-dessus constitue la base d'une démonstration du Théorème 3.3. Le lecteur qui réalisera le travail de construction d'une telle démonstration aura fait une vraie démarche de mathématicien.

3.2 Extremum

Théorème 3.5 (Théorème de Weierstrass) *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors* f *est bornée et atteint ses bornes, c.-à-d.*

$$\exists\, x_m \in [a, b],\ \exists\, x_M \in [a, b],\ \forall x \in [a, b] \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M).$$

L'interprétation graphique de ce théorème peut se faire sur base de la figure 2.

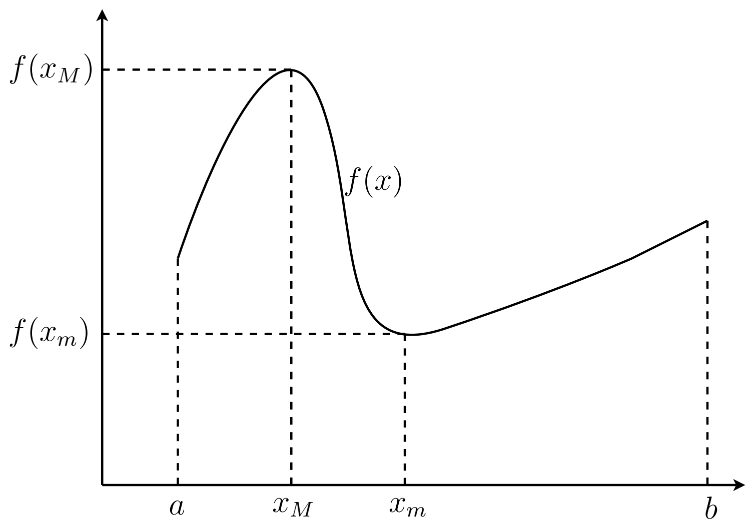


Fig. 2

Question 3.6 (a) Pourquoi appelle-t-on parfois le Théorème 3.5 le Théorème des bornes atteintes ?
(b) Caractérisez l'intérêt que peut avoir un résultat comme le Théorème 3.5.
(c) Montrez que la thèse du Théorème 3.5 est fausse si f n'est pas défini sur un fermé.
(d) Montrez que la thèse du Théorème 3.5 est fausse si f n'est pas défini sur un borné.
(e) L'image par une fonction continue d'un intervalle borné et fermé est-elle un intervalle borné et fermé ?

Chapitre 4

Dérivées

1 Motivations

Les motivations de la notion de dérivée sont multiples. D'une part, elle apparaît dans toute une série d'applications. A titre d'exemple, nous décrirons ici les notions de tangente en géométrie, de vitesse et d'accélération en mécanique, de débit en théorie des fluides. D'autre part, les fonctions dérivables ont toute une série de propriétés mathématiques qui sont à la base du succès de ce concept. On peut citer le Théorème de Lagrange, la formule de Taylor ou la caractérisation des extremums par les dérivées. C'est la conjonction de ces deux points de vue, les applications et la théorie, qui fait tout l'intérêt de la notion de dérivée.

1.1 Notion de tangente

On considère une courbe $\mathcal{C}$ qui est le graphe d'une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle,

$$\mathcal{C} = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}.$$

On définit la *tangente à la courbe* $\mathcal{C}$ *par le point* $P \equiv (a, f(a))$ comme la limite des sécantes PQ lorsque $Q \equiv (a+h, f(a+h))$ tend vers P, c.-à-d. quand h tend vers zéro. Cette définition est illustrée la figure 1.

Ceci mène à définir la tangente comme la droite d'équation $y = f(a) + m(x-a)$, où

$$m = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

est la pente de la tangente.

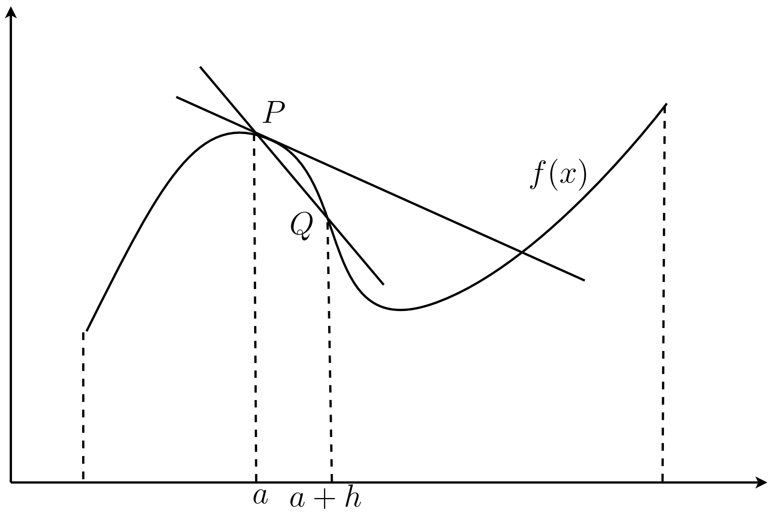


Fig. 1

1.2 Notions de vitesse, d'accélération, de débit

On considère un mobile qui se déplace le long d'une droite. Sa position à l'instant t est donnée par une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle. On peut définir la *vitesse moyenne* $V_{a,a+h}$ entre les instants $t = a$ et $t = a + h$ comme la vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme qui en a se trouve à la position $f(a)$ et en $a + h$ à la position $f(a + h)$. On obtient ainsi

$$V_{a,a+h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

On peut maintenant réduire l'intervalle $[a, a + h]$ et calculer la vitesse moyenne limite lorsque h tend vers zéro. On définit ainsi la *vitesse instantanée* au temps a comme la limite

$$V(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Le physicien effectue la même démarche dans de nombreux autres problèmes physiques. Ainsi par exemple, il définit la vitesse d'un mobile à l'instant t par une fonction $V : I \to \mathbb{R}$. Ensuite, il calcule une *accélération moyenne* $A_{a,a+h}$ entre les instants $t = a$ et $t = a + h$ comme le quotient

$$A_{a,a+h} = \frac{V(a+h) - V(a)}{h}.$$

Finalement, il introduit une *accélération instantanée* au temps a comme la limite

$$A(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{V(a+h) - V(a)}{h}.$$

La définition du débit d'un fluide procède de la même idée. Supposons qu'un mouvement de liquide ait lieu le long d'un tuyau rectiligne de section unité. Décrivons la position d'une tranche déterminée de liquide en fonction du temps au moyen d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle. La tranche de liquide qui se trouve dans la section d'abscisse $f(a)$ à l'instant $t = a$ se retrouve à l'abscisse $f(a+h)$ en $t = a+h$ et donc, durant l'intervalle $[a, a+h]$, le volume de liquide passé dans la section $f(a)$ est $f(a+h) - f(a)$. La quantité moyenne de liquide passée par unité de temps, entre les temps a et $a+h$, s'écrit

$$Q_{a,a+h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

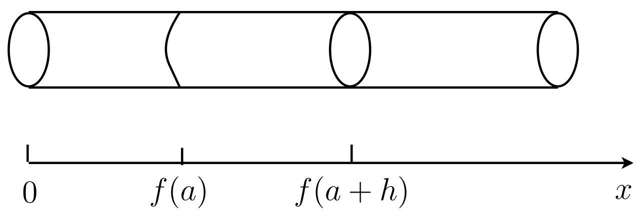


Fig. 2

Comme précédemment, on définit alors un *débit instantané* par la formule

$$Q(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

L'ensemble de ces problèmes montre l'économie de pensée que l'on fait si on définit et étudie de façon abstraite le type de limite introduit ci-dessus.

2 Définitions

Définitions de dérivée – Soit une fonction $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nous dirons que f est *dérivable au point* $a \in A$ si la limite

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2.1}$$

existe. Cette limite est le *nombre dérivé de* f *en* a et est notée $f'(a)$.

Si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en tout point a de A, on dit que la fonction f est *dérivable* et on définit la *fonction dérivée* $f' : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe $f'(x)$. Si de plus la fonction f' est continue, on dit que f est de *classe* $\mathcal{C}^1$ et on note $f \in \mathcal{C}^1(A)$. Par ailleurs, si la restriction de f à $B \subset A$ est dérivable, on dit que f est *dérivable sur* B.

Question 4.1 (a) Déterminez des exemples qui illustrent les définitions ci-dessus.
(b) Montrez que la limite (2.1) est équivalente à

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

NOTATION – On utilise parfois les notations

$$\dot{f}(a), \quad \frac{d}{dx}f(a), \quad \frac{d}{dt}f(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad Df(a), \quad \ldots$$

pour représenter la dérivée de f au point a.

3 Lien avec la continuité, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

La dérivabilité d'une fonction en un point est une propriété plus forte que sa continuité en ce point comme le montre le théorème suivant.

Théorème 4.1 *Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable au point $a \in A$. Alors f est continue en a.*

Remarquez que ce théorème est une condition nécessaire d'existence de dérivée. Si la fonction f n'est pas continue au point a, elle n'y est sûrement pas dérivable.

Question 4.2 (a) Existe-t-il des fonctions dérivables en un point seulement, ou mieux, dérivable en un point et continue en aucun autre point ?
(b) Pouvez-vous démontrer le Théorème 4.1 ?

DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR – Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On peut donc définir la fonction dérivée $f' : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si cette fonction f' est dérivable au point a, on dit que f est *deux fois dérivable au point* a et on écrit

$$f''(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}.$$

Si la fonction f' est dérivable en tous points de son domaine A et si la fonction f'' est continue on dit que f est de *classe* $\mathcal{C}^2$ et on note $f \in \mathcal{C}^2(A)$.

On procède ensuite par récurrence pour définir les *dérivées d'ordre* $n \geq 1$ d'une fonction au point a,

$$f^{(n)}(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a)}{h}.$$

Remarquons qu'on utilise aussi d'autres notations comme par exemple

$$\frac{d^n}{dx^n}f(a) \quad \frac{d^n}{dt^n}f(a), \quad \frac{d^n f}{dx^n}(a), \quad D^n f(a), \quad \ldots$$

Si la fonction $f^{(n)}$ est continue on dit que f est de *classe* $\mathcal{C}^n$ et on note $f \in \mathcal{C}^n(A)$.

4 Propriétés des dérivées

4.1 Propriétés algébriques

Proposition 4.2 *Soit f et $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $a \in A$. Alors*

(a) la fonction $f + g$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;

(b) la fonction fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;

(c) si $g(a) \neq 0$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

4.2 Dérivées de fonctions composées

Théorème 4.3 *Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ deux fonctions respectivement dérivables en $a \in A$ et en $f(a) \in B$. Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a). \tag{4.1}$$

Question 4.3 Imaginez des exercices qui utilisent le Théorème 4.3.

Application Considérons le mouvement d'un point Q de masse m le long d'une droite.

Nous décrivons ce mouvement au moyen d'une fonction $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, qui indique la position $q(t)$ du point Q à l'instant t. Nous pouvons donc définir la vitesse $q'(t)$ et l'accélération $q''(t)$ de ce point à l'instant t.

On suppose que le point est soumis à l'action d'une force F qui dépend de la position du point et que l'on peut décrire comme la dérivée d'une fonction $U \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Donc la force qui agit sur le point qui se trouve à la position q s'écrit $F(q) = \frac{d}{dq}U(q)$.

La loi de Newton, masse fois accélération égale force, signifie qu'à chaque instant $t \in \mathbb{R}$ on a

$$mq''(t) = \frac{d}{dq}U(q(t)).$$

Le physicien définit alors l'énergie du point à l'instant t comme

$$E(t) = \frac{mq'^2(t)}{2} - U(q(t)),$$

dont il dit qu'elle est constante. Nous verrons que pour montrer que la fonction $E(t)$ est constante, il suffit de voir que sa dérivée est nulle (Proposition 4.8). Ce calcul se fait sur base du Théorème 4.3. On obtient, en utilisant la loi de Newton,

$$\frac{d}{dt}E(t) = mq'(t)q''(t) - \frac{d}{dq}U(q(t))q'(t) = q'(t)[mq''(t) - \frac{d}{dq}U(q(t))] = 0. \tag{4.2}$$

Question 4.4 (a) Dans le calcul (4.2), calculez les dérivées des fonctions $m\frac{q'^2(t)}{2}$ et $U(q(t))$ en explicitant dans chacun des cas les fonctions f et g de l'énoncé du Théorème 4.3 et en vérifiant en détail l'application de la formule (4.1).
(b) Remarquez l'intérêt qu'il y a à utiliser plusieurs notations pour les dérivées.

Application – Une autre application concerne le procédé de dérivation implicite. On suppose qu'une fonction f, dérivable au point a, est telle que $g(f(x)) = h(x)$, où g est dérivable au point $f(a)$ et $g'(f(a)) \neq 0$. On calcule alors par le Théorème 4.3 $g'(f(a))f'(a) = h'(a)$ et donc

$$f'(a) = \frac{h'(a)}{g'(f(a))}.$$

Question 4.5 Appliquez la méthode ci-dessus pour calculer $\frac{d}{dx} \arcsin x$, sachant que cette fonction est dérivable.

4.3 Dérivées de fonctions réciproques

Théorème 4.4 *Soit I et $J \subset \mathbb{R}$ des intervalles ouverts et $f : I \to J$ une fonction continue, inversible et dérivable en $a \in I$. Si $f'(a) \neq 0$, alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et*

$$(f^{-1})'(f(a)) = 1/(f'(a)).$$

Ce théorème peut s'interpréter à la figure 3. Remarquez que les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la diagonale principale. Il doit dès lors en être de même des tangentes en des points homologues. Si $P = (a, b) = (a, f(a))$, son point homo-

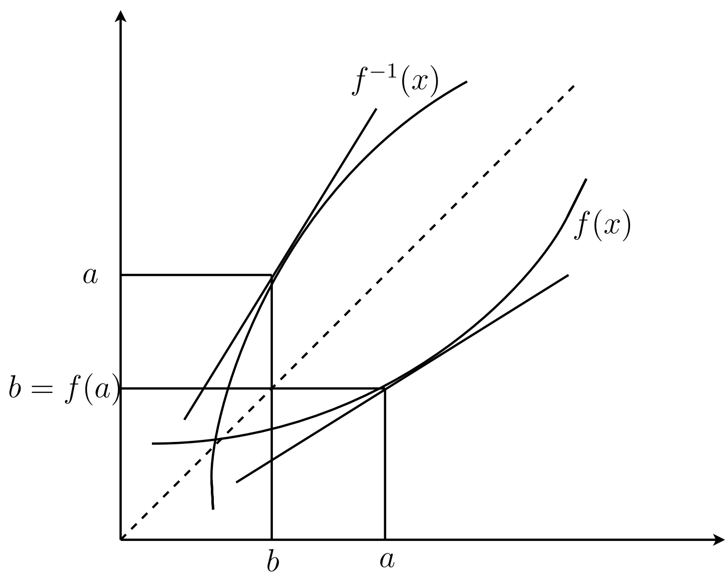


Fig. 3

logue (symétrique par rapport à la diagonale principale) est $Q = (b, a) = (b, f^{-1}(b))$. L'équation de la tangente au graphe de f au point $P = (a, b)$ s'écrit $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. De même, l'équation de la tangente au graphe de f^{-1} au point $Q = (b, a)$ s'écrit $y = f^{-1}(b) + (f^{-1})'(b)(x - b)$. Ces deux droites seront symétriques par rapport à la diagonale principale si leurs coefficients angulaires sont inverses l'un de l'autre. C'est le résultat énoncé dans le Théorème 4.4.

5 Calcul des dérivées

Tout comme pour le calcul des limites, le calcul des dérivées se base sur les propriétés des dérivées, qui permettent de se ramener à un ensemble de dérivées connues. Au départ, on calcule des dérivées directement à partir de la définition, puis on enrichit l'ensemble des dérivées connues en utilisant les dérivées déjà calculées. En particulier, on peut utiliser les dérivées élémentaires suivantes.

Dérivées de fonctions élémentaires

$\frac{d}{dx}(ax + b) = a$; $\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$, o $a \in \mathbb{R}$;
$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$; $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$;
$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = 1/\cos^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$;
$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; $\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; $\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1 + x^2}$;
$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$; $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$;
$\frac{d}{dx}\exp x = \exp x$; $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$;
$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$; $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$; $\frac{d}{dx}\tanh x = 1/(\cosh^2 x)$;
$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$; $\frac{d}{dx}\operatorname{arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$; $\frac{d}{dx}\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1 - x^2}$.

6 Théorèmes fondamentaux

6.1 Extremum local d'une fonction

Définition – Une fonction $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possède un *maximum local* en un point $a \in A$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) \leq f(a)$ pour tous les x dans $A \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, c.-à-d.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon], \quad f(x) \leq f(a).$$

La fonction f possède un *minimum local* en un point $a \in A$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) \geq f(a)$ pour tous les x dans $A \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, c.-à-d.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon], \quad f(x) \geq f(a).$$

Si la fonction f possède un minimum ou un maximum local au point a, on dit que f possède un *extremum local* au point a.

Théorème 4.5 *Soit* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable au point* $c \in]a,b[$. *Si* f *admet un extrémum local en* c, *alors* $f'(c) = 0$.

Question 4.6 Démontrez le théorème ci-dessus.

Question 4.7 (a) Remarquez que le Théorème 4.5 donne une condition nécessaire d'extremum : si la dérivée n'est pas nulle en a, ce point ne peut pas être un extremum local. Cette déclaration est-elle tout à fait correcte ?
(b) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée à droite au point $c \in A$, c.-à-d. que la limite

$$f'_d(c) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

existe. Si f admet un extrémum local en c, que peut-on dire de la valeur de $f'_d(c)$?

6.2 Théorème de Rolle

Théorème 4.6 (Théorème de Rolle) *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, dérivable sur* $]a,b[$. *Si* $f(a) = f(b)$, *alors il existe au moins un point* c *de l'intervalle* $]a,b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Question 4.8 (a) Interprétez le Théorème de Rolle sur base d'un dessin.
(b) Montrez que chaque hypothèse du Théorème de Rolle est nécessaire.

Question 4.9 (a) Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui s'annule en trois points de I. Démontrez que la dérivée seconde s'annule au moins en un point.
(b) Que pensez-vous des zéros de la dérivée seconde d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui s'annule avec sa dérivée en deux points de l'intervalle I ?

6.3 Théorème des accroissements finis

Théorème 4.7 (Théorème des accroissements finis ou de Lagrange) *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, dérivable sur* $]a,b[$. *Alors il existe un point* c *de l'intervalle* $]a,b[$ *tel que*

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a). \tag{6.1}$$

Question 4.10 (a) Interprétez graphiquement le Théorème des accroissements finis.
(b) Montrez que ce théorème peut se déduire du Théorème de Rolle.

Remarque Dans les Théorèmes de Rolle et de Lagrange, l'existence du point c est établie, mais nous ne pouvons pas le situer dans l'intervalle $]a,b[$. C'est pour cela qu'on utilise souvent l'inégalité

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b-a),$$

où $M \geq |f'(x)|$ pour tout $x \in]a,b[$.

On sait que la fonction constante $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = c$ est dérivable et que sa dérivée est nulle. Ce résultat admet la réciproque suivante.

Proposition 4.8 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f'(x) = 0$ pour $x \in]a, b[$. Alors la fonction f est constante sur l'intervalle $[a, b]$.*

Question 4.11 (a) Démontrez la Proposition 4.8.
(b) Montrez que si la fonction f n'est pas définie sur un intervalle, la Proposition 4.8 est fausse.

Chapitre 5

Applications des dérivées

1 Calcul des limites : Théorèmes de l'Hospital

Précédemment, nous avons calculé les limites à partir d'outils algébriques, trigonométriques, géométriques. Ces méthodes peuvent se compléter par l'usage des dérivées qui sont particulièrement utiles dans l'étude des formes indéterminées $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Il s'agit d'étudier la limite d'un quotient dont le numérateur et le dénominateur tendent tous deux, soit vers zéro, soit vers l'infini. Un premier résultat dans ce sens est le suivant.

Théorème 5.1 (Règle de l'Hospital pour la forme $\frac{0}{0}$) *Soit I un intervalle, $a \in I$, f et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I et dérivables sur $I \setminus \{a\}$. Supposons que*

(a) $f(a) = g(a) = 0$,

(b) pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ *on a* $g'(x) \neq 0$,

(c) la limite $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe.*

Alors on a $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Question 5.1 (a) Cherchez des exemples d'application du Théorème 5.1.

(b) Essayez d'appliquer le Théorème 5.1 au quotient $\dfrac{e^{-1/x}}{x}$.

Question 5.2 On cherche à calculer la limite du quotient

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{g(x)},$$

pour $f(x) = e^{-2/x}\left(\cos\frac{1}{x} + 2\sin\frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = e^{-1/x}\left(\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\right)$.

Que pensez-vous du calcul suivant ?

On a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = 0.$$

D'autre part, on calcule facilement

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5}{x^2} e^{-2/x} \sin \frac{1}{x}, \\ g'(x) &= \frac{2}{x^2} e^{-1/x} \sin \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{5}{2} e^{-1/x} = 0.$$

Finalement, on déduit du Théorème 5.1 le résultat faux

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Montrez que ce résultat est faux. Caractérisez l'erreur qui a été faite.

Idée de la démonstration. Il est important de dégager les étapes d'une démonstration. C'est ce travail que nous présentons ci-dessous. On peut d'ailleurs noter qu'une compréhension profonde est souvent liée à ce type de démarche. Bien sûr, pour achever la démonstration, il faut encore "faire les calculs", c.-à-d. vérifier en détail chacune de ces étapes. Cet aspect est plus technique, nous ne le ferons pas ici.

Première étape. Dans les hypothèses du théorème, on peut montrer qu'il existe un point c entre x et a tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{1.1}$$

Deuxième étape. On remarque que (1.1) peut aussi s'écrire

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

et le résultat s'obtient en faisant tendre x, et donc c, vers a. ∎

Remarque : Si les fonctions f et $g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ ne sont pas définies au point a mais ont une limite en ce point, on peut définir les extensions $\hat{f}$ et $\hat{g} : I \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= f(x), & \hat{g}(x) &= g(x), & &\text{si } x \in I \setminus \{a\}, \\ \hat{f}(a) &= \lim_{x \to a} f(x), & \hat{g}(a) &= \lim_{x \to a} g(x). \end{aligned}$$

Ensuite, on peut appliquer le Théorème 5.1 en remarquant que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)}.$$

On peut démontrer une règle de l'Hospital analogue au Théorème 5.1 pour la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Théorème 5.2 (Règle de l'Hospital pour la forme $\frac{\infty}{\infty}$) *Soit I un intervalle, $a \in I$, f et $g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Supposons que*

(a) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} g(x) = +\infty$,

(b) pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ on a $g'(x) \neq 0$,

(c) la limite $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe.*

Alors on a $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Question 5.3 Cherchez des exemples d'application du Théorème 5.2.

2 Monotonie

L'étude des fonctions et de leur graphe consiste à en reconnaître les propriétés. La dérivée s'avère être un outil fondamental pour réaliser ce type d'étude. Ainsi par exemple, l'étude de la croissance et de la décroissance des fonctions est un problème qui a un sens indépendamment du concept de dérivée. Elle est pourtant facilitée si on sait que la fonction étudiée est dérivable. La dérivée apparaît alors comme une aide à la résolution de problèmes. C'est une des raisons qui nous la fait reconnaître comme un concept important.

2.1 Définitions

Une fonction $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *croissante* si pour tout $x \in A$ et tout $y \in A$ tel que $x \leq y$, on a $f(x) \leq f(y)$.

La fonction f est *décroissante* si pour tout $x \in A$ et tout $y \in A$ tel que $x \leq y$, on a $f(x) \geq f(y)$.

Une fonction est dite *monotone* si elle est soit croissante, soit décroissante.

Question 5.4 (a) Illustrez les propriétés de monotonie par des exemples.
(b) La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est-elle croissante ?

2.2 Critère de monotonie

La croissance ou la décroissance d'une fonction se déduit facilement du signe de la dérivée. En particulier, on a le résultat qui suit.

Théorème 5.3 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. Alors*

(a) la fonction f est croissante si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$,

(b) la fonction f est décroissante si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

Question 5.5 Cherchez des exemples d'application du Théorème 5.3.

Idée de la démonstration Dans les hypothèses du théorème, on peut déduire du Théorème des accroissements finis (Théorème 4-4.7) qu'il existe un point c entre x et y tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

On en déduit que si $y > x$, alors $f(y) > f(x)$.
Réciproquement, si la fonction est croissante, le quotient différentiel

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

est positif ou nul et donc sa limite, la dérivée, aussi. ■

Cherchons maintenant à écrire une démonstration détaillée.

Démonstration : *Première affirmation : si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors la fonction f est croissante.* Soit $x \in [a, b]$ et $y \in [a, b]$ tel que $x \leq y$. Les hypothèses du Théorème 4-4.7 des accroissements finis (où dans ce théorème on a choisi $a = x$ et $b = y$) sont vérifiées. On en déduit qu'il existe un point c dans l'intervalle $]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Puisque $f'(c) \geq 0$ et $y - x \geq 0$, on a bien $f(y) - f(x) \geq 0$.

Deuxième affirmation : si la fonction f est croissante alors $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Fixons $x \in]a, b[$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in [a, b]$. Puisque la fonction f est croissante, on peut écrire

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$$

et donc, en utilisant la Proposition 2-2.3, on a

$$f'(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ \neq}} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Thèse (b). On démontre comme dans les deux premières affirmations que la fonction f est décroissante si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. ■

Question 5.6 (a) Écrivez en détail la démonstration de la Thèse (b).
(b) Que pensez-vous du raisonnement qui suit pour démontrer la deuxième affirmation ?
Fixons comme dans la première affirmation $x \in [a, b]$ et $y \in [a, b]$ tel que $x \leq y$. On peut encore écrire

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Puisque f est croissante et $x \leq y$, on peut en déduire $f'(c) \geq 0$, et l'affirmation s'en suit.

Question 5.7 (a) Que pensez-vous du raisonnement qui suit ?
La fonction $f(x) = \operatorname{tg} x$ est croissante puisque sa dérivée $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ est positive.
(b) Si $f'(x) > 0$ pouvez-vous obtenir un résultat meilleur que la croissance de f ?

3 Extremum de fonctions

Un deuxième problème qui s'étudie facilement au moyen des dérivées est un problème d'optimisation. Un processus, le rendement d'une unité de production, s'exprime en fonction d'un paramètre, le nombre d'unités produites, au moyen d'une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$. Remarquez que le nombre d'unités produites, x, est modélisé par un nombre réel et non pas par un entier. On peut réfléchir à ce que signifie de produire $\sqrt{18.740.560}$ pièces. On calcule $\sqrt{18.740.560} = 4329, \dots$ et on peut penser que les productions de 4329 pièces ou de 4330 pièces sont, pour le practicien, des productions totalement équivalentes. C'est dans cet esprit qu'il s'accomode d'un nombre de pièces produites qui n'est pas un naturel. Le problème du practicien consiste donc à déterminer la production qui optimise son rendement. Il s'agit donc de maximiser la fonction f. Si cette fonction est dérivable, on possède de bonnes méthodes pour déterminer un maximum. Remarquons que ceci est une raison très fondamentale pour modéliser le nombre de pièces par un nombre réel. Si on avait fait le choix, a priori plus naturel, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, il n'aurait pas été possible de dériver f et d'appliquer les théories ci-dessous. Ceci explicite que la modélisation d'un processus réel est un compromis entre la physique du problème et les outils mathématiques que l'on peut utiliser. Elle nécessite la connaissance profonde tant du monde du réel que des outils mathématiques.

3.1 Définitions

Une fonction $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possède un *maximum global* en un point $a \in A$ si $f(x) \leq f(a)$ pour tous les points $x \in A$, c.-à-d.

$$\forall x \in A, \quad f(x) \leq f(a).$$

On dit que $f(a)$ est le *maximum global* de f.

Nous avons défini à la Section 4-6.1 une notion de maximum local. Pour rappel, une fonction $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possède un *maximum local* en un point $a \in A$ si

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon], \quad f(x) \leq f(a)$$

et on dit que $f(a)$ est un *maximum local* de f.

De même, on définit le *minimum global* de f au point $a \in A$ par

$$\forall x \in A, \quad f(x) \geq f(a)$$

et le *minimum local* par

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon], \quad f(x) \geq f(a).$$

Finalement, notons que les maximums et minimums d'une fonction constituent ses *extremums*.

Question 5.8 Constituez-vous un ensemble d'exemples qui illustrent ces notions. Veillez à décrire les fonctions que vous considérez de façon analytique et à reconnaître sur leur graphe les diverses situations possibles.

3.2 Théorèmes généraux

Existence d'extremums – On sait par le Théorème de Weierstrass (Théorème 3-3.5) qu'une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ admet un maximum et un minimum global.

Condition nécessaire d'existence d'extremums – On a vu au Théorème 4-4.5 que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en $c \in]a, b[$ et que $f(c)$ est un extremum local, alors $f'(c) = 0$.

Conditions suffisantes d'existence d'extremums – Le Théorème suivant donne des conditions suffisantes pour qu'un point c soit un extremum en utilisant la dérivée première de la fonction à extrémer.

Théorème 5.4 *Soient I un intervalle ouvert, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, $c \in I$ et $\varepsilon > 0$.*
(a) Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I \cap [c - \varepsilon, c]$ et $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I \cap [c, c + \varepsilon]$, alors f possède un maximum local au point c.
(b) Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I \cap [c - \varepsilon, c]$ et $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I \cap [c, c + \varepsilon]$, alors f possède un minimum local au point c.

Question 5.9 (a) Exprimez géométriquement ce théorème.
(b) Donnez un exemple d'application du théorème.
(c) Quel outil pourrait-on utiliser pour démontrer ce théorème ? Démontrez-le.
(d) Ce théorème reste-t-il valable si $I \cap [c - \varepsilon, c] = \emptyset$ ou $I \cap [c, c + \varepsilon] = \emptyset$?

Le théorème qui suit indique des conditions suffisantes d'existence d'extremum en utilisant la dérivée seconde de la fonction à extrémer.

Théorème 5.5 *Soit une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable au point $c \in]a, b[$. Supposons $f'(c) = 0$.*
(i) Si $f''(c) > 0$, alors f admet un minimum local en c.
(ii) Si $f''(c) < 0$, alors f admet un maximum local en c.

Question 5.10 (a) Exprimez géométriquement ce théorème.
(b) Pouvez-vous donnez un exemple d'application du Théorème 5.4 auquel ne s'applique pas le Théorème 5.5 ?
(c) Pouvez- vous donnez un exemple d'application du Théorème 5.5 auquel ne s'applique pas le Théorème 5.4 ?
(d) Quel outil pourrait-on utiliser pour démontrer ce théorème ? Démontrez-le.

3.3 Méthode de recherche des extremums

Pour rechercher les extremums d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on utilise la procédure suivante.

1. On détermine l'ensemble $\mathcal{E}$ des points c tels que
   - soit f n'est pas dérivable en ce point,
   - soit $c \in]a, b[$, f est dérivable en c et $f'(c) = 0$,
   - soit $c \in \{a, b\}$.
2. Si l'ensemble $\mathcal{E}$ est fini, il est facile de déterminer les maximum et minimum globaux de f en prenant les maximum et minimum de l'ensemble $\{f(c) \mid c \in \mathcal{E}\}$.
3. En général, on détermine les points de $\mathcal{E}$ qui correspondent à des extremums de f par application des Théorèmes 5.4 et 5.5.

Question 5.11 Recherchez des exercices d'application de cette méthode. Résolvez-les.

4 Approximation des fonctions : linéarisation

Le problème de l'approximation d'une fonction par une autre doit se considérer dans une perspective de calcul numérique. Les fonctions qui approximent doivent être manipulables par l'ordinateur. Dans ce but, on peut imposer à la classe des fonctions approximantes de vérifier les conditions suivantes.

1. Une fonction approximante doit être définie par un nombre fini de paramètres $c_1, \ldots, c_k$.
2. Il faut pouvoir calculer la valeur en tout point d'une fonction approximante donnée en n'utilisant que l'une des opérations arithmétiques utilisées par la machine. Souvent, on se restreint à l'addition, la soustraction et la multiplication. Dans ce cas, la classe des fonctions approximantes est l'ensemble des polynômes.

Il faut remarquer que les règles que nous avons indiquées ne sont que théoriques. Représenter en machine les paramètres $c_1, \ldots, c_k$ n'est pas possible si certaines composantes sont irrationnelles. De même, les opérations arithmétiques donnent lieu à des erreurs d'arrondi. On peut donc arguer que les fonctions trigonométriques, exponentielles ou logarithmiques sont tout aussi calculables que les polynômes. Dès lors, on peut les utiliser pour définir une classe de fonctions approximantes plus large et peut-être mieux adaptée au problème d'approximation qu'on considère. Ce sera l'idée des séries de Fourier.

Il faut aussi insister sur le fait que ces règles sont fonctions de la technologie informatique du moment. Par exemple, la division pourrait être admise, ce qui permettrait de considérer des fonctions rationnelles, quotients de polynômes. Son usage est pourtant souvent rejeté.

Dans cette première section sur l'approximation, nous étudierons un problème d'approximation qui n'utilise que des fonctions linéaires. Dans la section suivante, la classe des fonctions approximantes sera l'ensemble des polynômes.

4.1 Problème d'approximation

Problème Étant donné une fonction $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, dérivable en un point $a \in]\alpha, \beta[$, on cherche une fonction affine $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui approxime le "mieux possible" f en ce point, c.-à-d. telle que

$$L(a) = f(a) \quad \text{et} \quad L'(a) = f'(a).$$

Solution La solution à ce problème est la fonction

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

qu'on appelle la *linéarisation de la fonction f en a*

Question 5.12 (a) Pouvez-vous montrer que la solution proposée convient ?
(b) La solution proposée est-elle unique ?

4.2 Erreur d'approximation

Le graphe de la linéarisation de la fonction f en a est la droite tangente au graphe de f en a. On peut remarquer sur la figure 1 que l'approximation proposée est valable au voisinage du point a. Le théorème qui suit précise cette idée.

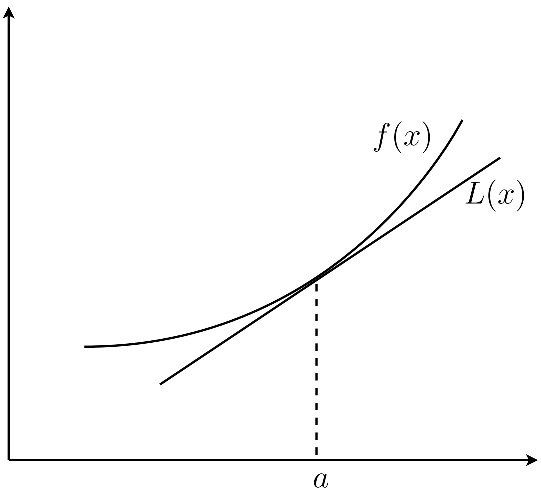


Fig.1

Théorème 5.6 *Soit $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $L(x)$ la linéarisation de f en $a \in]\alpha, \beta[$. Si $|f''(x)| \leq M$ pour tout $x \in]\alpha, \beta[$, alors*

$$\forall x \in]\alpha, \beta[, \quad |f(x) - L(x)| \leq \frac{(x-a)^2}{2} M.$$

Pour démontrer ce Théorème, on utilise le lemme suivant qui prolonge le Théorème des valeurs intermédiaires.

Lemme 5.7 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, deux fois dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c).$$

Question 5.13 (a) Cherchez à démontrer ce lemme en appliquant le Théorème de Rolle à la fonction $g(x) = f(b) - [f(x) + (b-x)f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2} A]$, où A est une constante telle que $g(a) = 0$.
(b) Démontrez le Théorème 5.6.

5 Approximation des fonctions : polynôme de Taylor

5.1 Approximation polynômiale

Problème Étant donné une fonction $f :]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, n fois dérivable en un point $a \in]\alpha, \beta[$, on cherche un polynôme $T^{(n)}_{f,a}$ qui approxime le "mieux possible" f au point a, c.-à-d. tel que

$$T^{(n)}_{f,a}(a) = f(a), \ldots, \frac{d^k}{dx^k} T^{(n)}_{f,a}(a) = \frac{d^k}{dx^k} f(a), \ldots, \frac{d^n}{dx^n} T^{(n)}_{f,a}(a) = \frac{d^n}{dx^n} f(a).$$

Solution La solution à ce problème est la fonction

$$T^{(n)}_{f,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{5.1}$$

qu'on appelle *le polynôme de Taylor d'ordre n de la fonction f au point a.*

On écrit aussi sous une forme condensée

$$T^{(n)}_{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

où on a utilisé la définition $0! = 1$.

Question 5.14 (a) Pouvez-vous montrer que la solution proposée convient ?
(b) La solution proposée est-elle unique ?

Question 5.15 (a) Donnez des exemples de fonctions dont vous pouvez calculer le polynôme de Taylor d'ordre $1, 2, \ldots, n$.
(b) Soit $P(x)$ un polynôme d'ordre n. Quel est le polynôme de Taylor d'ordre n de la fonction P au point a ?
Pouvez-vous calculer le polynôme de Taylor d'ordre $k \neq n$ de la fonction P au point a ?

5.2 Méthodes de calcul

Pour calculer un polynôme de Taylor, on peut appliquer la définition (5.1). En pratique, on utilisera plutôt des logiciels informatiques qui fournissent ces polynômes. En guise d'exemple, nous indiquons ci-dessous les polynômes de Taylor de quelques fonctions usuelles.

$f(x)$	a	$T_{f,a}^{(n)}(x)$
$\sin x$	0	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, si $n = 2k+1$
$\cos x$	0	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, si $n = 2k$
$\exp x$	0	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$
$\ln x$	1	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$
$\frac{1}{1+x}$	0	$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^n$
$\frac{1}{1-x}$	0	$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n$

5.3 Erreur d'approximation

Tout comme on l'a fait pour l'approximation linéaire, on peut visualiser (figure 2) l'erreur d'approximation, en représentant les graphes du polynôme de Taylor $T_{f,a}^{(n)}(x)$ de la fonction f en a et de la fonction f.

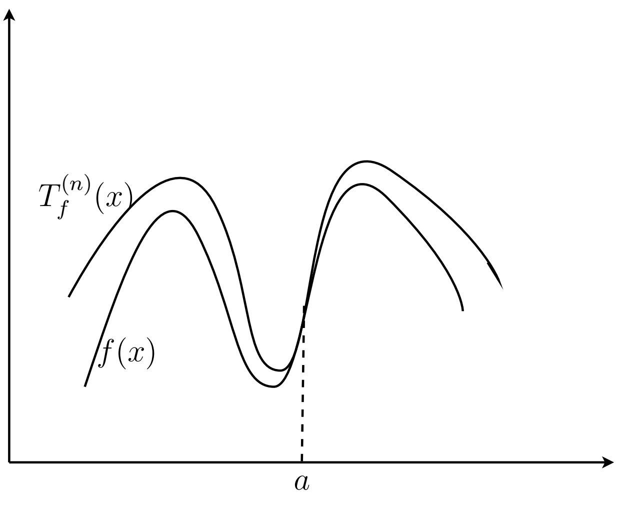


Fig.2

Cette erreur peut s'évaluer analytiquement sur base des résultats suivants.

Théorème 5.8 *Soit $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $n+1$ fois dérivable sur $]\alpha, \beta[$, $T^{(n)}_{f,a}(x)$ le polynôme de Taylor d'ordre n généré par f en $a \in]\alpha, \beta[$ et $x \in [\alpha, \beta]$. Alors il existe un point c entre a et x tel que*

$$f(x) = T^{(n)}_{f,a}(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Application Ce type de résultat est fort utile dans le calcul des limites. Cherchons par exemple la limite

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

On sait que $T^{(2)}_{\sin x,0}(x) = x$. On déduit alors du Théorème 5.8 (où $f(x) = \sin x$, $a = 0$ et $n = 2$) qu'il existe un point c entre x et 0 tel que

$$\sin x - x = \frac{x^3}{3!} \frac{d^3 \sin x}{dx^3}\bigg|_{x=c} = -\frac{x^3}{3!} \cos c.$$

On calcule alors

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{c \to 0} \left(-\frac{1}{3!} \cos c\right) = -\frac{1}{3!}\,. \tag{5.2}$$

Remarque Remarquez que le point c dépend de x, c.-à-d. $c = c(x)$, et la fonction $c(x)$ est telle que $\lim_{x \to 0} c(x) = 0$, puisque $0 \leq |c(x)| \leq |x|$. Il faudrait donc faire le calcul de limite (5.2) comme suit

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{3!} \cos c(x)\right) = -\frac{1}{3!}\,,$$

où on a utilisé la Proposition 2-2.4 pour déduire la dernière égalité.

Théorème 5.9 *Soit $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $n+1$ fois dérivable sur $]\alpha, \beta[$ et $T^{(n)}_{f,a}(x)$ le polynôme de Taylor d'ordre n généré par f en $a \in]\alpha, \beta[$. Si $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ pour tout $x \in]\alpha, \beta[$, alors*

$$|f(x) - T^{(n)}_{f,a}(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

pour tout $x \in [\alpha, \beta]$.

Application On peut utiliser les résultats ci-dessus pour calculer numériquement une fonction avec une précision donnée.

Calculons le nombre e à 10^{-3} près, en supposant que l'on sache que $e \leq 3$. Considérons la fonction e^x définie sur l'intervalle $[0, 1]$. On sait que

$$T^{(n)}_{e^x,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\,.$$

D'autre part, on déduit du Théorème 5.9 que

$$|e - T^{(n)}_{e^x,a}(1)| \leq \frac{1}{(n+1)!}M,$$

où $M \geq \frac{d}{dx}e^x = e^x$ pour tout $x \in [0, 1]$. Dès lors, on peut choisir $M = 3$ et écrire

$$|e - T^{(n)}_{e^x,a}(1)| \leq \frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-3},$$

ce qui est vérifié si $n \geq 6$ et donc, le nombre cherché est

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2.718 \pm 10^{-3}.$$

En fait, on a $e \cong 2,71828$ avec cinq décimales exactes.

Chapitre 6

Primitives

1 Définition

Le concept de primitive est en quelque sorte l'inverse du concept de dérivée. Ceci s'exprime plus précisément par la définition qui suit.

Définition – Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *primitivable* s'il existe une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$. La fonction F s'appelle une *primitive* de f.

Question 6.1 (a) Pour comprendre une définition comme celle-ci, il faut se construire des exemples. Indiquez des fonctions primitivables et d'autres qui ne le sont pas.
(b) Il faut aussi en avoir remarqué toutes les caractéristiques. Pourquoi ne considère-t-on que des fonctions f définies sur un intervalle ?
(c) Pouvez-vous indiquer une fonction F qui ne soit pas une primitive ?

2 Existence de primitives

Il est assez évident qu'il existe des fonctions primitivables. Il suffit de lire à l'envers une table de dérivées. On vérifie même assez vite que toutes les fonctions ne sont pas primitivables. Il est alors naturel de chercher à savoir quelles sont celles qui ont une primitive. D'autre part, il est souvent difficile de trouver explicitement une primitive. Par exemple la fonction $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$ est primitivable, mais il n'est pas possible de l'expliciter en des termes simples. Il peut être utile de savoir que cette primitive existe, même si nous n'avons aucun espoir de la calculer. La caractérisation des fonctions primitivables n'est pas un problème simple. Le théorème qui suit fait un pas dans cette direction. Il indique une large classe de fonctions qui sont primitivables.

Théorème 6.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est primitivable.*

Une démonstration simple de ce théorème se base sur une théorie de l'intégrale. Nous n'en ferons donc pas la démonstration maintenant.

On peut remarquer que le résultat énoncé dans le théorème n'est pas optimal, il ne caractérise pas parfaitement les fonctions primitivables. En effet, une fonction peut être primitivable sans être continue.

Question 6.2 (a) Vérifiez que la fonction

$$f(x) = \frac{d}{dx} x^2 \sin\frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \quad f(0) = 0,$$

est primitivable mais n'est pas continue.
(b) Faites un diagramme de Venn qui représente les ensembles des fonctions continues et des fonctions primitivables.

3 Ensemble des primitives

Une même fonction admet plusieurs primitives. On peut pourtant les caractériser de façon que si on en connaît une, on les connaît toutes. Cette caractérisation est l'objet du théorème qui suit.

Théorème 6.2 (Structure de l'ensemble des primitives) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de $f : I \to \mathbb{R}$. Alors*
(a) pour tout réel C, $F + C$ est aussi une primitive de f,
(b) toute primitive de f est de la forme $F + C$ pour une certaine constante C.

Idée d'une démonstration. Ce théorème contient deux énoncés.
Démontrer (a) revient à vérifier

$$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = f(x). \tag{3.1}$$

Démontrer (b) demande de voir que, si F et G sont deux primitives de f, alors la fonction $H = G - F$ est une constante. Dans ce but, on doit remarquer que $H' = 0$ et se souvenir que la Proposition 4-4.8 établit que H est constant si $H' = 0$.

Démonstration de l'affirmation (b). Soit G une primitive de f.
Notons $H = G - F$, choisissons un point $y \in I$ et posons $C = H(y)$.
Considérons ensuite un point x quelconque dans I.
Tout d'abord, et par définition des primitives, la fonction H est telle que $H' = G' - F' = f - f = 0$. Ensuite, on déduit de la Proposition 4-4.8 que H est une constante sur $[x, y]$ si $x \leq y$ (ou $[y, x]$ si $y \leq x$). Dans les deux cas, on a, en particulier, $H(x) = H(y) = C$.
On a donc trouvé une constante C telle que, pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + C$. ■

Question 6.3 (a) Rédigez la démonstration de l'affirmation (a) du théorème en explicitant les définitions et propriétés utilisées.
(b) La démonstration de l'affirmation (b) nécessite-t-elle que la fonction f soit définie sur un intervalle ?

Notation – On note

$$\int f \quad \text{ou} \quad \int f(x)\,dx \quad \text{ou encore} \quad \int f(t)\,dt$$

une primitive générique de la fonction f. Le mot *générique* signifie que la notation désigne une primitive quelconque mais fixée de l'ensemble des primitives de f. L'usage de cette notation suppose que si on se donne une fonction Φ particulière et qu'on écrit $\Phi = \int f(x)\,dx$, cela signifie qu'il existe une primitive de f qui vérifie l'égalité ou, si on préfère, que l'égalité n'est vraie qu'à une constante près.

4 Calcul des primitives

Méthode de calcul – Le calcul des primitives se base sur :
1. une table de primitives élémentaires, obtenues en inversant une table de dérivées ;
2. des propriétés ou règles de calcul qui permettent d'étendre la classe des primitives calculables.

4.1 Table de primitives

Le lecteur pourra consulter des tables usuelles comme M.B. Dwight[1] ou M.R. Spiegel[2]. Il pourra aussi utiliser un logiciel informatique. Il devra pourtant garder en mémoire une table minimum telle celle reprise ci-dessous.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^a	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\exp x$	$\exp x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\sinh x$	$\cosh x$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\cosh x$	$\sinh x$

[1]M.B. Dwight, *Tables of Integrals and other mathematical Data*, New York, Mc Graw-Hill 1961.
[2]M.R. Spiegel, *Formules et tables mathématiques*, série Schaum, New York, Mc Graw-Hill 1979.

4.2 Propriétés des primitives

Proposition 6.3 (Propriétés algébriques) *Soit f et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions primitivables et $k \in \mathbb{R}$. Alors, on peut écrire :*
(a) $\displaystyle\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$
(b) $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$

Question 6.4 Pour illustrer cette proposition, calculez une primitive du polynôme

$$P(x) = a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i},$$

en indiquant les propriétés utilisées.

Proposition 6.4 (Primitivation par parties) *Soit f et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $C^1(I)$. Alors, on peut écrire*

$$\int f'(x)g(x)\,dx = fg - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Question 6.5 (a) Vérifiez que la démonstration de cette proposition se déduit de la règle de dérivée d'un produit (Proposition 4-4.2). Écrivez la démonstration.
(b) Cherchez des exemples d'application de cette proposition.

Proposition 6.5 (Primitivation par substitution) *Soit I et J des intervalles, $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f et $g : J \to I$ une fonction dérivable. Alors la fonction $f(g(x))g'(x)$ est primitivable et*

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F \circ g + C,$$

où C est une constante arbitraire.

Question 6.6 (a) Vérifiez que la démonstration de cette proposition se déduit de la règle de dérivée de composée de fonctions (Théorème 4-4.3). Écrivez la démonstration.
(b) Cherchez des exemples d'application de la méthode de primitivation par substitution.

Proposition 6.6 (Primitivation par changement de variable) *Soit I et J des intervalles, $g : J \to I$ une bijection dérivable dont la réciproque g^{-1} soit aussi dérivable et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que la fonction $f(g(x))g'(x)$ soit primitivable. Alors f est primitivable et*

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx\right) \circ g^{-1}.$$

Question 6.7 (a) Expliquez la différence entre la primitivation par substitution et celle par changement de variable.
(b) Cherchez des exemples d'application de la méthode de primitivation par changement de variable.

La démonstration de la Proposition 6.6 est un peu plus élaborée. En réalité, il faut calculer

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(g(x))g'(x)\,dx\right) \circ g^{-1}$$

ce qui est la dérivée d'une fonction composée. On applique donc le Théorème 4-4.3 aux fonctions $\int f(g(x))g'(x)\,dx$, dont la dérivée est évidente, et g^{-1}, dont la dérivée se calcule par le Théorème 4.4.

Question 6.8 Écrivez la démonstration de cette propriété.

Chapitre 7

Intégrales

1 Aire des surfaces planes

1.1 Aire sous un graphe

Pour motiver le concept d'intégrale, on peut considérer le problème de l'aire en géométrie. Il est facile de définir l'aire du rectangle, du triangle et plus généralement d'un polygône. Le problème devient plus délicat si on considère une surface qui n'est pas délimitée par des droites. C'est le cas du cercle ou du segment de parabole. Dans ce dernier problème, on cherche l'aire de la figure

$$E = \{(x, y) \mid x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x^2\}.$$

Question 7.1 Écrivez explicitement un ensemble E de la forme

$$E = \{(x, y) \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

qui décrit un demi-cercle de rayon unité.

Plus généralement, nous considérerons ci-dessous la généralisation suggérée par la Question 7.1.

Problème – Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue On considère l'ensemble

$$E = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

dont on cherche à définir l'aire $\mathcal{A}(E)$.

Principe de la définition de l'aire – L'idée de la solution du problème posé peut s'exprimer en trois étapes. Tout d'abord, on inscrit dans l'ensemble E une famille d'ensembles décomposables en rectangles et dont l'aire est donc facile à évaluer. L'aire de E devra évidemment être plus grande que les aires de toutes ces figures inscrites.

Ensuite, on adopte une démarche duale. Cette fois, on inscrit E dans des ensembles décomposables en rectangles. Dans ce cas, l'aire de E doit être plus petite que toutes ces aires de figures circonscrites.

Cette double démarche permet de décrire des approximations inférieures, les aires des figures inscrites, et des approximations supérieures, les aires de figures circonscrites. Si la plus grande des approximations inférieures égale la plus petite des approximations supérieures, il est naturel de prendre ce nombre comme définition de l'aire.

Construction des approximations inférieures – Les ensembles inscrits à E que nous considérerons sont construits comme suit. On définit d'abord un *découpage de l'intervalle* $[a, b]$, c.-à-d. un ensemble de points

$$D = \{x_i \mid a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}.$$

Soit ensuite $l_i \geq 0$ le minimum de f sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. (Ce minimum existe-t-il toujours ?) On considère alors les rectangles de base $[x_{i-1}, x_i]$ et de hauteur l_i. Ils forment une figure inscrite à E. L'aire du i-ème rectangle est égale à $l_i(x_i - x_{i-1})$ et donc l'aire de la figure inscrite s'écrit

$$L = l_1(x_1 - x_0) + l_2(x_2 - x_1) + \cdots + l_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} l_i(x_i - x_{i-1}).$$

Nous l'appellerons une *somme inférieure*. Il est évident que si on peut définir l'aire $\mathcal{A}(E)$ il faut que $L \leq \mathcal{A}(E)$.

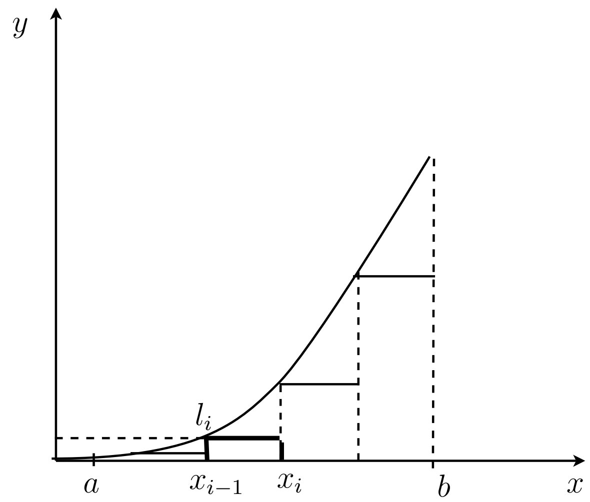


Fig.1

Construction des approximations supérieures – De même, on définit la *somme supérieure*

$$U = u_1(z_1 - z_0) + u_2(z_2 - z_1) + \cdots + u_k(z_k - z_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k} u_i(z_i - z_{i-1}),$$

où $\{z_0, z_1, z_2, \cdots, z_k\}$ est un découpage de l'intervalle $[a, b]$ (pas forcement égal à D), et u_i est le maximum de f sur l'intervalle $[z_{i-1}, z_i]$. La définition de l'aire $\mathcal{A}(E)$ devra être telle que $\mathcal{A}(E) \leq U$.

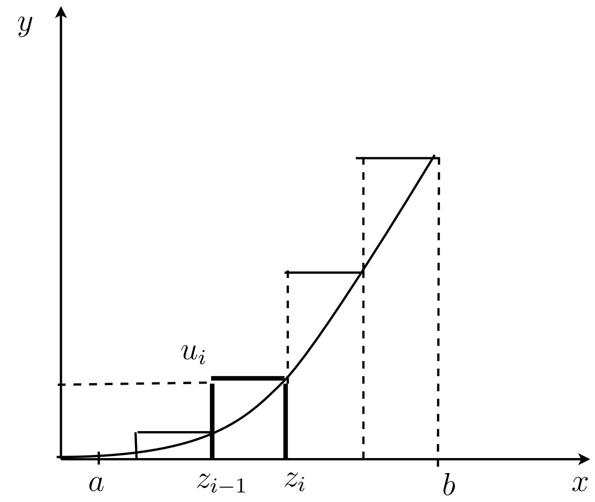


Fig.2

On peut vérifier que, quels que soient les découpages utilisés, et quelles que soient les bornes supérieures et inférieures, on a toujours

$$L \leq U.$$

On pose alors la définition suivante.

Définition – On dit que $\mathcal{A}(E)$ est *l'aire* de E si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une somme inférieure L et une somme supérieure U telles que

$$0 \leq \mathcal{A}(E) - L \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad 0 \leq U - \mathcal{A}(E) \leq \varepsilon.$$

Exemple – A partir de cette définition, on peut calculer l'aire du segment de parabole

$$E = \{(x, y) \mid x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x^2\}.$$

En effet, si on considère le découpage

$$D = \{0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n, 1\},$$

on peut calculer les sommes inférieure L et supérieure U correspondantes. Ensuite, on peut vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$, si on choisit $n \geq 2/\varepsilon$, on a bien

$$0 \leq 1/3 - L \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad 0 \leq U - 1/3 \leq \varepsilon.$$

On en déduit finalement que l'aire cherchée est $\mathcal{A}(E) = 1/3$. Celui qui cherchera à faire les calculs en détail pourra en évaluer la difficulté. Il se rendra compte de l'intérêt de développer des méthodes de calcul alternatives.

1.2 Aire de surfaces planes

Considérons maintenant une surface comprise entre deux courbes

$$E = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\},$$

où f et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues telles que $f(x) \geq g(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$.

On définit l'*aire* $\mathcal{A}(E)$ de E comme la différence des aires comprises sous les graphes de f et de g. Il vient donc

$$\mathcal{A}(E) = \int_a^b (f - g)(x)\, dx.$$

2 Définition de l'intégrale

La définition d'aire sous un graphe que nous avons décrite ci-dessus ne dépend en fait que de la fonction f. On peut donc l'abstraire de son contexte géométrique. De plus, on peut la généraliser sans peine au cas des fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornées.

Étant donné un découpage $D = \{x_i \mid a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ de l'intervalle $[a, b]$ et un ensemble $A = \{l_i \mid \forall x \in [x_{i-1}, x_i], l_i \leq f(x)\ (i = 1, \ldots, n)\}$, on définit le concept de *somme inférieure*

$$L(f, D, A) = l_1(x_1 - x_0) + l_2(x_2 - x_1) + \cdots + l_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} l_i(x_i - x_{i-1}).$$

Remarquez que f n'est pas nécessairement positive et donc que l_i peut être un nombre négatif.

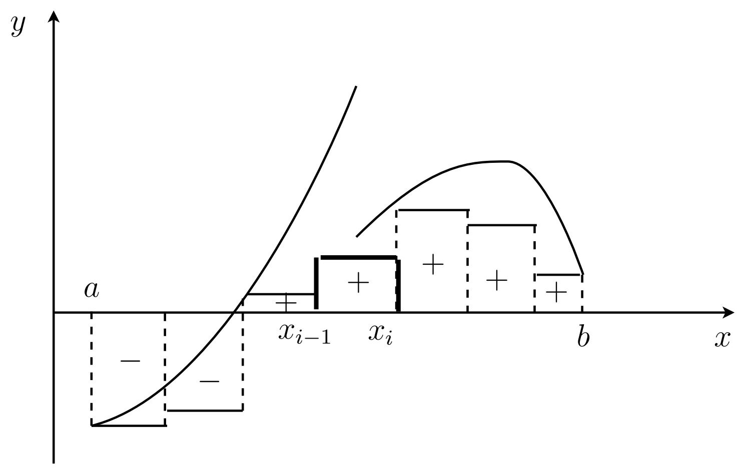


Fig.3

De même, si $E = \{z_i \mid a = z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_k = b\}$ est un découpage de $[a, b]$ et $B = \{u_i \mid \forall x \in [z_{i-1}, z_i], u_i \geq f(x)\ (i = 1, \ldots, n)\}$, on définit la *somme supérieure*

$$U(f, E, B) = u_1(z_1 - z_0) + u_2(z_2 - z_1) + \cdots + u_k(z_k - z_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k} u_i(x_i - x_{i-1}).$$

Finalement, on pose la définition suivante.

Définition – On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée est *intégrable (au sens de Riemann)* et que son intégrale vaut I si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une somme inférieure L et une somme supérieure U telles que

$$0 \leq I - L \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad 0 \leq U - I \leq \varepsilon.$$

Notation – On écrit

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dans cette notation, la lettre x est dite muette ce qui signifie qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre. On écrira aussi

$$I = \int_a^b f(u)\, du \quad \text{ou} \quad I = \int_a^b f(t)\, dt \quad \text{ou} \quad \ldots$$

D'autre part, si $a \leq b$, on utilise souvent les notations

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

Question 7.2 Pouvez-vous montrer que la définition ci-dessus implique que, s'il existe, le nombre $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ est unique ?

3 Propriétés des intégrales

Proposition 7.1 (Propriétés algébriques) *Soit f et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $k \in \mathbb{R}$. Alors*
(a) la fonction $f + g$ est intégrable et

$$\int_a^b (f + g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int g(x)\, dx,$$

(b) la fonction kf est intégrable et

$$\int_a^b kf(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx.$$

Proposition 7.2 (Normalisation) *La fonction constante* 1 *est intégrable et*

$$\int_a^b 1\,dx = b - a.$$

Proposition 7.3 (Additivité) *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable et* $c \in [a,b]$. *Alors les restrictions de* f *à* $[a,c]$ *et à* $[c,b]$ *sont intégrables et*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Proposition 7.4 (Croissance) *Soit* f *et* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions intégrables. Si de plus*

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) \leq g(x),$$

alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

À titre d'exercice, on peut déduire des propriétés ci-dessus les propositions suivantes. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.
(a) Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

(b) Si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq Mf(x).$$

(c) Si de plus $|f|$ est intégrable, alors

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Question 7.3 Dans la proposition (c) ci-dessus, l'intégrabilité de la fonction $|f|$ est-elle une conséquence de l'intégrabilité de f ?

4 La classe des fonctions intégrables

Confronté à la définition de fonctions intégrables, le lecteur doit se trouver des exemples de fonctions qui sont intégrables et d'autres de fonctions qui ne le sont pas.

Question 7.4 (a) Vérifiez que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = 0 \text{ si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \quad f(x) = 1 \text{ si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$$

n'est pas intégrable.
(b) Appliquez la définition de fonctions intégrables pour vérifier que la fonction $f(x) = x$ est intégrable sur l'intervalle $[0,1]$.

Problèmes – La question ci-dessus pose deux problèmes :
(a) Quelles sont les fonctions intégrables ? Peut-on indiquer des propriétés simples qui assurent qu'une fonction donnée est intégrable ?
(b) Peut-on développer des méthodes de calcul efficaces ? Il est clair que pour calculer l'aire sous le graphe de $f(x) = x$, $x \in [0,1]$, il est plus simple de remarquer qu'il s'agit d'un triangle dont l'aire est $1/2$.

Question 7.5 Si la définition d'intégrale est si difficile à utiliser en pratique, pourquoi a-t-on choisi de l'écrire de cette façon ?

Caractériser les fonctions intégrables n'est pas facile. Les deux théorèmes qui suivent, indiquent pourtant une large classe de fonctions qui ont cette propriété.

Théorème 7.5 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone, elle est intégrable sur $[a,b]$.*

Théorème 7.6 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, elle est intégrable sur $[a,b]$.*

La démonstration de ces théorèmes est assez délicate, elle ne sera pas abordée dans le cadre de ce cours. Notez pourtant que ces théorèmes ne sont pas optimum dans la mesure où il existe des fonctions intégrables qui ne sont ni monotones, ni continues.

Question 7.6 (a) Indiquez une fonction intégrable qui ne soit ni monotone, ni continue.
(b) Faites un diagramme de Venn qui représente les ensembles des fonctions continues, des fonctions monotones et des fonctions intégrables.

5 Primitives et intégrales

Primitives et intégrales sont fortement liées dans la mesure où calculer l'intégrale d'une fonction est facile si on en connaît une primitive. Pour expliquer cela, nous allons d'abord démontrer un résultat qui prolonge le Théorème 6-6.1. Ce dernier dit que toute fonction continue est primitivable, nous allons de plus indiquer explicitement une primitive.

Théorème 7.7 (Théorème d'existence des primitives) *Soit I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est une primitive de f.

Démonstration : Soit $x \in I$ et $h > 0$ tel que $x + h \in I$. On vérifie que

$$\min_{t\in[x,x+h]} f(t) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq \max_{t\in[x,x+h]} f(t),$$

et on en déduit

$$f(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ \neq}} \min_{t\in[x,x+h]} f(t) \leq \lim_{\substack{h\to 0\\ \neq}} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq \lim_{\substack{h\to 0\\ \neq}} \max_{t\in[x,x+h]} f(t) = f(x).$$

On procède de même si $h < 0$, on en déduit que F est dérivable au point x et on obtient que $F'(x) = f(x)$. ∎

Question 7.7 Détaillez la démonstration dans le cas où $h < 0$ et justifiez la dérivabilité de F au point x en indiquant le théorème sur les limites que vous devez utiliser.

Cette démonstration s'interprête facilement sur la figure ci-dessous, où on a représenté le graphe de f. L'aire hachurée est $F(x+h) - F(x)$ et le quotient différentiel est la hauteur moyenne de cette aire. Lorsque h tend vers zéro, cette hauteur moyenne tend bien vers $f(x)$.

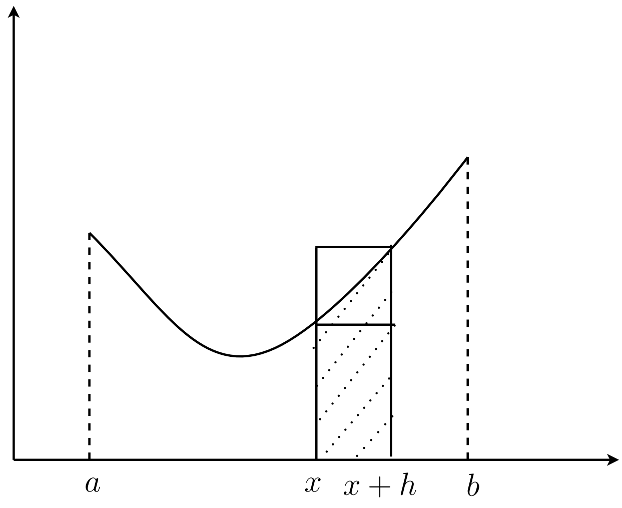


Fig.4

Le calcul des intégrales est un corollaire du résultat précédent.

Théorème 7.8 (Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral) *Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Si F est une primitive de f sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Question 7.8 Démontrez ce résultat dans le cas où f est continue.

Notation – On écrit souvent

$$F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b.$$

La question suivante a pour but de mieux cerner les liens entre fonctions intégrables et primitivables.

Question 7.9 (a) Trouvez une fonction intégrable qui n'a pas de primitive.
(b) Vérifiez que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{d}{dx}x^2 \sin(1/x^2)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, est primitivable mais non intégrable.
(c) Faites un diagramme de Venn qui représente les ensembles des fonctions continues, des fonctions primitivables et des fonctions intégrables.

En utilisant le Théorème 7.8, on peut traduire les propriétés des primitives en termes d'intégrales. On obtient ainsi des résultats d'intégration par parties et d'intégration par substitution.

Proposition 7.9 (Intégration par parties) *Soit f et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $C^1([a,b])$. Alors, on peut écrire*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = fg|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Question 7.10 Écrivez la démonstration de cette proposition.

Proposition 7.10 (Intégration par substitution) *Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : [a,b] \to [c,d]$ une fonction de classe $C^1([a,b])$. Alors la fonction $f(g(x))g'(x)$ est intégrable et*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Question 7.11 Écrivez la démonstration de cette proposition.

Remarque – Cette dernière proposition donne souvent lieu à un raccourci d'écriture que l'on trouvera souvent dans les applications. On veut calculer

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx,$$

où la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe $C^1([a,b])$. Pour faire le calcul, on pose $u = g(x)$ et on écrit $du = g'(x)dx$. Cette dernière écriture n'a pas de sens mathématique, mais elle est facile à retenir si on a écrit $\frac{du}{dx} = g'(x)$. On remplace formellement $g(x)$ par u, $g'(x)\,dx$ par du, on intègre de $g(a)$ à $g(b)$ et on obtient le bon résultat

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Par exemple, on veut calculer

$$\int_0^1 \frac{6x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

Un choix possible est $g(x) = x^2 + 1$. Pour faire le calcul, on pose $u = x^2 + 1$ et on écrit $du = 2x\,dx$. On remplace formellement $x^2 + 1$ par u, $2x\,dx$ par du, on intègre de $g(0) = 1$ $g(1) = 2$ et on obtient

$$\int_0^1 \frac{6x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_1^2 \frac{3}{\sqrt{u}}\,du.$$

À titre d'exercice, on peut déduire de la propriété 7.10 que si $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors

(a) si de plus f est paire,

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,$$

(b) si de plus f est impaire,

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

6 Somme de Riemann

La définition d'intégrale sous-tend bon nombre de concepts physiques. Nous avons vu que la notion d'aire lui est intimement liée. Il en est de même si on veut définir la longueur d'une courbe, la masse d'une plaque, le travail, la charge sur un fil, ... Dans tous ces problèmes, la quantité à définir peut être approximée par des sommes inférieure et supérieure comme nous l'avons fait ci-dessus. Il s'avère pourtant utile d'utiliser des approximations légèrement différentes. Dans ce but, nous aurons besoin de quelques définitions.

Définition – Soit un découpage

$$D = \{x_i \mid a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}.$$

On définit le *pas du découpage* $p = \max_i (x_i - x_{i-1})$ et on dit que l'ensemble

$$E = \{c_i \mid x_{i-1} \le c_i \le x_i, i = 1, \ldots, n\}$$

est une *une répartition de points associée au découpage D*. On définit alors la *somme de Riemann*

$$S(f, D, E) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

L'intérêt des sommes de Riemann réside principalement dans le théorème qui suit qui dit que l'intégrale est la "limite" de sommes de Riemann. Notez que le concept de limite défini par ce théorème n'est pas le concept de limite de fonctions bien qu'il en soit très voisin.

Théorème 7.11 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{p\to 0} S(f, D, E)$$

c.-à-d. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si D est un découpage pour lequel $p = \max\limits_i (x_i - x_{i-1}) \leq \delta$ et E une répartition de points associée à D, alors

$$|\int_a^b f(x)\,dx - S(f, D, E)| \leq \varepsilon.$$

La démonstration de ce théorème est assez longue. Nous ne la ferons pas.

Question 7.12 Écrivez explicitement une somme de Riemann pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$.

Chapitre 8

Fonctions de deux variables réelles

1 Introduction

Les fonctions de deux ou plusieurs variables réelles apparaissent aussi fréquemment dans les sciences que les fonctions d'une variable. Des fonctions de trois ou quatre variables sont courantes, parce qu'on étudie souvent la variation de grandeurs physiques qui dépendent de coordonnées spatiales x, y, z et, éventuellement, du temps. D'autres variables se rencontrent en particulier en thermodynamique, où on exprimera, par exemple, le volume d'une mole de gaz en fonction de la pression et de la température.

Exemple 1 - La température dans un four (ou un réacteur chimique) varie en fonction de la position dans le four (repérée par des coordonnées spatiales x, y, z) et varie en fonction du temps t. On peut donc considérer une fonction $T : D \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ qui, aux nombres x, y, z, t, associe la température $T(x, y, z, t)$ atteinte au point de coordonnées (x, y, z) à l'instant t.

Exemple 2 - Le relief d'une région peut être décrit par une fonction

$$h : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (\phi, \theta) \to h(\phi, \theta)$$

qui, à la longitude ϕ et à la latitude θ, associe l'altitude $h(\phi, \theta)$ au point dont les coordonnées sont (ϕ, θ) (l'ensemble D, que parcourent les coordonnées ϕ, θ, délimite la région à laquelle on s'intéresse).

Exemple 3 - La pression d'une mole de gaz est déterminée par son volume V et sa température absolue θ. Cette pression est donc la valeur d'une fonction

$$P : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (V, \theta) \mapsto P(V, \theta),$$

D étant l'ensemble des volumes et températures possibles pour cette mole de gaz. Pour un gaz parfait, $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et $P(V, \theta) = R\theta/V$ (R est la constante moléculaire des gaz parfaits). Une loi plus réaliste est celle de Van der Waals :

$$P(V, \theta) = \frac{R\theta}{V - b} - \frac{a}{V^2} \ ;$$

a et b sont des constantes qui dépendent du gaz envisagé. La fonction P ne sera évidemment considérée ici que pour

$$V > b \quad \text{et} \quad \frac{R\theta}{V-b} > \frac{a}{V^2}\,.$$

La théorie de la dérivation et de l'intégration pour les fonctions de plusieurs variables est plus riche et plus complexe que celle relative aux fonctions d'une variable. Pour une première introduction au sujet, on se limitera ici, pour simplifier, aux fonctions réelles de deux variables réelles. Après avoir examiné les modes de représentation de ces fonctions, on s'intéressera à leur continuité, puis à la définition et au calcul des dérivées, dont on tirera de premières utilisations. Enfin, dans un second chapitre, on considérera la définition et le calcul des intégrales de ces fonctions, appelées intégrales doubles.

2 Graphes.

Définition Une *fonction* f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est une règle qui, à tout élément (x, y) d'une partie D de $\mathbb{R}^2$, associe un nombre réel unique $f(x, y)$. L'ensemble D s'appelle le domaine de définition de f ; il est parfois noté Dom f.

On présentera souvent une telle fonction par l'écriture

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)\,.$$

En général, le domaine sera l'ensemble des couples (x, y) pour lesquels l'expression $f(x, y)$ a un sens ; par exemple, si

$$f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

il est naturel (mais pas obligatoire) de prendre pour domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le R^2\}.$$

Définition Le *graphe* de $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\mathrm{Gr}f = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ z = f(x, y)\}$$

On retiendra que le graphe de f est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$. Si on choisit un repère $Oxyz$ dans l'espace, on pourra représenter Gr f par un ensemble de points dans l'espace. En général, il s'agira d'une surface (une réserve est mise ici, car cet ensemble pourrait être trop "irrégulier" que pour être considéré comme une surface). Pour étudier cette surface, dont l'équation est $z = f(x, y)$, on pourra utiliser les outils vus en géométrie et, en particulier, s'aider de sections par des plans perpendiculaires aux axes.

Exemple 1 - La fonction (linéaire) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto ax + by$ a pour graphe la surface d'équation $z = ax + by$ ou $ax + by - z = 0$. On reconnaît là l'équation d'un plan passant par $(0, 0, 0)$ et perpendiculaire au vecteur de composantes $(a, b, -1)$.

Exemple 2 - La fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, où $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ est un disque de centre $(0,0)$ et de rayon R, a pour graphe la surface d'équation

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \tag{1}$$

On observe que cette surface est contenue dans la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$$

en fait, la sphère est l'union de la demi-sphère donnée par (1), située du côté $z \geq 0$, et de la demi-sphère d'équation

$$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

On notera ici qu'une sphère ne peut être le graphe d'une fonction. En effet, à tout (x,y) dans son domaine, une fonction associe une seule valeur $z = f(x,y)$. Géométriquement, cela signifie que, dans le système d'axes $Oxyz$, la parallèle Oz passant par le point $(x,y,0)$, coupe le graphe de f en le seul point $(x,y,f(x,y))$ (ou en aucun point, si $(x,y) \notin \mathrm{Dom}\, f$).

Exemple 3 - Le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ a pour équation $z = x^2 + y^2$. Il s'agit d'un paraboloïde de révolution, d'axe Oz.

Exemple 4 - Le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ a pour équation $z = x^2 - y^2$. C'est un paraboloïde hyperbolique.

Exemple 5 - Le graphe de la fonction

$$f : [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sin x - (\cos x)(\cos y)$$

a pour équation $z = \sin x - (\cos x)\cos y$.

3 Courbes de niveau

Dans l'étude des graphes de fonctions réelles de deux variables, les sections par des plans parallèles au plan Oxy jouent un rôle particulier.

Considérons l'intersection de Gr f par le plan $z = h$; cette intersection est un ensemble C (en général, une courbe) représenté par le système d'équations

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = h \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même, par

$$\begin{cases} f(x,y) = h \\ z = h. \end{cases}$$

En fait, l'équation $f(x,y) = h$ est l'équation, *dans le systèmes d'axes plan Oxy*, de la projection de C sur ce plan. L'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ représenté par cette équation est donc un ensemble de points où f prend une même valeur h ; il est appelé *courbe de niveau* de valeur h (le terme plus général *ensemble de niveau* peut être plus correct, dans la mesure où cet ensemble pourrait être trop “irrégulier” que pour être considéré comme une courbe).

Exemple 1 - Les courbes de niveau sont familières sur les cartes de géographie. Il s'agit d'ensembles de niveau donnant l'altitude comme fonction de la longitude et la latitude.

Exemple 2 - Pour la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$, les courbes de niveau ont pour équation $x^2 + y^2 = h$; ce sont des cercles de rayon $\sqrt{h}$ (si $h > 0$).

Exemple 3 - Les courbes de niveau de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

ont pour équation $x^2 - y^2 = h$. Il s'agit d'hyperboles coupant l'axe Ox si $h > 0$, l'axe Oy si $h < 0$.

4 Limites

La définition de limite pour une fonction de deux variables peut être construite sur le même mode que celle de limite pour une fonction d'une variable. Pour l'écrire, quelques préliminaires sont nécessaires, à commencer par la définition de "disque" et de point adhérent.

Définition Le *disque ouvert* de centre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $R > 0$ est l'ensemble

$$B((x_0, y_0); R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2\}.$$

Le point (x_0, y_0) est *adhérent* à l'ensemble (non vide) $D \subset \mathbb{R}^2$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe

$$(x, y) \in B((x_0, y_0); \varepsilon) \cap D.$$

En d'autres termes, (x_0, y_0) est adhérent à D s'il existe des points dans D arbitrairement proches de (x_0, y_0). Il va de soi qu'un point contenu dans D est adhérent à D. On peut à présent définir la notion de limite en un point pour une fonction de deux variables.

Définition Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et (x_0, y_0) un point adhérent au domaine D. On dit que le réel L est la limite de $f(x, y)$ lorsque (x, y) tend vers (x_0, y_0) et on écrit

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

si, pour tout réel $\varepsilon > 0$ donné, il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$(x, y) \in B((x_0, y_0); \delta) \cap D \Longrightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon. \tag{2}$$

Si on suppose, par exemple, que $D = \mathbb{R}^2$, la définition ci-dessus signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un disque $B((x_0, y_0); \delta)$ dont l'image est contenue dans l'intervalle $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$.

Avec la définition de limite telle qu'elle est écrite ci-dessus, si f est définie au point (x_0, y_0), on doit nécessairement avoir $f(x_0, y_0) = L$. On sera attentif au fait que d'autres conventions sont parfois choisies ; on peut décider d'exclure (x_0, y_0) de l'ensemble des points pour lesquels (2) est vérifié. Le choix de l'une ou l'autre définition aura des conséquences sur l'énoncé de certains résultats (on se rapportera à ce propos aux remarques mises sur le même thème pour les fonctions d'une variable).

On peut établir, concernant les limites de fonctions de deux variables, des règles de calcul analogues à celles bien connues pour les fonctions d'une variable. Elles sont données ci-dessous sans démonstration.

Théorème 8.1 *Supposons que*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1 \quad \textit{et} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_2$$

Alors,

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) + g(x,y) = L_1 + L_2\,;$

(ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) - g(x,y) = L_1 - L_2\,;$

(iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \cdot g(x,y) = L_1 \cdot L_2\,;$

(iv) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}$, *si* $L_2 \neq 0$.

Théorème 8.2 (Théorème de l'étau) *Soient f, g et h des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que*

$$f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y) \textit{ sur un disque ouvert de centre } (x_0,y_0).$$

Supposons que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = L\,.$$

Alors, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$ *existe et vaut L.*

On peut également donner une règle relative à la limite de fonctions composées.

Théorème 8.3 *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, $\varphi : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable et soit (x_0,y_0) un point adhérent au domaine de $\varphi \circ f$ (supposé non vide). Alors, si*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \textit{et} \quad \lim_{u\to L} \varphi(u) = K,$$

on aura

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (\varphi \circ f)(x,y) = K.$$

5 Continuité

La continuité pour les fonctions de deux variables se définit de manière tout-à-fait analogue à la continuité pour les fonctions d'une variable.

Définition Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit (x_0,y_0) un point de D. Alors, f est *continue au point* (x_0,y_0) si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

On dit que f est *continue* si elle est continue en tout point de son domaine.

Des règles de continuité peuvent aisément être tirées des théorèmes cités plus haut à propos des limites.

Théorème 8.4 *Soient f et g deux fonctions réelles de deux variables réelles, continues au point (x_0, y_0). Alors, les fonctions $f+g$, $f-g$ et $f \cdot g$ sont continues au point (x_0, y_0). Il en va de même pour f/g si $g(x_0, y_0) \neq 0$.*

Il résulte en particulier du théorème ci-dessus que les polynômes en deux variables sont des fonctions continues en tout point de $\mathbb{R}^2$. En ce qui concerne les fonctions composées, on a le résultat suivant.

Théorème 8.5 *Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue au point $(x_0, y_0) \in D$ et $\varphi : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue au point $f(x_0, y_0)$ (supposé appartenir à E), alors $\varphi \circ f$ est continue au point (x_0, y_0).*

Par exemple, les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$ tout entier :

$$(x, y) \mapsto \ln\left(\frac{1+x^2}{1+y^2}\right),$$

$$(x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^3 - 1),$$

$$(x, y) \mapsto x + \sin^2(x + e^{y-x^2});$$

dans le dernier cas, plusieurs compositions successives interviennent.

Si les règles présentées ci-dessus apparaissent comme une adaptation "naturelle" des règles vues pour les fonctions d'une variable, un piège existe cependant dans l'étude de la continuité des fonctions de deux variables. On peut être tenté en effet de se ramener (abusivement) à l'étude de fonctions d'une variable en associant à $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in D$, les fonctions d'une variable

$$f_1 : x \mapsto f(x, y_0) \quad (y_0 \text{ est ici fixé }),$$

et

$$f_2 : y \mapsto f(x_0, y) \quad (x_0 \text{ fixé })$$

et en étudiant uniquement la continuité de ces dernières.

Remarque - Il importe de noter que la continuité, respectivement en x_0 et en y_0, des fonctions f_1 et f_2, définies ci-dessus, n'implique pas la continuité de f elle-même au point (x_0, y_0). Si on considère, par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$, on constate que les fonctions $x \mapsto f(x, 0)$ et $y \mapsto f(0, y)$ sont identiquement nulles, donc continues. Or, la fonction f n'est pas continue en $(0, 0)$, car

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

n'est pas 0 (et n'existe d'ailleurs pas). Pour s'en convaincre, il suffit de noter que, pour tout $\delta \neq 0$, $f(\delta, \delta) = 1/2$. Dès lors, si on prend $0 < \varepsilon < 1/2$, on ne peut trouver de réel $\delta > 0$ tel que l'image par f du disque $B((0, 0); \delta)$ soit contenue dans $]-\varepsilon, \varepsilon[$, ce qui montre que 0 ne peut être la limite de f en $(0, 0)$ (on se reportera la définition de limite).

6 Dérivées partielles.

Dans cette section, on va introduire un premier type de dérivées pour les fonctions de deux variables, à savoir les dérivées partielles. Celles-ci s'obtiennent, comme on le verra, en "bloquant" une des variables et en dérivant la fonction d'une variable qui en résulte.

Pour le calcul des dérivées, il sera prudent de se limiter à des points intérieurs au domaine de définition.

Définition Le point (x_0, y_0) est dit *intérieur à l'ensemble* D s'il existe un réel $\delta > 0$ tel que le disque $B((x_0, y_0); \delta)$ soit contenu tout entier dans D.

Considérons donc une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et un point (x_0, y_0) intérieur à D. À la fonction f et à (x_0, y_0), associons les fonctions d'une variable

$$f_1 : x \mapsto f(x, y_0) \tag{3}$$

et

$$f_2 : y \mapsto f(x_0, y) \tag{4}$$

déjà rencontrées plus haut ; comme (x_0, y_0) est intérieur à D, la première de ces deux fonctions est définie sur un voisinage de x_0, la seconde sur un voisinage de y_0. Les dérivées partielles de f au point (x_0, y_0) sont des dérivées des fonctions f_1 et f_2 données par (3) et (4). Plus précisément, on a la définition suivante.

Définition La *dérivée partielle de* f*, par rapport à* x, au point (x_0, y_0), est la dérivée, au point x_0, de la fonction

$$f_1 : x \mapsto f(x, y_0).$$

Elle se note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ou $D_1 f(x_0, y_0)$ ou parfois $f_x(x_0, y_0)$.

De même la *dérivée partielle de* f*, par rapport à* y, au point (x_0, y_0), est la dérivée, au point y_0, de la fonction

$$f_2 : y \mapsto f(x_0, y).$$

Elle se note $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ou $D_2 f(x_0, y_0)$, ou $f_y(x_0, y_0)$.

Si on se reporte à la définition de dérivée pour les fonctions d'une variable, on peut écrire

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k};$$

en fait, la fonction f admet des dérivées partielles (d'ordre 1) au point (x_0, y_0) si ces limites existent (le choix de notations différentes h et k pour les accroissements dans ces formules est une simple question de convention).

On retiendra que, pour calculer $\partial f/\partial x(x_0, y_0)$ par exemple, on commence par "bloquer" la dernière variable et on calcule ensuite la dérivée de la fonction $f_1 : x \mapsto f(x, y_0)$, ce qui peut être fait en appliquant les règles habituelles de calcul pour les fonctions d'une variable.

Exemple - Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto e^{2x}\cos(xy^2)$ et le point $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Pour évaluer $\partial f/\partial x(0, 0)$, on doit dériver, au point 0, la fonction $f_1 : x \mapsto f(x, 0) = e^{2x}$. On a donc immédiatement

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left[\frac{d}{dx}e^{2x}\right]_{x=0} = 2.$$

De manière analogue, $\partial f/\partial y(0, 0)$ est la dérivée, au point 0, de la fonction $f_2(y) = f(0, y) = 1$. Cette fonction étant constante, il est clair que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Plus généralement, on peut calculer les dérivées partielles de f en un point quelconque (x, y). On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2e^{2x}\cos(xy^2) - y^2e^{2x}\sin(xy^2)$$

(ce résultat s'obtient simplement en traitant y comme une constante dans l'expression de $f(x, y)$, et en calculant la dérivée par rapport à x) ; de même, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2xye^{2x}\sin(xy^2).$$

La dérivée partielle $\partial f/\partial x(x_0, y_0)$ est, comme on l'a vu, une dérivée de la fonction d'une variable $x \mapsto f(x, y_0)$. Or, on sait que cette dérivée peut être interpretée comme la pente d'une tangente au graphe de cette dernière fonction. Ce graphe est une courbe qu'on peut obtenir en coupant le graphe de f (qui est, en général, une surface) par le plan $y = y_0$ (voir ci-dessous). Par conséquent, $\partial f/\partial x(x_0, y_0)$ *peut être interpretée comme donnant la pente d'une tangente à une section de* $\mathrm{Gr}\, f$.

Certaines conséquences peuvent être tirées de l'interprétation géométrique donnée ci-dessus. Par exemple, si la fonction f a un maximum au point (x_0, y_0) il est clair qu'il en ira de même pour la fonction d'une variable $f_1 : x \mapsto f(x, y_0)$, ce qui entraîne que $\partial f/\partial x(x_0, y_0) = 0$, si cette dérivée partielle existe. Il en ira de même pour $\partial f/\partial y(x_0, y_0)$.

Il est important d'observer que l'existence des dérivées partielles de f au point (x_0, y_0) n'entraîne pas la continuité de f au point (x_0, y_0). Pour le voir, on peut considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$, déjà rencontrée plus haut. Il est facile de calculer les dérivées partielles de f au point $(0, 0)$. En fait, comme les fonctions $x \mapsto f(x, 0)$ et $y \mapsto f(0, y)$ sont identiquement nulles, ces dérivées partielles sont nulles. Cependant, comme on l'a vu précédemment, cette fonction n'est pas continue en $(0, 0)$.

Le défaut de continuité pour certaines fonctions admettant des dérivées partielles est une des raisons qui nous amèneront à introduire une propriété de dérivabilité "plus forte" que l'existence des dérivées partielles, à savoir la différentiabilité.

7 Dérivées partielles d'ordre 2

Si le point (x_0, y_0) est intérieur à l'ensemble de définition de la fonction $(x, y) \mapsto \partial f/\partial x(x, y)$, on peut envisager de calculer, à leur tour, les dérivées partielles de cette fonction au point (x_0, y_0). Puisqu'on aura ainsi dérivé deux fois, on parlera de dérivées partielles d'ordre 2. En fait, ces dérivées sont au nombre de 4 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Les deux premières, par exemple, sont définies par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0),$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0).$$

En retournant à la définition de dérivée pour les fonctions d'une variable, on peut aussi écrire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{h}.$$

Exemple - Pour la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto e^{2x} \cos(xy^2)$, on peut calculer que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= e^{2x}[4\cos(xy^2) - y^4 \cos(xy^2) - 4y^2 \sin(xy^2)] \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2ye^{2x}[xy^2 \cos(xy^2) - \sin(xy^2) - 2x \sin(xy^2)] \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -2xe^{2x}[2xy^2 \cos(xy^2) - \sin(xy^2)].
\end{aligned}$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 interviennent dans plusieurs équations importantes de la physique mathématique. Par exemple, l'équation

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{D}\frac{\partial u}{\partial t},$$

appelée équation de la chaleur ou équation de diffusion, fournit un modèle pour la diffusion de chaleur dans un milieu conducteur. On peut vérifier que la fonction

$$u : (x, t) \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

est une solution de cette équation. L'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t^2}$$

permet, quant à elle, de modéliser la propagation d'ondes acoustiques ou électromagnétiques.

8 Différentiabilité et plan tangent au graphe

Comme on l'a vu plus haut, l'existence de dérivées partielles au point (x_0, y_0) n'implique pas la continuité de f en ce point. On ne peut dès lors pas attendre, pour une fonction ayant des dérivées partielles au point (x_0, y_0), que le graphe admette nécessairement un plan tangent au point correspondant, à savoir au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. On se propose ci-dessous de trouver une condition (plus forte que la simple existence des dérivées partielles) qui assurera l'existence de ce plan tangent.

Bien que l'existence de dérivées partielles au point (x_0, y_0) n'entraîne pas celle d'un plan tangent, elle assure cependant, comme on l'a vu plus haut, l'existence de tangentes aux graphes de

$$f_1 : x \mapsto f(x, y_0) \text{ et } f_2 : y \mapsto f(x_0, y)\,.$$

Or, ces graphes peuvent être vus comme des sections dans le graphe de f, respectivement par le plan $y = y_0$ et par le plan $x = x_0$. Si un plan tangent existe, il devra donc contenir les deux tangentes dont il est question ci-dessus. Mais, il est facile de voir que la tangente au premier graphe, au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, a dans le système d'axes $Oxyz$, la direction du vecteur $\vec{u} = (1, 0, \partial f/\partial x(x_0, y_0))$ (cette tangente se trouve dans un plan parallèle au plan Oxz), tandis que la tangente au second graphe, au même point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, a la direction du vecteur $\vec{v} = (0, 1, \partial f/\partial y(x_0, y_0))$.
Le plan tangent, s'il existe, devra être perpendiculaire au vecteur

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1\right)$$

et aura donc pour équation

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{5}$$

compte tenu du fait qu'il passe par le point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Il reste à écrire une condition qui garantira que le plan, dont l'équation est donnée par (5), est bien tangent au graphe de f. Cette condition est

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - \left[f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\right]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0. \tag{6}$$

Pour interpréter cette condition, on observe que le numérateur, dans la fraction dont on calcule la limite, représente l'écart, entre un point de Gr f et le point du plan (5) se trouvant sur la même parallèle Oz, tandis que le dénominateur représente la distance entre les points (x, y) et (x_0, y_0). La condition (6) signifie dès lors que lorsque (x, y) tend vers (x_0, y_0), *l'écart entre le graphe de f et le plan (5) tend vers 0 plus vite que la distance entre (x, y) et (x_0, y_0).*

Cela peut s'interpréter comme une condition de tangence du plan d'équation (5), par rapport au graphe de f. Si la condition (6) est remplie, on dira que f est différentiable au point (x_0, y_0). Plus précisément, on a la définition suivante.

Définition La fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est *différentiable* au point (x_0, y_0) intérieur à D si

(i) f admet des dérivées partielles au point (x_0, y_0) ;

(ii) la condition (6) est remplie.

Remarquons que la condition (6) revient à dire que l'on peut écrire

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + R(h, k),$$

où

$$\lim_{(k,h)\to(0,0)} \frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

On peut alors reprendre l'interprétation géométrique de la condition (6) en disant que la fonction

$$F(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k)$$

qui nous intéresse peut être approximée par la fonction affine

$$G(h, k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$$

moyennant une erreur $R(h, k)$ qui tend vers zéro plus vite que la distance $\sqrt{h^2 + k^2}$ entre (x, y) et (x_0, y_0).

On notera que l'équivalent de (6) pour une fonction d'une variable serait

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0. \tag{7}$$

Mais cette dernière condition est équivalente à

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

ou encore

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

qui n'est rien d'autre que la définition de dérivée. Par conséquent, pour une fonction d'une variable, l'existence de la dérivée $f'(x_0)$ équivaut à la condition de différentiabilité (7). Il n'en va pas de même pour les fonctions de deux variables : la condition (6) ne découle pas de la seule existence des dérivées partielles. Cette différence de situation explique que la théorie de la dérivation soit plus simple pour les fonctions d'une variable que pour les fonctions de plusieurs variables.

Il est facile de montrer par ailleurs que la continuité est une conséquence de la différentiabilité.

Proposition 8.6 *Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable au point (x_0, y_0) intérieur à D, f est continue au point (x_0, y_0).*

Démonstration. De (6), on déduit que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y) - \left(f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \right) \right] = 0 \quad (8).$$

Or,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \right) = f(x_0,y_0) \qquad (9)$$

(la fonction dont on prend la limite est en fait un polynôme en x, y, donc une fonction continue ; sa limite en (x_0, y_0) est par conséquent égale à sa valeur en (x_0, y_0)). Combinant (8) et (9), on voit que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

ce qui signifie que f est continue au point (x_0, y_0). □

Le critère suivant permet d'établir aisément la différentiabilité de nombreuses fonctions ; il est donné sans démonstration.

Proposition 8.7 *Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a des dérivées partielles d'ordre 1 définies sur un disque ouvert contenant le point (x_0, y_0) (intérieur D) et si ces dérivées partielles sont continues au point (x_0, y_0), f est différentiable au point (x_0, y_0).*

Il résulte en particulier de cette proposition que tous les polynômes en x, y sont différentiables en tout point de $\mathbb{R}^2$.

9 Différentielle et approximation affine.

Supposons f différentiable au point (x_0, y_0). La formule (6) suggère l'approximation

$$f(x,y) \simeq f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\ ; \qquad (10)$$

on parle d'approximation affine, le second membre étant une fonction affine, c'est-à-dire un polynôme du premier degré en $x - x_0$, $y - y_0$ (ou en x, y). Le sens précis de l'approximation (10) est donné par (6) : quand (x, y) tend vers (x_0, y_0), la condition (6) indique que l'écart entre les deux membres de (10) tend vers 0 plus vite que la distance $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ entre les points (x, y) et (x_0, y_0). Géométriquement, l'approximation consiste à approcher des points du graphe de f par des points du plan tangent au graphe en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Si on pose $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$, on peut récrire (10) sous la forme

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \simeq f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$$

ou encore

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)k. \tag{11}$$

Dans cette écriture, on peut interpréter le membre de gauche comme un accroissement dans la valeur de f, résultant de “petits” accroissements h, k des variables dont dépend f ; le membre de droite fournit une approximation de cet accroissement de f. En supposant toujours f différentiable au point (x_0, y_0), l'application (linéaire)

$$(h, k) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k,$$

qui intervient au second membre de (11), est appelée *différentielle* (on utilise parfois simplement le terme de dérivée) de f au point (x_0, y_0).

La formule (11) est à rapprocher de la formule correspondante pour les fonctions d'une variable ; cette dernière s'écrit

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \simeq f'(x_0)h; \tag{12}$$

on notera cependant que (12) est applicable dès que f est dérivable au point x_0, alors que (11) n'est valable que si f est différentiable au point (x_0, y_0) (l'existence de dérivées partielles ne suffit pas pour que (11) constitue une approximation acceptable).

Dans les applications, on traduira souvent (11) dans d'autres notations. Comme h et k sont des accroissements portant sur les variables x et y respectivement, on les notera parfois Δx et Δy, tandis que le membre de gauche dans (11), qui est un accroissement de la fonction f, sera noté Δf, de sorte que (11) s'écrit

$$\Delta f \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y. \tag{13}$$

Comme cette approximation est d'autant meilleure que Δx et Δy sont petits, il est tentant de considérer qu'elle devient une égalité quand on passe à des accroissements “infinitésimaux”, ce qui amène à écrire

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy, \tag{14}$$

en considérant que dx, dy, df sont des quantités “infinitésimales”. Malheureusement, bien que cette extrapolation soit intuitivement attrayante, elle se heurte à la difficulté de donner un sens précis à ces quantités infinitésimales ; on évitera dès lors de les utiliser ici. (Il faut noter aussi qu'on parle parfois de différentielle pour le df dans (14) ; cette définition n'est pas satisfaisante ; il faut lui préférer la définition donnée plus haut).

Les formules équivalentes (10), (11) ou (13) sont fréquemment utilisées pour estimer de petits accroissements d'une fonction. On en donne ci-dessous quelques exemples.

Problème 1 - *On considère un cylindre de rayon r et de hauteur h. On demande d'estimer l'accroissement de volume résultant d'une dilatation des longueurs de* 1.

Le volume est donné, comme fonction du rayon r et de la hauteur h, par la formule

$$V(r,h) = \pi r^2 h, \tag{15}$$

où V apparaît comme fonction de deux variables.

Par analogie avec la formule (12), des accroissements Δr du rayon et Δh de la hauteur provoquent un accroissement ΔV du volume, donné approximativement par

$$\Delta V \simeq \frac{\partial V}{\partial r}(r,h)\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}(r,h)\Delta h,$$

ou, après calcul des dérivées partielles,

$$\Delta V \simeq 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h.$$

Par hypothèse, $\Delta r/r = 0,01$ et $\Delta h/h = 0,01$. Il en résulte que

$$\Delta V \simeq 2\pi r^2 h \times 0,01 + \pi r^2 h \times 0,01$$

ou

$$\Delta V \simeq 3\pi r^2 h \times 0,01\,.$$

Si on considére l'accroissement relatif de volume $\Delta V/V$, on voit, compte tenu de (15), que

$$\frac{\Delta V}{V} = 0,03,$$

ce qui signifie que l'accroissement relatif de volume est d'environ 3%.

Problème 2 - *Considérons une mole de gaz, supposée régie par la loi des gaz parfaits*

$$P(V,\Theta) = \frac{R\Theta}{V},$$

donnant le pression P comme fonction du volume V et de la température absolue Θ (R est la constante des gaz parfaits). On demande d'estimer la variation de pression résultant d'une augmentation de volume de 2% et d'une augmentation de température (absolue) de 1%.

La pression étant donnée comme fonction de 2 variables, on peut écrire une formule analogue à (13) :

$$\Delta P \simeq \frac{\partial P}{\partial V}(V,\Theta)\Delta V + \frac{\partial P}{\partial \Theta}(V,\Theta)\Delta\Theta.$$

En calculant les dérivées partielles, elle donne

$$\Delta P \simeq -\frac{R\Theta}{V^2}\Delta V + \frac{R}{V}\Delta\Theta.$$

On a supposé que $\Delta V/V = 0,02$ et $\Delta\Theta/\Theta = 0,01$; il en résulte que

$$\Delta P \simeq -\frac{R\Theta}{V} \times 0,02 + \frac{R\Theta}{V} \times 0,01 = -\frac{R\Theta}{V} \times 0,01.$$

Finalement, l'accroissement relatif de pression est donné par

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta P}{R\Theta/V} \simeq -0,01;$$

il y a donc une diminution de pression d'environ 1%.

Le type d'approximation rencontré ci-dessus s'utilise aussi fréquemment quand il s'agit d'estimer l'erreur sur une fonction résultant d'erreur sur ses arguments. Supposons qu'on veuille évaluer une grandeur z, à partir de mesures de grandeurs x et y, z étant donné par $z = f(x, y)$. La formule (13) donne (approximativement) l'erreur Δf sur z résultant d'erreurs Δx et Δy sur x et y.

Problème 3 - *La période T des petites oscillations d'un pendule est donnée comme fonction de la longueur ℓ du pendule et de l'accélération g de la pesanteur par*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Supposons qu'on veuille estimer g partir de mesures de T et de ℓ. Si T est estimé avec une erreur de l'ordre de $0,5\%$ et ℓ avec une erreur de l'ordre de 1%, quelle est l'erreur résultante sur g ?

On commence par écrire g comme fonction de T et de ℓ :

$$g(T, \ell) = \frac{4\pi^2\ell}{T^2}.$$

L'application de (13) à cette fonction donne

$$\Delta g \simeq \frac{\partial g}{\partial T}\Delta T + \frac{\partial g}{\partial \ell}\Delta \ell\,,$$

ou, en calculant les dérivées partielles,

$$\Delta g \simeq -\frac{8\pi^2\ell}{T^3}\Delta T + \frac{4\pi^2}{T^2}\Delta \ell\,. \tag{16}$$

On ne connaît pas ici le signe des erreurs ΔT et $\Delta\ell$. La seule information dont on dispose est que

$$|\Delta T/T| \simeq 0,005 \text{ et } |\Delta\ell/\ell| \simeq 0,01. \tag{17}$$

Pour l'utiliser, on doit passer aux valeurs absolues dans (16), ce qui donne

$$|\Delta g| \lesssim \frac{8\pi^2\ell}{T^3}|\Delta T| + \frac{4\pi^2}{T^2}|\Delta \ell|$$

(il s'agit d'une inégalité approximative) ou, compte tenu de (17),

$$|\Delta g| \lesssim \frac{8\pi^2\ell}{T^2} \times 0,005 + \frac{4\pi^2\ell}{T^2} \times 0,01.$$

En divisant par $g(T,\ell) = 4\pi^2\ell/T^2$, on voit que

$$\frac{|\Delta g|}{g} \lesssim 0,02,$$

ce qui signifie que l'erreur sur g est de l'ordre de 2%.

10 Gradient.

Si f est différentiable au point (x_0, y_0), le vecteur (de $\mathbb{R}^2$)

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

est appelé *gradient* de f au point (x_0, y_0). Il se note aussi $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$. La direction de ce vecteur donne une information utile sur la manière dont f varie à proximité du point (x_0, y_0).

Théorème 8.8 *Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable au point (x_0, y_0) (intérieur à D) et si le vecteur $\nabla f(x_0, y_0)$ n'est pas nul, il donne la direction suivant laquelle f augmente le plus vite à proximité du point (x_0, y_0).*

La direction dont il est question ci-dessus est appelée *direction de plus forte pente.*

Démonstration. Ce qu'on va démontrer en fait, c'est que $\nabla f(x_0, y_0)$ donne la direction suivant laquelle l'approximation affine de f, fournie par (10), augmente le plus vite. Appelons g cette approximation affine, c'est-à-dire que

$$g(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0),$$

ce qu'on peut encore écrire, en observant que $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0)$,

$$g(x,y) = g(x_0,y_0) + \langle \nabla f(x_0,y_0), (x-x_0, y-y_0)\rangle,$$

le crochet $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désignant un produit scalaire. En introduisant le vecteur $\vec{v} = (x-x_0, y-y_0)$, on a donc

$$g(x,y) = g(x_0,y_0) + \langle \nabla f(x_0,y_0), \vec{v}\rangle$$

ou, en remplaçant le produit scalaire par le produit des normes multiplié par le cosinus de l'angle,

$$g(x,y) - g(x_0,y_0) = \|\nabla f(x_0,y_0)\|\|\vec{v}\| \cos(\nabla f(x_0,y_0), \vec{v}). \tag{18}$$

On va fixer la norme de $\vec{v}$ et en faire varier la direction, ce qui revient à promener (x, y) sur un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon $\|\vec{v}\|$, puisque $(x, y) = (x_0, y_0) + \vec{v}$. On cherche sur ce cercle le point (x, y) pour lequel l'accroissement $g(x, y) - g(x_0, y_0)$ est maximal. Compte tenu de (18), cet accroissement est maximal quand

$$\cos(\nabla f(x_0, y_0), \vec{v}) = 1,$$

c'est-à-dire quand $\vec{v}$ a la même direction et le même sens que $\nabla f(x_0, y_0)$. Cette conclusion est indépendante de $\|\vec{v}\|$; on a donc bien montré que f augmente le plus vite dans la direction de $\nabla f(x_0, y_0)$. $\square$

Intuitivement, on conçoit que la direction de plus forte pente doit être perpendiculaire à la courbe de niveau passant par le point (x_0, y_0). Autrement dit, le vecteur $\nabla f(x_0, y_0)$, s'il est non nul, est perpendiculaire à cette courbe de niveau.

Chapitre 9

Intégrales doubles

1 Introduction

Alors que pour les fonctions d'une variable, la notion d'intégrale est étroitement liée au calcul des aires, pour les fonctions de deux variables, les intégrales, appelées intégrales doubles, sont liées au calcul de volumes.

On commencera par considérer le cas, plus simple, d'une fonction définie sur un rectangle R dont les côtés sont parallèles aux axes Ox et Oy. Un tel rectangle peut être décrit comme le produit cartésien d'intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$, représentant respectivement les côtés parallèles à Ox et à Oy :

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b],\ y \in [c, d]\}.$$

On supposera toujours dans la suite $a < b$ et $c < d$.

Pour fixer les idées, supposons $f(x, y) \geq 0$, pour tout $(x, y) \in R$. Le graphe de f, qui a pour équation $z = f(x, y)$ est une surface (du moins si f est continue), située "au-dessus" du rectangle R. Cette surface, le rectangle R et les plans $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ délimitent un ensemble ; on parlera de "solide" pour un tel ensemble $V \subset \mathbb{R}^3$ (voir Fig. 1).

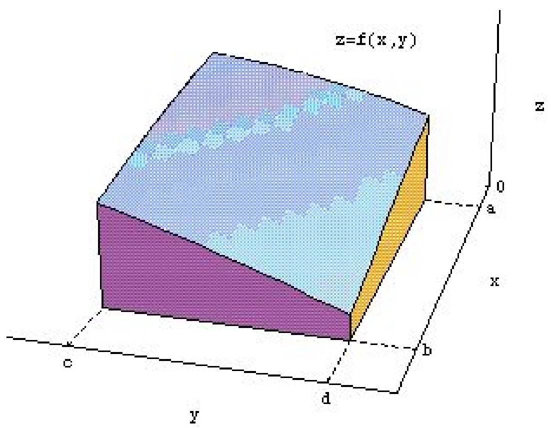


Fig. 1

En définissant l'intégrale de f sur R, qu'on notera

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

ou, plus brièvement,

$$\iint_R f\,dx\,dy,$$

on vise à obtenir le volume de l'ensemble V. On veut aussi que la définition de l'intégrale réponde aux exigences suivantes (à mettre en parallèle avec celles du Chapitre 6 pour les intégrales de fonctions d'une variable, qu'on appellera, par opposition, intégrales simples) :

(i) Si f a une valeur constante $K \geq 0$ sur R, $\iint_R f\,dx\,dy$ doit représenter le volume d'un parallélépipède rectangle de base R et de hauteur K, c'est-à-dire que

$$\iint_R f\,dx\,dy = K \times \text{aire}\,R = K(b-a)(d-c).$$

(ii) On veut que l'opération d'intégration soit *linéaire*, c'est-à-dire que

$$\iint_R (f+g)\,dx\,dy = \iint_R f\,dx\,dy + \iint_R g\,dx\,dy,$$

$$\iint_R \alpha f\,dx\,dy = \alpha \iint_R f\,dx\,dy \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Cela impose en particulier que, pour toute constante K, positive ou non, on ait

$$\iint_R K\,dx\,dy = \iint_R K \cdot 1\,dx\,dy = K \iint_R 1\,dx\,dy = K(b-a)(d-c).$$

(iii) On veut que l'opération soit *additive*, ce qui signifie en particulier que, si $s \in \,]a,b[$ et si on pose

$$R_1 = [a,s] \times [c,d], \quad R_2 = [s,b] \times [c,d],$$

on ait

$$\iint_R f\,dx\,dy = \iint_{R_1} f_1\,dx\,dy + \iint_{R_2} f_2\,dx\,dy,$$

où f_1 et f_2 sont les restrictions de f aux rectangles R_1 et R_2. On demandera évidemment un résultat analogue pour un découpage du rectangle R construit à partir d'un découpage de l'intervalle $[c,d]$ en deux sous-intervalles.

2 Définition des intégrales doubles sur des rectangles

Le schéma est tout à fait analogue à celui de la définition des intégrales simples ; on se contentera dès lors de le décrire brièvement.

On commence par introduire, comme au Chapitre 6, les fonctions en escalier. Leur définition passe par celle de *découpage* d'un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$. Le découpage du rectangle se construit à partir de découpages $(a_0, ..., a_r)$ de $[a, b]$ et $(c_0, ..., c_s)$ de $[c, d]$. Ces découpages d'intervalles déterminent des sous-rectangles ouverts

$$R_{ij} =]a_i, a_{i+1}[\times]c_j, c_{j+1}[\quad (i = 0, ..., r-1; j = 0, ..., s-1)\,;$$

R est l'union des rectangles fermés correspondants. On dit que $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une *fonction en escalier* s'il existe un découpage de R tel que f ait une valeur constante K_{ij} sur chaque sous-rectangle ouvert R_{ij}. L'intégrale de cette fonction en escalier est définie par

$$\iint_R f\,dx\,dy = \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{s-1} K_{ij}\,\text{aire}\,R_{ij} = \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{s-1} K_{ij}(a_{i+1}-a_i)(c_{i+1}-c_i).$$

On peut vérifier que les exigences formulées dans l'introduction sont rencontrées pour les intégrales de fonctions en escalier, ainsi définies. Si f est à valeurs positives, la double somme ci-dessus représente une somme de volumes de parallélépipèdes rectangles situés entre le graphe de f et le rectangle R. Comme pour les intégrales simples, on passe de la définition des intégrales de fonctions en escalier à celle d'intégrales de fonctions bornées, via les notions d'intégrale inférieure et d'intégrale supérieure. Considérons donc une fonction *bornée* $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre M tel que $|f(x, y)| \leq M$, pour tout $(x, y) \in R$. On appellera Min f l'ensemble des fonctions en escalier g sur R, telles que

$$g(x, y) \leq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in R.$$

A chacune de ces fonctions, on peut associer une intégrale $\iint_R g\,dx\,dy$. On a représenté ci-dessous des parallélépipèdes rectangles dont la somme des volumes représente $\iint_R g\,dx\,dy$.

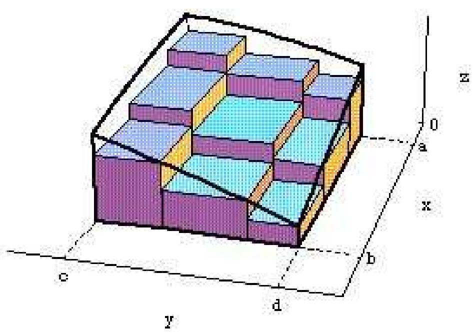


Fig. 2

On désignera par $L(f)$ l'ensemble des intégrales de fonctions en escalier $g \in$ Min f. On vérifie comme au Chapitre 6 que l'ensemble $L(f) \subset \mathbb{R}$ est non vide et majoré. Il admet donc un supremum qu'on appelle *intégrale inférieure* de f sur R et qu'on note

$$\underline{\iint}_R f\,dx\,dy.$$

De même, en travaillant avec des fonctions en escalier dont les valeurs sont supérieures aux valeurs de f, on peut définir *l'intégrale supérieure* de f sur R comme l'infimum des intégrales de ces fonctions en escalier. On la note

$$\overline{\iint}_R f\,dx\,dy.$$

Comme pour les intégrales simples, on dit qu'une fonction bornée $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est *intégrable* (au sens de Riemann-Darboux) sur le rectangle R si les intégrales inférieure et supérieure de f sur R sont égales. La valeur commune est alors appelée *intégrale de f sur R* et notée

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy.$$

Une condition suffisante d'intégrabilité est donnée par le théorème suivant, qui sera accepté ici sans démonstration.

Théorème 9.1 *Si $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue sur le rectangle R, alors f est intégrable sur R.*

On notera que f est bornée sur le rectangle fermé R dès qu'elle est continue sur ce rectangle (ce résultat ne sera pas démontré ici). L'hypothèse de continuité du Théorème 9.1 peut être affaiblie, des discontinuités pouvant être admises, pour autant que l'ensemble des points de discontinuité soit, en un certain sens, “assez petit”. On précise cette idée en introduisant la notion d'ensemble d'aire nulle.

Définition - L'ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ est d'*aire nulle* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble (fini) de rectangles $R_1, ..., R_n$ tels que

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{n} R_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \operatorname{aire} R_i \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, l'ensemble E est d'aire nulle s'il peut être recouvert par une union de rectangles, dont la somme des aires est arbitrairement petite. Il est clair qu'un ensemble fini de points est d'aire nulle. On montre aussi que le graphe d'une fonction continue $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est un ensemble d'aire nulle. Cette observation sera utilisée plus loin. Par ailleurs, il est évident que l'union de deux ensembles d'aire nulle est encore un ensemble d'aire nulle. Le Théorème 9.1 admet la généralisation suivante.

Théorème 9.2 *Soit $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, définie sur le rectangle R. Si l'ensemble des points de discontinuité de f est d'aire nulle, f est intégrable sur R.*

Pour terminer cette section, revenons sur l'interprétation géométrique de l'intégrale double. Si, pour une fonction $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ intégrable, à valeurs positives, $\iint_R f\,dx\,dy$ représente le volume du solide compris entre le graphe de f et le rectangle R, la relation

$$\iint_R (-f)\,dx\,dy = -\iint_R f\,dx\,dy,$$

qui découle de la linéarité, implique que l'intégrale $\iint_R (-f)\,dx\,dy$ de la fonction négative $(-f)$ est égale à *moins* le volume du solide compris entre R et le graphe de $(-f)$ (le volume est toujours un nombre positif ou nul). Si la fonction f change de signe, il résulte de ce qui précède et des propriétés d'additivité de l'intégrale, que les volumes situés sous le plan Oxy apporteront une contribution négative à l'intégrale (c'est-à-dire qu'ils "apparaissent" dans l'intégrale affectés du signe "moins"), tandis que les volumes situés au-dessus du plan Oxy apportent une contribution positive.

3 Le principe de Cavalieri

En vue de pouvoir calculer les intégrales doubles, on présente ci-dessous une méthode de calcul des volumes, connue sous le nom de principe de Cavalieri. On ne se préoccupera pas pour l'instant des conditions de validité de la méthode ; celles-ci seront fournies plus loin pour des volumes particuliers liés au calcul des intégrales doubles.

Considérons un volume $V \subset \mathbb{R}^3$. Représentons-le dans un système d'axes $Oxyz$. On supposera ce volume compris entre les plans $x = a$ et $x = b$. Appelons $A(x_0)$ l'aire de la section de V par un plan $x = x_0$ (voir Fig. 3).

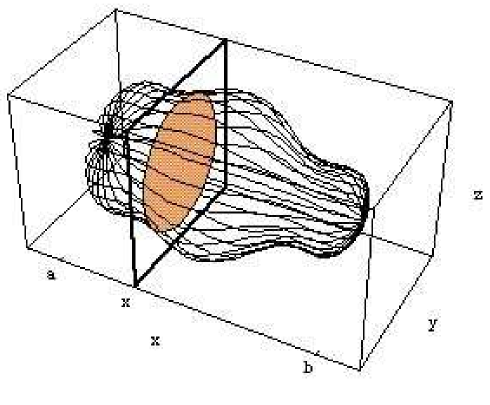


Fig. 3

Si on utilise un découpage $(a_0, a_1, ..., a_r)$ de l'intervalle $[a, b]$, le volume de V peut être décomposé en une somme de "tranches"

$$\operatorname{vol} V = \sum_{i=0}^{r-1} \operatorname{vol}(V \cap \{(x, y, z) \mid a_i \leq x \leq a_{i+1}\}).$$

Or, la "tranche" comprise entre les abscisses $x = a_i$ et $x = a_{i+1}$ a un volume donné approximativement par

$$A(a_i)(a_{i+1} - a_i),$$

l'approximation consistant à approcher la tranche par un cylindre de hauteur $a_{i+1} - a_i$ dont la base est la section de V par le plan $x = a_i$. On a donc

$$\operatorname{vol} V \simeq \sum_{i=0}^{r-1} A(a_i)(a_{i+1} - a_i). \tag{1}$$

On conçoit intuitivement que l'approximation est d'autant meilleure que le découpage de $[a, b]$ est plus fin. En fait, la somme dans (1) est une somme de Riemann pour l'intégrale $\int_a^b A(x)\,dx$ (en supposant, par exemple, A continue), ce qui suggère la formule

$$\operatorname{vol} V = \int_a^b A(x)\,dx. \tag{2}$$

A titre de première application de cette formule, on va calculer le volume d'un solide en forme de cône oblique à base quelconque (voir Fig.4). On prendra l'origine O au sommet du cône et on prendra l'axe Ox perpendiculaire à sa base. Si H est la hauteur du cône (c.-à-d. la distance entre le sommet et le plan de la base), on a, par la formule (2),

$$\operatorname{vol} V = \int_0^H A(x)\,dx. \tag{3}$$

Or, la section dans un plan $x = x_0$ étant obtenue par homothétie de la section dans le plan $x = H$, avec un facteur de réduction x_0/H, on a

$$A(x_0) = A(H)\left(\frac{x_0}{H}\right)^2.$$

Notez que les longueurs étant réduites par un facteur x_0/H, les aires le sont par un facteur $(x_0/H)^2$. La formule (3) donne

$$\begin{aligned}\operatorname{vol} V &= \int_0^H A(H)\frac{x^2}{H^2}\,dx \\ &= \frac{1}{3}A(H)H.\end{aligned}$$

On voit que le volume du cône est égal au 1/3 du produit de l'aire de la base par la hauteur.

On notera par ailleurs qu'on peut aussi retrouver, par le principe de Cavalieri, les formules relatives aux volumes de solide de révolution, vues au Chapitre 6. Pour ces solides de révolution, les sections sont des disques et leur aire peut être exprimée en fonction du rayon.

4 Calcul des intégrales doubles

Nous allons à présent appliquer le principe de Cavalieri au calcul du volume du solide V compris entre le graphe d'une fonction

$$f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

à valeurs positives, définie sur un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$, et ce rectangle lui-même. Si l'on regarde une section de ce solide V par un plan perpendiculaire à l'axe Ox, cette section est le graphe d'une fonction d'*une* variable $y \mapsto f(x, y)$ (ici x est fixé) et l'aire $A(x)$ de cette section est donnée par

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

(voir Fig. 4).

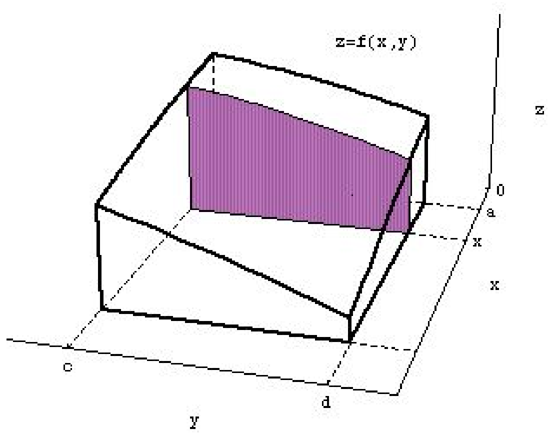


Fig. 4

Dès lors, par le principe de Cavalieri, le volume de V est donné par

$$\operatorname{vol} V = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx. \tag{4}$$

On voit que le calcul du volume de V se ramène au calcul de deux intégrales simples successives. On notera que l'intégrale entre crochets est calculée à x fixé. Sa valeur dépend de x et n'est autre que l'aire $A(x)$. Comme le volume de V est représenté par $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$ on a

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx. \tag{5}$$

D'autre part, il est clair que les rôles de x et y auraient pu être inversés, ce qui donne la formule

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy. \tag{6}$$

Cette fois, l'intégrale entre crochets est calculée à y fixé. Elle représente l'aire d'une section par un plan perpendiculaire à l'axe Oy. Des conditions de validité des formules (5) et (6) sont données par le théorème suivant, qui complète le Théorème 9.1.

Théorème 9.3 *Si f est continue sur le rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$, f est intégrable sur R et*

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy.$$

La démonstration du Théorème 9.3 ne sera pas donnée ici.

Exemple 1 - Soit à calculer $\iint_R x \sin(xy)\, dx\, dy$, où $R = [0, 1] \times [0, 1]$. D'après la formule (5), on a

$$\begin{aligned} \iint_R x \sin(xy)\, dx\, dy &= \int_0^1 \left[\int_0^1 x \sin(xy)\, dy \right] dx = \int_0^1 [-\cos(xy)]_0^1\, dx \\ &= \int_0^1 (-\cos x + 1)\, dx = -\sin 1 + 1. \end{aligned}$$

On notera que l'ordre d'intégration de la formule (6) est moins commode pour cet exemple. (Essayez !)

Exemple 2 - Soit $R = [a, b] \times [c, d]$. Supposons que $f(x, y) = F(x)G(y)$, F et G étant des fonctions continues, respectivement sur $[a, b]$ et sur $[c, d]$. D'après (5), on a

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_c^d F(x)G(y)\, dy \right] dx = \int_a^b F(x) \left[\int_c^d G(y)\, dy \right] dx.$$

Or, $\int_c^d G(y)\, dy$ ne dépend pas de x et ce nombre peut donc sortir de l'intégrale par rapport x, ce qui donne

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \left(\int_a^b F(x)\, dx \right) \left(\int_c^d G(y)\, dy \right).$$

Si on applique cette observation au cas de la fonction

$$f(x, y) = xy \exp(-x^2 - y^2) = [x \exp(-x^2)][y \exp(-y^2)]$$

sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$, on trouve

$$\begin{aligned} \iint_R xy \exp(-x^2 - y^2)\, dx\, dy &= \left(\int_0^1 x \exp(-x^2)\, dx \right) \left(\int_0^1 y \exp(-y^2)\, dy \right) \\ &= \left(\int_0^1 x \exp(-x^2)\, dx \right)^2 = \left(\left[-\frac{1}{2} \exp(-x^2) \right]_0^1 \right)^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2} \exp(-1) + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{e} \right)^2. \end{aligned}$$

5 Intégrales doubles sur des régions de type I ou II

Nous allons à présent envisager la définition et le calcul d'intégrales doubles sur d'autres domaines que sur des rectangles. Ces domaines seront toujours supposé bornés.

Définition - Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ est *borné* si E est contenu dans un rectangle R.

Pour définir l'intégrale double d'une fonction $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sur un ensemble borné E, on procède de la manière suivante. On construit une extension $\hat{f}$ de f à un rectangle R contenant E, cette extension étant définie par

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in E, \\ 0 & \text{si } (x,y) \in R \backslash E. \end{cases}$$

La fonction $\hat{f}$ est donc nulle en dehors de l'ensemble E. On définit l'intégrale de f sur E comme étant égale à l'intégrale de $\hat{f}$ sur R, si cette dernière intégrale existe. On peut vérifier que le résultat est indépendant du choix du rectangle R contenant E. On peut donc écrire

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R \hat{f}(x,y)\,dx\,dy. \tag{7}$$

La fonction $\hat{f}$ sera en général discontinue, les points de la frontière de E étant en général des points de discontinuité. Toutefois, ces discontinuités ne posent pas problème, si cette frontière est d'aire nulle. Ce sera le cas pour les domaines d'intégration particuliers présentés ci-dessous et auxquels on se restreindra par la suite.

Définition - Une région de type I est un ensemble de la forme

$$E_I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\},$$

où ϕ_1, $\phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues telles que $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$, pour tout $x \in [a,b]$.

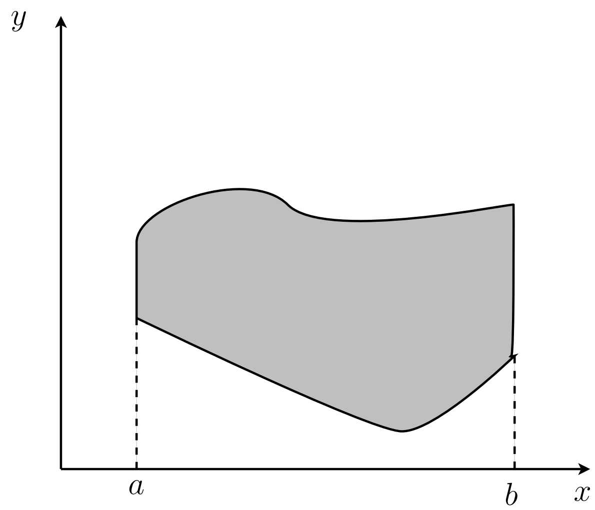


Fig. 5 - Région de type I

Une région de type II est un ensemble de la forme

$$E_{II} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d],\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

où $\psi_1,\ \psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues telles que $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$, pour tout $y \in [c, d]$.

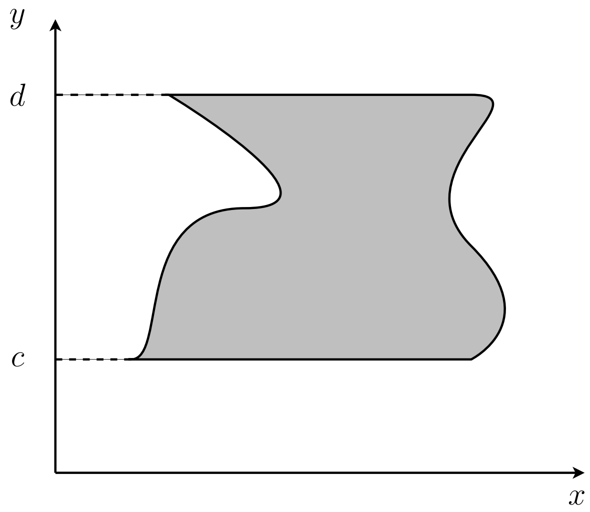


Fig. 6 - Région de type II

On observe que les rôles de x et y sont inversés dans les régions de type II, par rapport aux régions de type I. Certains ensembles peuvent être considérés à la fois comme régions de type I et comme régions de type II ; on parle parfois pour ces ensembles de régions de type III.

On va calculer l'intégrale d'une fonction $f : E_I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continue sur la région E_I, de type I. Par (7), on a

$$\iint_{E_I} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_c^d \hat{f}(x, y)\, dy \right] dx, \tag{8}$$

$R = [a, b] \times [c, d]$ étant un rectangle contenant E_I et $\hat{f}$ étant définie comme indiqué plus haut.

D'après les définitions de E_I et de $\hat{f}$, on a

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } y \in [\phi_1(x), \phi_2(x)], \\ 0 & \text{si } y \notin [\phi_1(x), \phi_2(x)], \end{cases}$$

de sorte que

$$\int_c^d \hat{f}(x, y)\, dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \hat{f}(x, y)\, dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Reportant ce résultat dans (8), on obtient

$$\iint_{E_I} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

Cette formule aurait pu être obtenue aussi par le principe de Cavalieri. Des conditions de validité sont fournies par le théorème suivant.

Théorème 9.4 *Soit E_I une région de type I délimitée par les graphes de fonctions continues ϕ_1, $\phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ et soit $f : E_I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est intégrable sur E_I et*

$$\iint_{E_I} f\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx. \tag{9}$$

Un résultat analogue peut être écrit pour les régions de type II. Si E_{II} est une région de type II délimitée par les courbes d'équations $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, où ψ_1 et $\psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ sont continues, on aura la formule

$$\iint_{E_{II}} f\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy. \tag{10}$$

Exemple 1 - Soit à calculer $\iint_E x^2y\,dx\,dy$, où E est le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$. Ce triangle peut être considéré comme région de type I, les fonctions ϕ_1, ϕ_2 étant $\phi_1 : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto 0$ et $\phi_2 : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto 2-2x$ (l'hypoténuse de ce triangle rectangle est un morceau de la droite d'équation $y = 2-2x$). La formule (9) donne

$$\begin{aligned}\iint_E x^2y\,dx\,dy &= \int_0^1 \left[\int_0^{2-2x} x^2y\,dy\right] dx = \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2-2x} dx \\ &= \int_0^1 2x^2(1-x)^2\,dx = \frac{1}{15}.\end{aligned}$$

Ce triangle aurait aussi pu être considéré comme région de type II (c'est donc une région de type III). Cette région de type II est délimitée par les courbes $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, avec $\psi_1 : [0,2] \to \mathbb{R} : y \mapsto 0$ et $\psi_2 : [0,2] \to \mathbb{R} : y \mapsto 1 - y/2$. On a dès lors par (10)

$$\begin{aligned}\iint_E x^2y\,dx\,dy &= \int_0^2 \left[\int_0^{1-y/2} x^2y\,dx\right] dy = \int_0^2 y\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1-y/2} dy \\ &= \int_0^2 \frac{1}{3}y\left(1-\frac{y^3}{2}\right) dy = \frac{1}{15},\end{aligned}$$

ce qui confirme le résultat obtenu plus haut.

On observe donc que, pour les régions qui sont la fois de type I et de type II, une permutation de l'ordre d'intégration est possible. L'écriture des limites d'intégration demande toutefois un peu d'attention. Dans (9), il ne s'agit pas d'effectuer une simple permutation des intégrales. L'écriture

$$\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$$

n'a pas de sens (ou, du moins, pas celui qu'on attend), puisque cette expression dépend de x, alors qu'on cherche une valeur numérique (un volume, si f est à valeurs positives). Dans ces situations, il est conseillé d'esquisser un dessin pour chercher l'expression des limites d'intégration.

Exemple 2 - Soit à calculer

$$\int_0^4 \left[\int_{y/2}^{\sqrt{y}} e^{y/x}\, dx \right] dy, \tag{11}$$

après avoir permuté l'ordre d'intégration. Cette intégrale peut être interprétée comme intégrale sur une région E de type II (comparer à (10)). Cette région est délimitée par les courbes $x = y/2$, $x = \sqrt{y}$, y appartenant à l'intervalle $[0, 4]$ (voir Fig. 7).

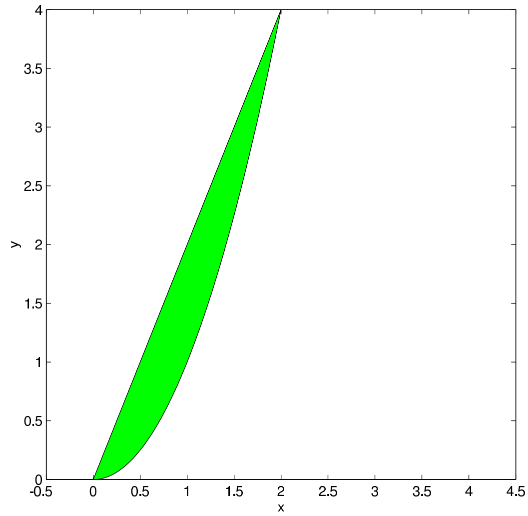


Fig. 7

Cette région peut aussi être vue comme une région de type I, délimitée par les courbes $y = x^2$, $y = 2x$, x appartenant à l'intervalle $[0, 2]$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^4 \left[\int_{y/2}^{\sqrt{y}} e^{y/x}\, dx \right] dy &= \iint_E e^{y/x}\, dx\, dy = \int_0^2 \left[\int_{x^2}^{2x} e^{y/x}\, dy \right] dx = \int_0^2 \left[x e^{y/x} \right]_{x^2}^{2x} dx \\ &= \int_0^2 \left[x e^2 - x e^x \right] dx = \left[\frac{x^2}{2} e^2 - x e^x + e^x \right]_0^2 = e^2 - 1. \end{aligned}$$

On notera que la permutation de l'ordre d'intégration était ici très utile, le calcul direct de (11) par primitivation se révélant impossible.

6 Propriétés des intégrales doubles

Il a déjà été fait allusion dans l'introduction à certaines propriétés des intégrales doubles, pour des intégrales sur des rectangles. Ces propriétés s'étendent aux intégrales sur des régions de type I ou II. Les principales propriétés sont données ci-dessous sans démonstration ; dans leur formulation, E est une région de type I ou II ; pour simplifier, les fonctions seront supposées continues.

(i) *Linéarité* :

$$\iint_E (f+g)\,dx\,dy = \iint_E f\,dx\,dy + \iint_E g\,dx\,dy$$

$$\iint_E \alpha f\,dx\,dy = \alpha \iint_E f\,dx\,dy, \quad \forall \alpha \in R.$$

(ii) *Positivité* : si

$$f(x,y) \geq 0, \quad \forall (x,y) \in E,$$

on a

$$\iint_E f\,dx\,dy \geq 0.$$

(iii) *Lien entre intégrale de la valeur absolue et valeur absolue de l'intégrale* :

$$\left| \iint_E f\,dx\,dy \right| \leq \iint_E |f|\,dx\,dy.$$

(iv) *Additivité* : Si $E = E_1 \bigcup E_2$, E_1 et E_2 étant des régions de type I ou II telles que $E_1 \bigcap E_2$ soit d'aire nulle, on a

$$\iint_E f\,dx\,dy = \iint_{E_1} f\,dx\,dy + \iint_{E_2} f\,dx\,dy.$$

On notera une conséquence immédiate de la propriété de positivité : si $f(x,y) \geq g(x,y)$, pour tout $(x,y) \in E$, on aura

$$\iint_E f\,dx\,dy \geq \iint_E g\,dx\,dy.$$

7 Applications des intégrales doubles

7.1 Calcul des aires

Si f est une fonction à valeurs positives, l'intégrale double de f sur R a été construite pour représenter le volume du solide V compris entre le graphe de f et le rectangle R. La même interprétation reste valable pour une fonction à valeurs positives définie sur une région E, de type I ou de type II. Si $f(x,y) = 1$, pour tout $(x,y) \in E$, le solide V en question est de type cylindrique, avec des génératrices parallèles à Oz ; sa base est E et sa hauteur 1. Il en résulte que vol $V =$ aire $E \times 1 =$ aire E. Comme le volume est donné par l'intégrale double de f sur E, on en déduit que

$$\text{aire } E = \iint_E 1\,dx\,dy. \tag{12}$$

Cette formule pour le calcul des aires peut d'ailleurs s'étendre à d'autres régions que celles de type I ou II. Illustrons son utilisation par un exemple.

Exemple - Soit à calculer l'aire de la région E comprise entre la parabole $y = x^2$ et la droite d'équation $y = x + 2$.
On observe que la droite et la parabole se coupent en $(-1, 1)$ et $(2, 4)$: la région E est donc comprise entre les droites $x = -1$ et $x = 2$. Elle peut être considérée comme région de type I délimitée par les graphes de $\phi_1 : [-1, 2] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ et $\phi_2 : [-1, 2] \to \mathbb{R} : x \mapsto x + 2$. Appliquant la formule (12), on voit que

$$\text{aire } E = \iint_E 1\, dx\, dy = \int_{-1}^{2} \left[\int_{x^2}^{x+2} 1\, dy \right] dx = \frac{9}{2}.$$

7.2 Centre de masse et moments d'inertie

Le calcul d'intégrales doubles est utile pour déterminer les centres de masse et moments d'inertie pour des plaques planes dont l'épaisseur peut être négligée par rapport aux autres dimensions (ou, du moins, telle que la masse volumique ne varie pas suivant la direction perpendiculaire au plan de la plaque). Cette plaque peut être décrite par un ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$; si elle est non homogène, sa masse par unité de surface varie de point à point. On notera $\rho(x, y)$ la masse par unité de surface au point $(x, y) \in E$.

Si la masse par unité de surface est égale à une constante K, il est clair que la masse totale est donnée par

$$M = \text{aire } E \times K$$

ou

$$M = \iint_E K\, dx\, dy.$$

Si la masse par unité de surface n'est pas constante, la formule ci-dessus se généralise en

$$M = \iint_E \rho(x, y)\, dx\, dy.$$

Les coordonnées $\bar{x}$, $\bar{y}$ du centre de masse seront données par

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_E x\, \rho(x, y)\, dx\, dy,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_E y\, \rho(x, y)\, dx\, dy.$$

Les moments d'inertie (du second ordre) par rapport aux axes Ox et Oy s'obtiennent par les formules

$$I_x = \iint_E x^2 \rho(x, y)\, dx\, dy, \tag{13}$$

$$I_y = \iint_E y^2 \rho(x, y)\, dx\, dy, \tag{14}$$

tandis que le moment d'inertie par rapport à l'origine O vaut

$$I_0 = \iint_E (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dx\, dy = I_x + I_y.$$

Exemple - Cherchons les moments d'inertie d'un rectangle homogène centré en O par rapport aux axes Ox et Oy. Ce rectangle peut se décrire comme l'ensemble $E = [-b/2, b/2] \times [-h/2, h/2]$, b étant la largeur de sa base et h sa hauteur. Comme le rectangle est homogène, $\rho(x, y)$ est constante, appelons K cette valeur constante. Les formules (13), (14) donnent

$$I_x = \int_{-b/2}^{b/2} \left[\int_{-h/2}^{h/2} x^2 K\, dy \right] dx,$$
$$I_y = \int_{-b/2}^{b/2} \left[\int_{-h/2}^{h/2} y^2 K\, dy \right] dx.$$

On en tire

$$I_x = \frac{Kbh^3}{12}, \quad I_y = \frac{Kb^3h}{12}.$$

Chapitre 10

Eléments de géométrie

L'étude que nous allons faire de quelques objets géométriques simples tels que plans, droites, sphères, cônes, cylindres, coniques... repose sur la possibilité d'établir une correspondance parfaite entre l'ensemble des points de l'espace idéal où sont situées ces figures et l'ensemble des triplets de nombres réels. Cette correspondance se fait au moyen de flèches appelées *vecteurs*.

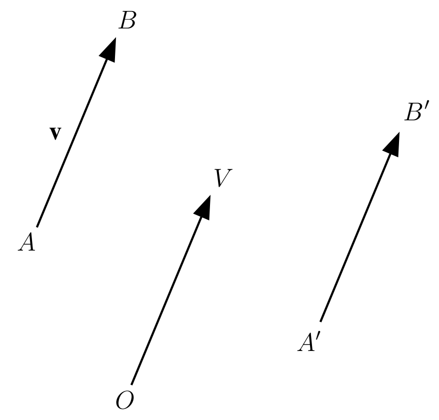
1 Vecteurs

Des quantités comme l'aire, le volume, la longueur, la température et le temps n'ont qu'une intensité et peuvent être entièrement représentées par un nombre réel (accompagné de l'unité de mesure adéquate). Une grandeur de ce type est une **grandeur scalaire** et le nombre correspondant est un **scalaire**. Des concepts tels que la vitesse ou la force ont à la fois une intensité, un sens et une direction.

En physique, on appelle **vecteur** une quantité caractérisée par une **longueur** (ou intensité ou grandeur), par une **direction** et par un **sens** dans cette direction. Citons comme illustrations, l'effet d'un champ magnétique dans l'espace avec son intensité et sa direction ; l'effet d'une force appliquée en un point caractérisé par une intensité et une direction ; un avion qui se déplace avec une certaine vitesse dans une certaine direction ; un déplacement dans le plan caractérisé par une longueur ou distance et une direction.

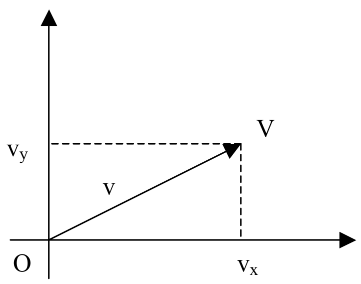
1.1 La notion de vecteur

Supposons que l'on déplace un objet d'une position A à une position B. On peut représenter ce déplacement par un segment fléché, la pointe de la flèche étant placée au point B et l'origine en A, pour indiquer que le mouvement s'est effectué de A vers B. On utilise alors $\overrightarrow{AB}$ comme notation pour le vecteur. Il est important de réaliser qu'un vecteur est entièrement caractérisé par sa longueur et sa direction. L'endroit où l'on place l'origine d'un vecteur dans le plan ou dans l'espace est sans importance, seules comptent sa longueur et sa direction.



Dans la figure ci-dessus, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OV}$ définissent le même vecteur que l'on pourrait représenter par le symbole $\vec{v}$. En d'autres termes, un vecteur est défini indépendamment de la position où on le place dans le plan ou dans l'espace. Mathématiquement, tous les segments fléchés de même longueur et de même direction sont équivalents (on dit qu'ils forment une classe d'équivalence) et peuvent être représentés par n'importe lequel d'entre eux.

Considérons un repère cartésien orthonormé. En plaçant l'origine du vecteur $\vec{v}$ à l'origine du repère, on obtient le point V qui est l'extrémité de $\vec{v}$. On a donc $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$. Le point V est un point du plan et a donc des coordonnées : $V = (v_x, v_y)$. Les **composantes** du vecteur $\vec{v}$ sont les coordonnées du point V. On écrira $\vec{v} = (v_x, v_y)$.



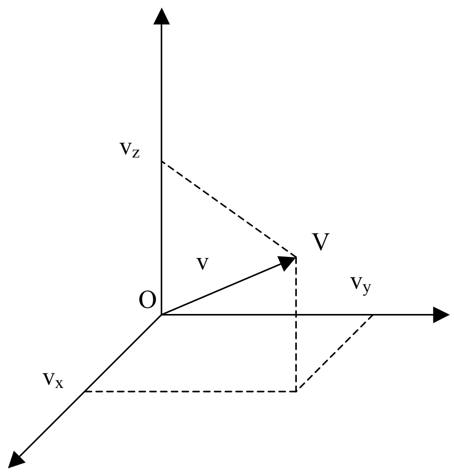
Si (a_x, a_y) et (b_x, b_y) sont respectivement les coordonnées des points A et B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ou $\vec{v}$ qu'ils définissent, a pour composantes $(v_x, v_y) = (b_x - a_x, b_y - a_y)$. En effet, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être identifié au vecteur $\overrightarrow{OV}$.

La **longueur** (ou encore **norme** ou **module**) du vecteur $\vec{v}$ de composantes (v_x, v_y) est notée $\|\vec{v}\|$ et est le nombre réel positif donné par

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Il ne s'agit de rien d'autre que de l'application du Théorème de Pythagore.

Dans le cas de vecteurs dans l'espace, on parlera de triplets ordonnés de nombres réels. Par exemple, le vecteur $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$.



La définition de norme s'étend sans difficulté au cas du vecteur dans l'espace :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Exemple : Calculons la norme du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ où $A = (3, 1, -2)$ et $B = (-2, 7, -4)$. Les composantes du vecteur $\vec{v}$ se calculent par la différence entre les coordonnées du point B et celles du point A :

$$\vec{v} = (-2 - 3, 7 - 1, -4 + 2) = (-5, 6, -2).$$

La norme du vecteur $\vec{v}$ se calcule par la formule

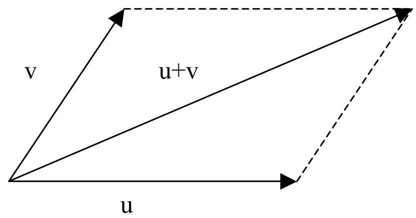
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-5)^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{65}.$$

1.2 Opérations sur les vecteurs

Dans les applications, on distingue les **grandeurs scalaires** par opposition aux **grandeurs vectorielles**, c'est-à-dire aux vecteurs. Une grandeur scalaire est caractérisée par un seul nombre réel, alors qu'une grandeur vectorielle est caractérisée par deux ou trois nombres réels suivant que l'on se trouve dans le plan ou l'espace. Les opérations que l'on peut effectuer sur des grandeurs scalaires ne sont rien d'autre que celles que l'on peut effectuer sur les nombres réels. Par contre, on définit des opérations spécifiques aux vecteurs.

(a) L'addition vectorielle

On définit l'**addition** ou somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, comme le vecteur dont les composantes sont obtenues par addition des composantes correspondantes des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On note $\overrightarrow{u+v}$ le vecteur somme. Par exemple dans le plan, si $\vec{u}$ est le vecteur (u_x, u_y) et $\vec{v}$ le vecteur (v_x, v_y), le vecteur somme $\overrightarrow{u+v}$ est le vecteur $(u_x + v_x, u_y + v_y)$.



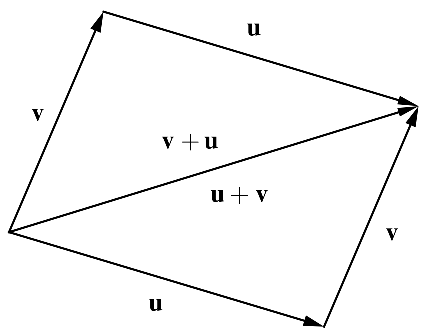
On peut donner une interprétation géométrique de cette opération. On considère le vecteur $\vec{u}$ placé en n'importe quel point du plan. On place le vecteur $\vec{v}$ à l'extrémité du vecteur $\vec{u}$. Les deux vecteurs forment alors les côtés d'un parallélogramme dont la diagonale partant de l'origine de $\vec{u}$ et arrivant à l'extrémité de $\vec{v}$ est le vecteur somme $\overrightarrow{u+v}$.

L'addition vectorielle possède les propriétés suivantes :

1. L'addition vectorielle est ***commutative :***

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \quad \forall \vec{u}, \vec{v}.$$

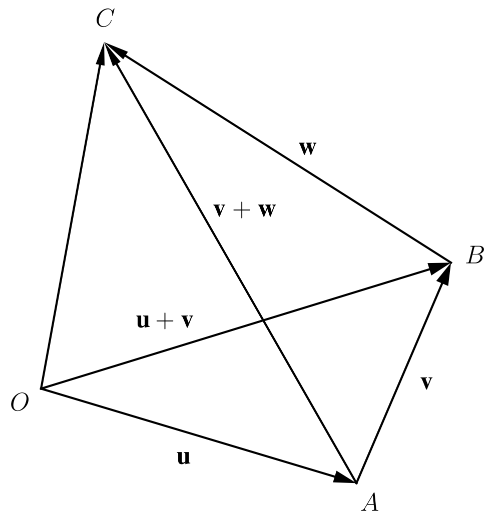
On constate que le vecteur $\overrightarrow{v+u}$ que l'on forme en additionnant $\vec{v}$ et $\vec{u}$ coïncide avec le vecteur $\overrightarrow{u+v}$.



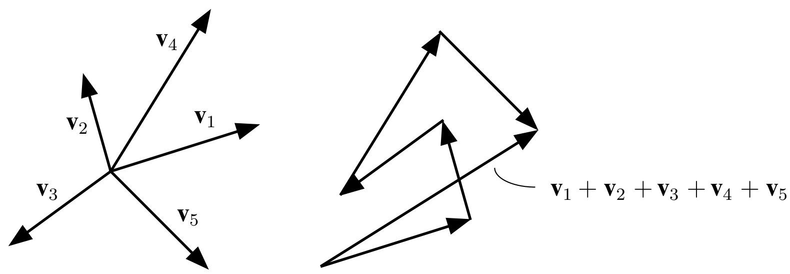
2. L'addition vectorielle est ***associative :***

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}, \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}.$$

On constate que si l'on additionne $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{u+v}$ à $\vec{w}$ on obtient le vecteur $\overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{u+v}) + \vec{w}$. On obtient ce même vecteur en additionnant au vecteur $\vec{u}$, le vecteur $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v+w}$. D'où $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.



On remarquera que pour additionner n vecteurs, il suffit en partant d'une position arbitraire du premier vecteur, de placer successivement l'origine de chaque vecteur à l'extrémité du précédent.



Le vecteur somme des n vecteurs est alors le vecteur dont l'origine est celle du premier et l'extrémité, celle du dernier. Dans cette opération, l'ordre des vecteurs dans la somme n'a pas d'importance. Cette opération peut se faire aussi bien dans l'espace que dans le plan.

3. L'addition vectorielle admet un ***élément neutre :*** $\vec{o}$

$$\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}, \quad \forall \vec{u}.$$

L'élément neutre est le vecteur nul ou zéro, noté $\vec{o}$ et défini comme le vecteur dont toutes les composantes sont égales à zéro. Par exemple, dans l'espace $\vec{o} = (0, 0, 0)$. Il a une longueur nulle et par convention sa direction n'est pas définie.

4. L'addition vectorielle ***admet un opposé :***

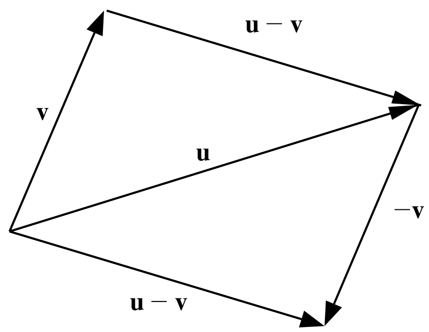
$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}, \quad \forall \vec{u}.$$

Le vecteur noté $-\vec{u}$ et appelé **vecteur opposé** de $\vec{u}$, dont les composantes sont les composantes du vecteur $\vec{u}$, changées de signe. Par exemple si $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ alors $-\vec{u} = (-u_x, -u_y, -u_z)$. Le vecteur $-\vec{u}$ a la même longueur que $\vec{u}$, la même direction mais est de sens opposé.

(b) La soustraction vectorielle

La soustraction vectorielle revient à une addition vectorielle : lorsqu'on veut soustraire le vecteur $\vec{v}$ du vecteur $\vec{u}$, on ajoute à $\vec{u}$ l'opposé de $\vec{v}$, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{u-v} = \vec{u} + (-\vec{v}), \quad \forall \vec{u}, \vec{v}.$$

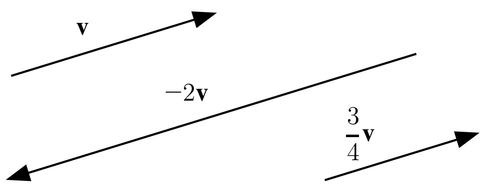


On constate que pour soustraire $\vec{v}$ de $\vec{u}$, il suffit de placer sur le même point les origines des deux vecteurs et de prendre comme origine et extrémité du vecteur $\overrightarrow{u-v}$ respectivement l'extrémité de $\vec{v}$ et l'extrémité de $\vec{u}$.

Remarque : L'addition vectorielle est une **loi de composition interne**. Ceci veut dire qu'elle s'effectue sur des vecteurs et donne un vecteur comme résultat.

(c) Multiplication d'un vecteur par un scalaire

On définit également une **loi de composition externe**, la multiplication d'un vecteur $\vec{v}$ par un scalaire α, notée $\alpha\vec{v}$. Les composantes du vecteur $\alpha\vec{v}$ sont celles de $\vec{v}$ multipliées par α. Dans le plan, si $\vec{v} = (v_x, v_y)$ alors $\alpha\vec{v} = (\alpha v_x, \alpha v_y)$.



Géométriquement, cette opération revient à effectuer une contraction ou une dilatation du vecteur $\vec{v}$, avec éventuellement un renversement de sens si le scalaire α est négatif.

Cette opération possède les propriétés suivantes :

1. ***Distributivité*** par rapport l'addition dans $\mathbb{R}$:

$$(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{v}.$$

2. ***Distributivité*** par rapport l'addition vectorielle :

$$\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}, \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}, \quad \forall\vec{u},\vec{v}.$$

3. ***Associativité mixte*** :

$$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}, \quad \forall\vec{u},\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

4. ***Elément neutre*** pour la loi de composition externe :

$$1\vec{u} = \vec{u}, \quad \forall\vec{u}.$$

Définition Deux vecteurs sont **colinéaires** ou **parallèles** s'ils ont la même direction, c'est-à-dire s'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{u}=\alpha\vec{v}$.

(d) Le produit scalaire de deux vecteurs

Il s'agit d'une opération de multiplication entre deux vecteurs donnant comme résultat un scalaire, c'est-à-dire un nombre. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Sa définition algébrique est la suivante.

Définition Dans un repère cartésien orthonormé, le **produit scalaire** de deux vecteurs est égal à la somme des produits de leurs composantes correspondantes.
Par exemple dans le plan,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_xv_x + u_yv_y,$$

dans l'espace

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z.$$

Remarque – On appelle ce produit "scalaire" parce que son résultat est un nombre.

Le produit scalaire possède les propriétés suivantes :

1. Le produit scalaire d'un vecteur avec lui-même est égal au carré de sa norme :

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2, \quad \forall\vec{u}.$$

2. Le produit scalaire de deux vecteurs est ***commutatif*** :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}, \quad \forall\vec{u},\vec{v}.$$

3. Il y a ***distributivité*** du produit scalaire par rapport l'addition des vecteurs :

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}, \quad \forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}.$$

4. Il y a ***associativité mixte*** :

$$(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v} = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}), \quad \forall\alpha\in\mathbb{R},\ \forall\vec{u},\vec{v}.$$

5. Le vecteur nul est ***absorbant*** pour le produit scalaire :

$$\vec{o} \cdot \vec{u} = 0, \quad \forall \vec{u}.$$

Exemple : Calculons le produit scalaire des vecteurs $\vec{u} = (1, 2, -1)$ et $\vec{v} = (2, -2, 3)$. On obtient

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 = 2 - 4 - 3 = -5.$$

On peut définir le produit scalaire d'un point de vue géométrique.

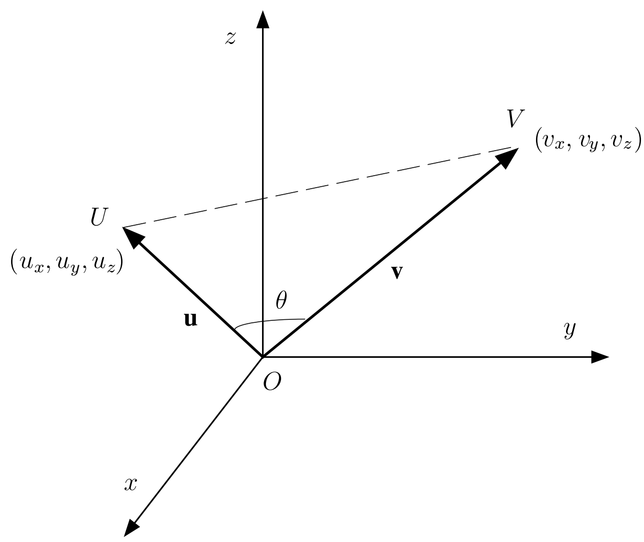
Proposition 10.1 *Si θ désigne l'angle entre les deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta.$$

En d'autres termes, le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit des normes des vecteurs par le cosinus de l'angle entre ceux-ci.

Démonstration : Travaillons dans l'espace.

Cas 1 : Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.



La relation qui, à l'intérieur d'un triangle, lie les côtés à un angle permet d'écrire

$$\|\overrightarrow{UV}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta.$$

D'où

$$(v_x - u_x)^2 + (v_y - u_y)^2 + (v_z - u_z)^2 = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta.$$

On peut simplifier cette dernière expression en

$$-2u_xv_x - 2u_yv_y - 2u_zv_z = -2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta,$$

ce qui par division des deux membres par -2 donne le résultat recherché.

Cas 2 : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, c'est-à-dire il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \alpha\vec{u}$. On a en vertu des propriétés du produit scalaire,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{u}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{u}) = \alpha\|\vec{u}\|^2.$$

De même, on a

$$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta = \|\vec{u}\|\|\alpha\vec{u}\|\cos\theta = |\alpha|\|\vec{u}\|^2\cos\theta.$$

Si $\alpha > 0$, alors $|\alpha| = \alpha$, $\theta = 0$ et $|\alpha|\|\vec{u}\|^2\cos\theta = \alpha\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{v}$.
Si $\alpha < 0$, alors $|\alpha| = -\alpha$, $\theta = \pi$ et $|\alpha|\|\vec{u}\|^2\cos\theta = -\alpha\|\vec{u}\|^2 \cdot (-1) = \alpha\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{v}$. ∎

De la proposition, on peut déduire la formule suivante pour le cosinus de l'angle θ que forment deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}.$$

Définition Deux vecteurs sont **orthogonaux** s'ils forment un angle droit.
Dans ce cas, le cosinus de l'angle vaut 0 et on déduit de la Proposition 10.1 que le produit scalaire est nul. On a donc

Proposition 10.2 *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Alors*

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Exemple : Les vecteurs $\vec{u} = (1, 2, -1)$ et $\vec{v} = (4, -2, 0)$ sont orthogonaux car

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 = 4 - 4 + 0 = 0.$$

On peut démontrer les deux résultats suivants, relatifs à la longueur des vecteurs :

Proposition 10.3 *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.*
(a) **Inégalité de Cauchy-Schwartz** *:* $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.
(b) **Inégalité triangulaire** *:* $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
Cette inégalité spécifie que dans un triangle, la longueur d'un côté ne peut dépasser la somme des longueurs des deux autres côtés.

Démonstration : (a) En utilisant la Proposition 10.1, on obtient

$$\begin{aligned}|\vec{u} \cdot \vec{v}| &= |\, \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta| \\ &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\cos\theta| \\ &\leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\end{aligned}$$

(b) En utilisant l'inégalité ci-dessus, on obtient

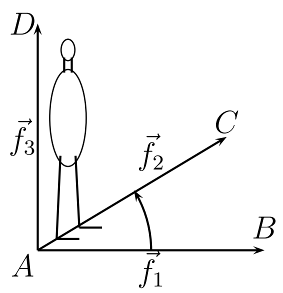
$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= \|\vec{u}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2\\ &\leq \|\vec{u}\|^2+2\,\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|+\|\vec{v}\|^2\\ &= (\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|)^2\end{aligned}$$

En prenant la racine carrée des deux membres (qui sont positifs), on trouve

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|. \qquad \blacksquare$$

(e) Le produit vectoriel de deux vecteurs

A la différence du produit scalaire, qui est un nombre réel, le produit vectoriel de deux vecteur est un vecteur, noté $\vec{u}\times\vec{v}$ (ou encore $\vec{u}\wedge\vec{v}$). Pour le définir, on a besoin de la notion d'orientation d'un repère.
Soit A, B, C, D des points de l'espace. Le repère formé des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ est **d'orientation directe** si un spectateur "debout" sur le plan ABC, les pieds en A et la tête en D, observe que pour amener la droite AB sur la droite AC, il doit faire une rotation dans le sens antihorlogique (on regarde le plus petit angle possible). Dans le cas contraire, le repère est dit **d'orientation rétrograde**.



Notons que pour savoir si 3 vecteurs donnés constituent un repère direct ou rétrograde, l'ordre dans lequel on donne les vecteurs est important. Si on permute 2 vecteurs, on change l'orientation. On la change aussi quand on remplace un vecteur par son opposé.

Définition Le **produit vectoriel** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u}\times\vec{v}$ qui satisfait les propriétés suivantes :
- $\vec{u}\times\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;
- $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\,|\sin\theta|$;
- les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u}\times\vec{v}$ pris dans cet ordre forment un repère d'orientation directe.

Remarque – La longueur $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le produit vectoriel possède les propriétés suivantes :

1. Le produit vectoriel de deux vecteurs est ***anti-commutatif*** :

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u}), \quad \forall \vec{u}, \vec{v}.$$

2. Le produit vectoriel est ***linéaire à gauche*** :

$$\vec{u} \times (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha(\vec{u} \times \vec{v}) + \beta(\vec{u} \times \vec{w}), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}.$$

3. Le produit vectoriel est ***linéaire à droite*** :

$$(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \times \vec{w} = \alpha(\vec{u} \times \vec{w}) + \beta(\vec{v} \times \vec{w}), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}.$$

Proposition 10.4 *Soit $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ et $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Dans un repère cartésien orthonormé, les composantes du vecteur $\vec{u} \times \vec{v}$ sont données par*

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x).$$

Exemple : Calculons le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et $\vec{v} = (6, 5, 4)$. On a

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2 \cdot 4 - 3 \cdot 5, 3 \cdot 6 - 1 \cdot 4, 1 \cdot 5 - 2 \cdot 6) = (-7, 14, -7).$$

L'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donnée par

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{(-7)^2 + 14^2 + (-7)^2} = \sqrt{294} = 7\sqrt{6}.$$

Dans le cas où les deux vecteurs sont parallèles, le sinus de l'angle vaut 0 et on en déduit que le produit vectoriel est nul.

Proposition 10.5 *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a*

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}.$$

Exemple : Les vecteurs $\vec{u} = (1, -2, 3)$ et $\vec{v} = (-2, 4, -6)$ sont parallèles car

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-2 \cdot (-6) - 3 \cdot 4, 3 \cdot (-2) - (-6) \cdot 1, 1 \cdot 4 - (-2) \cdot (-2)) = (0, 0, 0) = \vec{o}.$$

On a $\vec{v} = -2\vec{u}$.

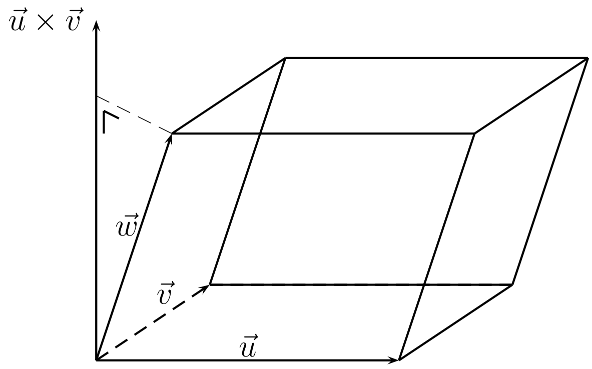
(f) Produit mixte

Si on dispose de 3 vecteurs donnés $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, on peut considérer l'expression

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

qui désigne un nombre réel, appelé **produit mixte** des 3 vecteurs .

Dans un repère cartésien orthonormé, on peut donner une signification géométrique intéressante à $|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}|$. En effet, ce nombre revient à $\|\vec{u}\times\vec{v}\|\|\vec{w}\||\cos(\vec{u}\times\vec{v},\vec{w})|$. Si nous regardons le parallélipipède construit sur les 3 vecteurs, nous observons que $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ donne l'aire de la base (construite sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$) et que $\|\vec{w}\||\cos(\vec{u}\times\vec{v},\vec{w})|$ donne la longueur de la projection orthogonale de $\vec{w}$ sur la droite qui porte $\vec{u}\times\vec{v}$, c'est-à-dire la hauteur du parallélipipède. Donc $|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}|$ donne **le volume du parallélipipède.**



1.3 Différents types de vecteurs

(a) Vecteur normé

Etant donné un vecteur $\vec{v}$, on est parfois amené à considérer un vecteur de longueur un, dans la même direction et dans le même sens. Notons $\vec{1}_v$ ce vecteur. Pour l'obtenir, il suffit de multiplier le vecteur $\vec{v}$ par l'inverse de sa longueur. On dit d'un vecteur dont la norme est égale à un qu'il est **normé**.

$$\vec{1}_v = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

Exemple : Calculons le vecteur normé de même direction et de même sens que le vecteur $\vec{v}=(-5,6,-2)$. On calcule

$$\vec{1}_v = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(-5,6,-2)}{\sqrt{65}} = \left(-\frac{5}{\sqrt{65}},\frac{6}{\sqrt{65}},-\frac{2}{\sqrt{65}}\right),$$

et donc on a bien

$$\|\vec{1}_v\| = \|\left(-\frac{5}{\sqrt{65}},\frac{6}{\sqrt{65}},-\frac{2}{\sqrt{65}}\right)\| = \sqrt{\frac{25}{65}+\frac{36}{65}+\frac{4}{65}} = 1.$$

(b) Vecteurs colinéaires et orthogonaux

Rappelons que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'ils ont même direction, c'est-à-dire s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** s'ils sont perpenduculaires, c'est-à-dire si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

(c) Vecteurs de base

Une notion importante, quand on travaille avec le produit scalaire, est celle de base orthonormée. Une **base orthonormée** est constituée de trois vecteurs $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ tels que

$$\begin{cases} \text{(i)} \ \ \|\vec{f_1}\| = \|\vec{f_2}\| = \|\vec{f_3}\| = 1; \\ \text{(ii)} \ \vec{f_1} \cdot \vec{f_2} = \vec{f_2} \cdot \vec{f_3} = \vec{f_3} \cdot \vec{f_1} = 0. \end{cases}$$

<u>Premier intérêt d'une telle base</u> : les coordonnées d'un vecteur coïncident avec les produits scalaires entre ce vecteur et les vecteurs de la base.
Si $\vec{u} = \alpha_1\vec{f_1} + \alpha_2\vec{f_2} + \alpha_3\vec{f_3}$ on a

$$\vec{u} \cdot \vec{f_1} = \alpha_1\vec{f_1} \cdot \vec{f_1} + \alpha_2\vec{f_2} \cdot \vec{f_1} + \alpha_3\vec{f_3} \cdot \vec{f_1} = \alpha_1$$

et, de même, $\vec{u} \cdot \vec{f_2} = \alpha_2$ et $\vec{u} \cdot \vec{f_3} = \alpha_3$.
<u>Deuxième intérêt</u> : on a des *expressions simples* pour le produit scalaire de 2 vecteurs, pour la longueur d'un vecteur ou pour le cosinus de l'angle entre 2 vecteurs *en fonction des coordonnées.*
Si $\vec{a} = \alpha_1\vec{f_1} + \alpha_2\vec{f_2} + \alpha_3\vec{f_3}$ et $\vec{b} = \beta_1\vec{f_1} + \beta_2\vec{f_2} + \beta_3\vec{f_3}$, on a aussitôt

$$\begin{aligned} &\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3, \\ &\vec{a} \cdot \vec{a} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \\ &\|\vec{a}\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}, \\ &\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \tfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} = \tfrac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}}. \end{aligned}$$

Dans le cas du plan, les deux vecteurs $\vec{f_1} = (1, 0)$ et $\vec{f_2} = (0, 1)$ jouent un rôle particulier. Il s'agit des vecteurs unitaires parallèles aux axes. On peut exprimer tout vecteur $\vec{v} = (v_x, v_y)$ comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs avec les composantes v_x et v_y comme coefficients de la combinaison linéaire :

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = v_x(1, 0) + v_y(0, 1) = v_x\vec{f_1} + v_y\vec{f_2}.$$

Il en va de même dans l'espace avec les vecteurs $\vec{f_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{f_2} = (0, 1, 0)$ et $\vec{f_3} = (0, 0, 1)$.

Remarque – Dans le plan, si un vecteur $\vec{v}$ est connu par sa longueur $\|\vec{v}\|$ et par l'angle θ (mesuré dans le sens contraire des aiguilles d'une montre) qu'il forme avec l'axe horizontal, on en détermine aisément les coordonnées (v_x, v_y) par

$$v_x = \|\vec{v}\| \cos\theta, \quad v_y = \|\vec{v}\| \sin\theta.$$

Inversement, on détermine la longueur $\|\vec{v}\|$ d'un vecteur $\vec{v}$, ainsi que l'angle θ qu'il forme avec l'axe horizontal par

$$\|v\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = v_y/v_x$$

pour $v_x \neq 0$, ce qui nous permet de trouver θ, en y ajoutant au besoin π selon les signes de v_x et v_y.

2 Généralités et changements de repère

2.1 Quelques remarques générales

L'instrument de base de notre étude des figures géométriques est le choix d'un repère, c'est-à-dire d'une origine O et d'une base de l'espace des flèches, que l'on prendra généralement orthonormée et d'orientation directe. Ce choix fait, chaque point de l'espace se trouve identifié par le triplet de ses coordonnées (qui sont celles de son vecteur position).

On remarque alors que beaucoup de figures simples connues peuvent être décrites comme *"ensemble des points P de l'espace dont les coordonnées vérifient une ou plusieurs équations polynomiales données"*.

Exemples : Soit $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}$.

(1) Le plan horizontal AOB est l'ensemble des points $P = (x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + 0\,\vec{e}_3$. Il est caractérisé par l'équation $z = 0$.

(2) L'axe OC est l'ensemble des points $P = (x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{OP} = 0\,\vec{e}_1 + 0\,\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Il est décrit par les équations $x = 0$ *et* $y = 0$.

(3) La sphère de centre 0 et de rayon R est l'ensemble des points $P = (x, y, z)$ tels que $\|\overrightarrow{OP}\| = R$, donc tels que

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Cette fois il est bien entendu que la base choisie est orthonormée pour avoir l'expression simple indiquée pour $\|\overrightarrow{OP}\|$.

(4) Le cercle de centre O et de rayon R dans le plan AOB est l'ensemble des points $P = (x, y, z)$ tels que $\|\overrightarrow{OP}\| = R$ *et* $z = 0$ donc tels que $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ *et* $z = 0$.

Remarque – Avant d'approfondir l'étude des différentes figures et équations correspondantes, observons quelques phénomènes généraux :

(1) On constate qu'une surface est décrite par 1 équation et qu'une courbe est définie par 2 équations. On trouvera facilement des exceptions à cette règle.
Ainsi l'axe OC peut-il également être caractérisé par l'équation $x^2 + y^2 = 0$, conjonction déguisée de $x = 0$ *et* $y = 0$.
Par ailleurs, une équation peut quelquefois caractériser un seul point : l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ est vérifiée par les coordonnées du seul point O.

Une équation peut même caractériser l'ensemble vide : $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ n'est satisfaite par les coordonnées d'aucun point.

(2) Une surface peut être définie par des équations différentes : le plan AOB est défini par $z = 0$ ou par $z^3 + 4z = 0$.
Une courbe peut être présentée par des systèmes d'équations différents. Par exemple, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ *et* $z = 0$ ou $x^2 + y^2 = R^2$ *et* $z = 0$ définissent le même cercle dans le plan AOB.
Une droite telle qu'OC peut être présentée comme lieu des points satisfaisant les équations $x = 0$ *et* $y = 0$ ou comme lieu des points satisfaisant $x+y = 0$ *et* $x-y = 0$. Dans la 1ère présentation, on la pense comme intersection des plans AOC et BOC. Dans la 2ème, elle est pensée comme intersection de deux autres plans.

Avant d'entreprendre l'étude systématique de certains types de surfaces et de courbes, nous devons nous familiariser avec quelques manipulations élémentaires.
Soit $(O; \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ un repère cartésien (toujours - sauf avis contraire - avec une base orthonormée d'orientation directe) et deux points $P = (x_1, x_2, x_3)$ et $Q = (y_1, y_2, y_3)$.

Les **coordonnées du vecteur** $\overrightarrow{PQ}$ sont données par

$$\overrightarrow{PQ} = (y_1, y_2, y_3) - (x_1, x_2, x_3) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3).$$

En effet, on note que $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$, donc que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$.

La **distance** de P à Q est le nombre positif $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$.

Les **coordonnées du point** M, milieu de $\overrightarrow{PQ}$ sont données par

$$(m_1, m_2, m_3) = (\frac{1}{2}(x_1 + y_1), \frac{1}{2}(x_2 + y_2), \frac{1}{2}(x_3 + y_3)).$$

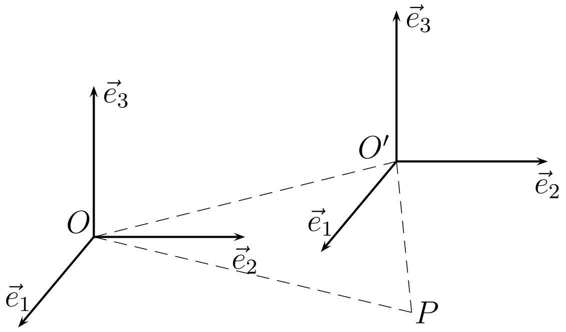
En effet, on a $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OM}$ et donc $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$.

2.2 Changement de repère

Une surface donnée peut se trouver décrite par une équation compliquée si on travaille par rapport à un repère donné alors que par rapport à un repère mieux choisi elle serait décrite par une équation nettement plus simple. Il est essentiel de comprendre ce qui se passe au niveau des équations lorsqu'on décide de changer de repère.

1er type de changement de repère : la translation.

C'est le changement le plus simple. *On change l'origine*, mais *on garde la même base* pour l'espace des flèches.
Soit $(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ le 1er repère et 0' la nouvelle origine, avec comme coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans le repère initial.



Soit alors P un point quelconque de coordonnées (x, y, z) dans le 1er repère et (x', y', z') dans le second. On a $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$. En termes de coordonnées, cela donne

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \\ z = z_0 + z' \end{cases}$$

Grâce à ces formules, on trouve facilement les nouvelles coordonnées d'un point.

Exemple : Si $O' = (3, 7, 2)$ et $P = (1, -3, 5)$ dans le 1er repère, on obtient les nouvelles coordonnées (x', y', z') de P au moyen des relations

$$\begin{cases} 1 = 3 + x' \\ -3 = 7 + y' \\ 5 = 2 + z' \end{cases}$$

d'où $(x', y', z') = (-2, -10, 3)$.

Vu ce calcul, on peut se demander si on n'aurait pas mieux fait de retenir les formules

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \\ z' = z - z_0 \end{cases}$$

Il n'en est rien, car le problème le plus courant n'est pas de trouver les nouvelles coordonnées d'un point donné, mais plutôt de trouver la nouvelle équation (ou les nouvelles équations) d'une surface (ou d'une courbe).

Exemple : Supposons qu'une surface S soit décrite par l'équation

$$x^2 - 17y + 5xz + 14 = 0.$$

Pour obtenir son équation dans le nouveau repère, on remplace tout simplement x, y et z par leur expression en fonction des nouvelles coordonnées. Dans le cas de l'exemple $(O' = (3, 7, 2))$, cela donne comme nouvelle équation

$$(x' + 3)^2 - 17(y' + 7) + 5(x' + 3)(z' + 2) + 14 = 0.$$

Dans cet exemple, pris au hasard, on ne voit pas de simplification.
Mais supposons que S soit la sphère de centre $C = (x_0, y_0, z_0)$ et de rayon R. Son équation s'écrit

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

En effet, un point $P = (x, y, z)$ est sur la sphère si et seulement si $\|\overrightarrow{CP}\| = R$ ou $\|\overrightarrow{CP}\|^2 = R^2$, et la formule vue plus haut pour la longueur d'un vecteur donne l'équation indiquée.
Si on fait une translation en prenant $O' = C$, la nouvelle équation sera

$$(x_0 + x' - x_0)^2 + (y_0 + y' - y_0)^2 + (z_0 + z' - z_0)^2 = R^2,$$

ou encore

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2,$$

qui est bien l'équation d'une sphère de rayon R centrée à l'origine du nouveau repère.

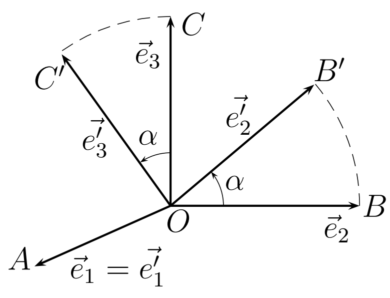
2ème type de changement de repère : la rotation autour d'un axe de coordonnées.

Soit $OABC$ un repère cartésien orthonormé. Faisons par exemple une rotation d'amplitude α dans le sens antihorlogique autour de OA. On a facilement l'expression de la nouvelle base en fonction de l'ancienne :

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1' &= \vec{e}_1 \\
\vec{e}_2' &= (\vec{e}_2' \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{e}_2' \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{e}_2' \cdot \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3 \\
&= 0\,\vec{e}_1 + \cos\alpha\,\vec{e}_2 + \cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha)\vec{e}_3 \\
&= (\cos\alpha)\vec{e}_2 + (\sin\alpha)\vec{e}_3 \\
\vec{e}_3' &= (\vec{e}_3' \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{e}_3' \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{e}_3' \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3 \\
&= 0\,\vec{e}_1 + \cos(\tfrac{\pi}{2} + \alpha)\vec{e}_2 + \cos\alpha\,\vec{e}_3 \\
&= (-\sin\alpha)\vec{e}_2 + (\cos\alpha)\vec{e}_3
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} x = x' \\ y = (\cos\alpha)y' - (\sin\alpha)z' \\ z = (\sin\alpha)y' + (\cos\alpha)z' \end{cases}$$



Remarque – Le passage de la nouvelle base vers l'ancienne peut s'écrire à l'aide de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

On obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Exemple : Soit S la surface décrite par l'équation $y^2 - z^2 = 1$. On fait une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour de OA. On a

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}y' - \frac{\sqrt{2}}{2}z' \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{\sqrt{2}}{2}z' \end{cases}$$

La nouvelle équation

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y' - \frac{\sqrt{2}}{2}z'\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{\sqrt{2}}{2}z'\right)^2 = 1$$

se simplifie en $-2y'z' = 1$.

3 Le premier degré : plans et droites

3.1 Plans

Un plan de $\mathbb{R}^3$ est déterminé par une équation du premier degré liant les variables x, y et z :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

En particulier, on a les plans suivants :
- Plan $Oxy = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 0\} = \{(x, y, 0);\ x,\ y \in \mathbb{R}\}$.
  L'équation de ce plan est $z = 0$.
- Plan $Oxz = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = 0\} = \{(x, 0, z);\ x,\ z \in \mathbb{R}\}$.
  L'équation de ce plan est $y = 0$.
- Plan $Oyz = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 0\} = \{(0, y, z);\ y,\ z \in \mathbb{R}\}$.
  L'équation de ce plan est $x = 0$.

En translatant ces plans, on obtient par exemple les plans
- $z = 2$: plan horizontal à hauteur 2 ;
- $y = -1$: plan vertical perpendiculaire à la feuille ;
- $x = -2$: plan vertical parallèle à la feuille.

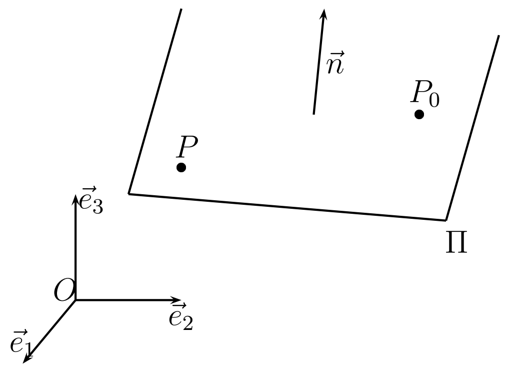
Pour dessiner un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, on repère trois points qui lui appartiennent. On choisit habituellement les intersections avec les 3 axes.

(a) Equation de plans

On suppose l'espace muni d'un repère $(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soit $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{n}$ un vecteur de composantes (n_1, n_2, n_3). **L'équation du plan** Π **passant par** P_0 **et orthogonal au vecteur** $\vec{n}$ est donnée par

$$n_1x + n_2y + n_3z = n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0.$$

Le vecteur $\vec{n}$ est appelé **vecteur normal** au plan.



En effet, un point $P = (x, y, z)$ appartient à Π si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ est orthogonal à $\vec{n}$, donc si et seulement si

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0. \tag{3.1}$$

Comme $\overrightarrow{P_0P}$ a pour coordonnées $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, l'équation (3.1) revient à

$$(x - x_0)n_1 + (y - y_0)n_2 + (z - z_0)n_3 = 0$$

ou encore

$$n_1x + n_2y + n_3z = n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0.$$

Cette équation est appelée **équation cartésienne** du plan Π. On observe que les coefficients respectifs de x, y et z sont précisément les coordonnées du vecteur $\vec{n}$. En fait, toute équation de la forme

$$n_1x + n_2y + n_3z = p \ (p \in \mathbb{R})$$

sera celle d'un plan perpendiculaire au vecteur $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$.

(b) Quelques exemples

1. *Soit Π le plan d'équation $n_1x + n_2y + n_3z = p$ et $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$.*
Donner l'équation d'un plan Π_1 parallèle au plan Π et passant par le point P_2.

   Comme Π_1 est lui aussi orthogonal au vecteur $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, son équation est de la forme
$$n_1x + n_2y + n_3z = q$$
et comme les coordonnées de P_2 doivent satisfaire l'équation, on a $q = n_1x_2 + n_2y_2 + n_3z_2$. D'où l'équation de Π_1 :
$$n_1x + n_2y + n_3z = n_1x_2 + n_2y_2 + n_3z_2.$$

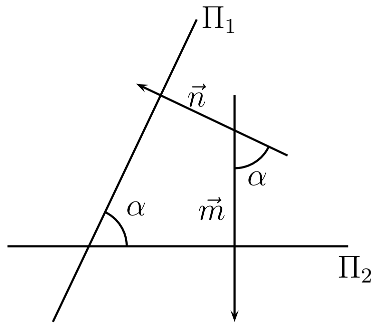
2. *Soit $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ deux vecteurs et $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.*
Donner l'équation du plan Π passant par P_0 et parallèle aux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

   Le plan Π sera perpendiculaire au vecteur $\vec{a} \times \vec{b}$. Or
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$
et donc l'équation de Π est donnée par
$$(x - x_0)(a_2b_3 - a_3b_2) + (y - y_0)(a_3b_1 - a_1b_3) + (z - z_0)(a_1b_2 - a_2b_1) = 0.$$

3. *Soit $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ trois points donnés.*
Donner l'équation du plan Π passant par P_0, P_1 et P_2.

   On se ramène au problème précédent en considérant les vecteurs $\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\overrightarrow{P_0P_2}$ qui sont parallèles à Π.

4. *Trouver l'angle entre les deux plans Π_1, décrit par $n_1x + n_2y + n_3z = p$ et Π_2, décrit par $m_1x + m_2y + m_3z = q$.*

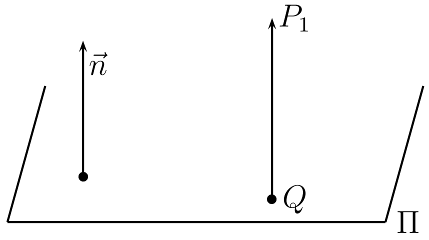


   Le problème revient à trouver l'angle α entre les vecteurs $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, orthogonal à Π_1 et $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$, orthogonal à Π_2. Or
$$|\cos\alpha| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{\|\vec{n}\| \, \|\vec{m}\|}$$

ce qui donne

$$|\cos\alpha| = \frac{|n_1m_1 + n_2m_2 + n_3m_3|}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}}.$$

5. *Trouver la distance du point $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ au plan Π décrit par l'équation $n_1x + n_2y + n_3z = p$.*



Soit $Q = (x_2, y_2, z_2)$ la projection orthogonale de P_1 sur Π. On a $d(P_1, \Pi) = \|\vec{QP_1}\|$. Calculer les coordonnées de Q est inutile ! En effet, on a

$$|\vec{n} \cdot \vec{QP_1}| = \|\vec{n}\|\,\|\vec{QP_1}\|\underbrace{|\cos(\vec{n}, \vec{QP_1})|}_{=1}$$

et donc

$$\|\vec{QP_1}\| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{QP_1}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|n_1(x_1-x_2) + n_2(y_1-y_2) - n_3(z_1-z_2)|}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}.$$

Mais comme $Q \in \Pi$, on peut remplacer $n_1x_2 + n_2y_2 + n_3z_2$ par p, ce qui donne finalement

$$d(P_1, \Pi) = \frac{|n_1x_1 + n_2y_1 + n_3z_1 - p|}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}.$$

6. *Trouver la distance entre 2 plans parallèles.*

   Il suffit de trouver les coordonnées d'un point d'un des plans et de calculer la distance de ce point à l'autre plan.

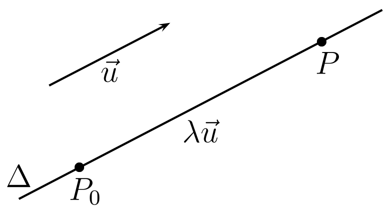
3.2 Droites

Une droite de $\mathbb{R}^3$ est vue comme l'intersection de deux plans. Dans $\mathbb{R}^3$, une droite est donc caractérisée par deux équations de plans :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

(a) Equations de droites

On suppose l'espace muni d'un repère $(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soit $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{u}$ un vecteur de composantes (u_1, u_2, u_3). On recherche **l'équation de la droite Δ passant par P_0 et parallèle au vecteur $\vec{u}$**. Ce vecteur $\vec{u}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite.



Equation vectorielle – Un point P est sur la droite Δ si et seulement si

$$\overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{u}$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Cette équation est l'équation vectorielle de la droite Δ.

Equations paramétriques – En introduisant les coordonnées, on obtient les équations paramétriques de la droite Δ :

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda u_1 \\ y - y_0 = \lambda u_2 \\ z - z_0 = \lambda u_3 \end{cases}$$

Equations cartésiennes – Pour obtenir les équations cartésiennes de la droite Δ, il faut éliminer le paramètre λ.
Cas 1 : Si $u_1u_2u_3 \neq 0$, la proportionnalité de $\overrightarrow{P_0P}$ et $\lambda\vec{u}$ nous donne

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

ou encore

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2} \\ \dfrac{y - y_0}{u_2} = \dfrac{z - z_0}{u_3} \end{cases}$$

Cas 2 : Si un des u_i est nul, on ne peut pas écrire la fraction correspondante mais on écrit l'équation exprimant que le numérateur est nul.

Exemples : La droite Δ passant par (5,-11,-9) et parallèle à $\vec{u} = (0, 2, 3)$ admet les équations

$$\frac{y + 11}{2} = \frac{z + 9}{3} \quad \text{et} \quad x - 5 = 0.$$

La droite passant par (5,-11,-9) et parallèle à $\vec{u} = (0, 0, 3)$ admet les équations

$$x - 5 = 0 \quad \text{et} \quad y + 11 = 0.$$

(b) Quelques exemples

1. *Une droite Δ est présentée comme intersection des plans Π_1, d'équation $n_1x+n_2y+n_3z=p$ et Π_2, d'équation $m_1x+m_2y+m_3z=q$.*
   Trouver un vecteur directeur de la droite Δ.

   Soit $\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)$, perpendiculaire à Π_1 et $\vec{m_1}=(m_1,m_2,m_3)$, perpendiculaire à Π_2. La droite Δ est donc à la fois orthogonale à $\vec{n}$ et à $\vec{m}$ et par conséquent Δ est parallèle au vecteur $\vec{n}\times\vec{m}$. On peut donc prendre le vecteur $\vec{n}\times\vec{m}$ comme vecteur directeur de la droite.

2. *Soit Δ une droite et $P_1=(x_1,y_1,z_1)$.*
   Donner des équations pour la droite Δ' parallèle à Δ et passant par P_1.

   Cas 1 : La droite Δ est connue par un vecteur directeur $\vec{u}$. Comme ce vecteur $\vec{u}$ est aussi parallèle à Δ, on a tout de suite les équations

   $$\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}=\frac{z-z_1}{u_3}$$

   (avec les adaptations évoquées ci-dessus lorsque $u_1u_2u_3=0$).

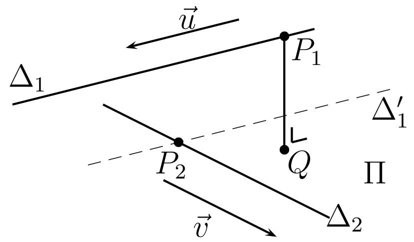
   Cas 2 : La droite Δ est donnée comme intersection des plans Π_1, d'équation $n_1x+n_2y+n_3z=p$ et Π_2, d'équation $n_1x+n_2y+m_3z=q$. On observe que Δ' est l'intersection de Π_1', parallèle à Π_1 et passant par P_1 et de Π_2', parallèle à Π_2 et passant par P_1. D'où les équations pour Δ' :

   $$\begin{cases} n_1x+n_2y+n_3z=n_1x_1+n_2y_1+n_3z_1 \text{ (équation de } \Pi_1') \\ m_1x+m_2y+m_3z=m_1x_1+m_2y_1+m_3z_1 \text{ (équation de } \Pi_2') \end{cases}$$

3. *Trouver l'intersection d'une droite Δ et d'un plan Π.*

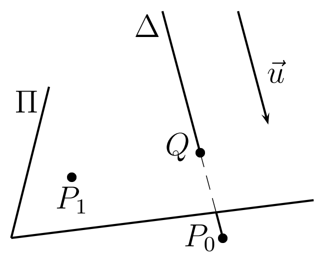
   Si Π est décrit par l'équation $n_1x+n_2y+n_3z=p$ et Δ est décrite par les équations $m_1x+m_2y+m_3z=q$ et $m_1'x+m_2'y+m_3'z=q'$, pour trouver l'intersection, il faudra résoudre le système à 3 équations, 3 inconnues formé par les deux équations de la droite et l'équation du plan.

4. *Trouver la distance entre 2 droites gauches (c'est-à-dire non coplanaires) données.*

   Soit Δ_1, la droite passant par P_1 et de direction $\vec{u}$ et Δ_2, la droite passant par P_2 et de direction $\vec{v}$. On écrit l'équation du plan Π passant par P_2 et parallèle à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. La distance demandée est celle de P_1 à Π.

5. *Trouver la distance du point* $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *à la droite* Δ *passant par* $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *et parallèle à* $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.



On mène par P_1 un plan Π perpendiculaire à Δ. Ce plan aura une équation de la forme

$$u_1x + u_2y + u_3z = u_1x_1 + u_2y_1 + u_3z_1.$$

On cherche alors le point d'intersection Q entre Π et Δ. La distance demandée est $\|\vec{P_1Q}\|$.

4 Le deuxième degré : coniques

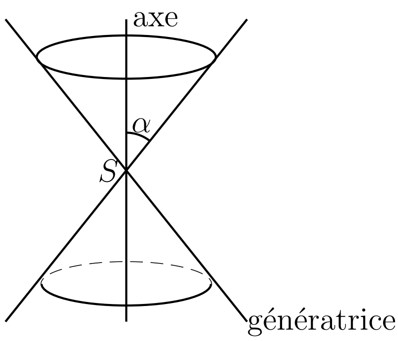
4.1 Introduction

On appelle courbe du second degré toute courbe dont l'équation s'écrit

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0. \tag{4.2}$$

En général, il est difficile d'exprimer y de façon explicite en fonction de x. Puisque l'équation est du second degré en y, on devra s'attendre à ce que pour une valeur donnée de x, il y ait deux valeurs correspondantes pour y (et inversément). Autrement dit, une parallèle à l'axe Oy (comme une parallèle à l'axe Ox) pourra couper la courbe en 2 points. Dans le cas particulier où $b = c = 0$, on retrouve l'équation de la parabole. Si $a = b = 0$, on se trouve devant l'équation d'une hyperbole équilatère (dont les asymptotes sont perpendiculaires). Enfin, si $a = b$ et $c = 0$, il s'agit de l'équation d'un cercle.

Voyons comment obtenir ces différentes courbes. On se place dans un plan et on considère 2 droites qui se coupent, faisant entre elles un angle α. On prend l'une des droites comme axe et on fait tourner le plan autour de cet axe. L'autre droite (appelée **génératrice**) engendre une surface appelée **cône de révolution**. Le point de rencontre des droites est appelé **sommet**.



En coupant cette surface par différents plans, on obtient différentes courbes. Soit β, l'angle formé par le plan avec l'axe du cône.
Si le plan est perpendiculaire à l'axe, on obtient un cercle, éventuellement réduit à un point ($\beta = \frac{\pi}{2}$).
Si on incline un peu le plan, on obtient une ellipse ($\beta > \alpha$).
Si on incline davantage et qu'on le met en position parallèle à la génératrice, on obtient une parabole, éventuellement dégénérée en 2 droites confondues ($\beta = \alpha$).
Si on redresse encore le plan, il va rencontrer 2 nappes du cône et déterminer une courbe en 2 morceaux, appelée hyperbole ($\beta < \alpha$).
Les courbes obtenues de cette façon sont toutes appelées **coniques**.

Rappel : La distance entre 2 points $A = (x_a, y_a)$ et $B = (x_b, y_b)$ est donnée par

$$d(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

4.2 Cercles

Dans un plan fixé, on se donne un point C et un nombre $r > 0$.

Définition On appelle **cercle de centre** C **et de rayon** r, l'ensemble des points du plan qui sont à une distance r du point C. C'est donc l'ensemble des points P du plan qui vérifient la condition

$$d(P, C) = r.$$

Pour établir l'équation cartésienne du cercle, on se place dans un repère cartésien. Dans ce repère, $C = (x_c, y_c)$. Soit $P = (x, y)$, un point du cercle. Puisque $d(P, C) = r$, on a

$$\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = r.$$

L'équation du cercle centré en (x_c, y_c) **et de rayon** r est donc

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2. \tag{4.3}$$

En particulier, l'équation du cercle centré en $(0, 0)$ et de rayon r est

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{4.4}$$

Remarque – Si dans (4.4) on change x en $-x$ ou y en $-y$, on ne change rien à l'expression. La courbe admet donc deux axes de symétrie, les axes Ox et Oy, et par conséquent un centre de symétrie qui est l'origine des axes.

Remarque – En développant (4.3) et en posant $\alpha = -2x_c$, $\beta = -2y_c$ et $\gamma = x_c^2 + y_c^2 - r^2$, on obtient une autre forme pour l'équation du cercle :

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Il s'agit bien d'une équation du type (4.2). Dans ce cas, les coordonnées du centre sont données par $(\frac{-\alpha}{2}, \frac{-\beta}{2})$ et le rayon est

$$\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma},$$

à condition que $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma \geq 0$.

4.3 Ellipses

Dans un plan fixé, on se donne deux points distincts F_1 et F_2, et un réel positif a tel que

$$2a > d(F_1, F_2) = 2c.$$

Définition On appelle **ellipse de foyers F_1 et F_2 et de demi grand axe** a, l'ensemble des points P du plan qui vérifient la condition

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = \|\vec{PF_1}\| + \|\vec{PF_2}\| = 2a.$$

Le milieu du segment $[F_1, F_2]$ est appelé **centre** de l'ellipse.

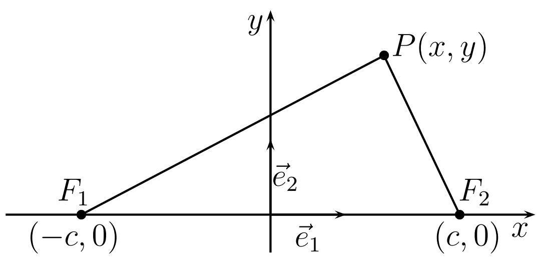
Remarque – Dans le triangle PF_1F_2, on a

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) > d(F_1, F_2),$$

ce qui explique la condition $2a > 2c$.

(a) Ellipse dont le centre est à l'origine et les foyers sur l'un des axes de coordonnées

Nous allons établir l'équation cartésienne de l'ellipse. Pour cela, on prend comme origine O d'un repère cartésien, le point milieu du segment $[F_1, F_2]$, comme axe Ox la droite F_1F_2 et comme axe Oy, la droite perpendiculaire à F_1F_2 passant par O. Soit $\vec{e}_1 = \frac{\vec{F_1F_2}}{\|\vec{F_1F_2}\|}$ et $\vec{e}_2$ formant avec $\vec{e}_1$ un angle de $\frac{\pi}{2}$ (dans le sens antihorlogique). Dans ce repère, on a $F_1 = (-c, 0)$ et $F_2 = (c, 0)$.



Soit $P = (x, y)$, un point de l'ellipse. Puisque $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, on a

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

En élevant deux fois au carré, on trouve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Si on pose $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, on obtient **l'équation canonique de l'ellipse**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Cette courbe coupe l'axe Ox en $(a, 0)$ et $(-a, 0)$. Le segment $[-a, a]$ est appelé **grand axe** de l'ellipse. Elle coupe l'axe Oy en $(0, b)$ et $(0, -b)$. Le segment $[-b, b]$ est appelé **petit axe** de l'ellipse. Les points $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ et $(0, -b)$ sont appelés **sommets** de l'ellipse. Elle est symétrique par rapport à Ox et Oy vu que x et y n'apparaissent dans l'équation qu'élevés au carré.

Remarque – Si on avait décidé de placer les foyers sur l'axe Oy, on aurait obtenu une équation de la forme

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Pour voir sur quel axe ont été placés les foyers, il suffit de voir pour quelle coordonnée le dénominateur est le plus grand.

Exemple : L'équation $5x^2 + 10y^2 = 50$, que l'on peut écrire

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1,$$

représente une ellipse dont les foyers sont sur l'axe Ox, alors que l'ellipse d'équation $9x^2 + 4y^2 = 36$ représente une ellipse dont les foyers sont sur l'axe Oy.

La quantité $e = \frac{c}{a}$ est appelée **excentricité** de l'ellipse. Elle mesure le degré d'aplatissement de l'ellipse. On a $e \in]0, 1[$. Notons que si pour a donné c devient très petit, l'excentricité s'approche de 0 et b s'approche de a. L'ellipse s'approche alors d'un cercle de rayon a.

(b) Ellipse dont le centre n'est pas à l'origine

Si dans le repère $O'X'Y'$, l'ellipse a pour équation

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1,$$

en faisant le changement de coordonnées

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$$

on trouve l'équation de l'ellipse dans le repère Oxy,

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

où (x_0, y_0) sont les coordonnées du centre. En développant cette expression, on trouve bien une équation du type (4.2).

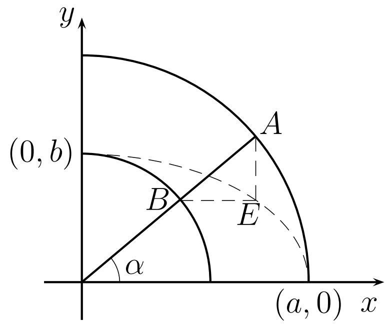
Remarque – L'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

peut se lire

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

de sorte que $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$ peuvent être vus comme $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ pour un certain $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On obtient ainsi la **description paramétrique** de l'ellipse : $x = a\cos\alpha$ et $y = b\sin\alpha$.



On en déduit une construction de l'ellipse point par point. On dessine les cercles de centre 0 et de rayons a et b. Une demi-droite issue de 0 et formant un angle α avec Ox rencontre le grand cercle en un point A d'abscisse $a\cos\alpha$ et le petit cercle en un point B d'ordonnée $b\sin\alpha$. La verticale passant par A et l'horizontale passant par B se rencontrent en un point $E = (a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ qui appartient l'ellipse. En recommençant l'opération pour différentes valeurs de α, on obtient des points de l'ellipse.

4.4 Hyperboles

Dans un plan fixé, on se donne deux points distincts F_1 et F_2, et un réel positif a tel que

$$2a < d(F_1, F_2) = 2c.$$

Définition On appelle **hyperbole de foyers** F_1 **et** F_2 **et de demi-axe** a, l'ensemble des points P du plan qui vérifient la condition

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |\|\vec{PF_1}\| - \|\vec{PF_2}\|| = 2a.$$

Le milieu du segment $[F_1, F_2]$ est appelé **centre** de l'hyperbole.

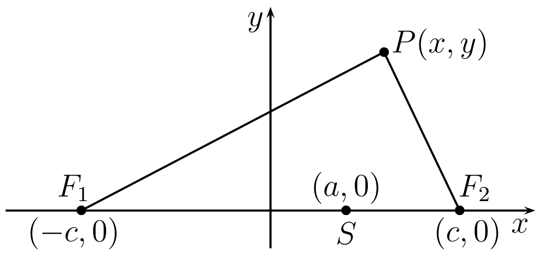
Remarque – Dans le triangle PF_1F_2, on a

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) < d(F_1, F_2),$$

ce qui explique la condition $2a < 2c$.

(a) Hyperbole dont le centre est à l'origine et les foyers sur l'un des axes de coordonnées

Nous allons établir l'équation cartésienne de l'hyperbole. Pour cela, on prend un repère cartésien comme pour l'ellipse. Dans ce repère, on a $F_1 = (-c, 0)$ et $F_2 = (c, 0)$.



Soit $P = (x, y)$, un point de l'hyperbole. Puisque $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$, on a

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a.$$

En refaisant le même calcul que pour l'ellipse et en posant cette fois $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, on obtient **l'équation canonique de l'hyperbole**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4.5}$$

Cette courbe coupe l'axe Ox en $(a, 0)$ et $(-a, 0)$. Ces points sont appelés **sommets** de l'hyperbole. Elle est symétrique par rapport à Ox et Oy et ne coupe pas l'axe Oy. La courbe comprend 2 branches, l'une du coté $x > 0$, l'autre du coté $x < 0$.

Remarque – Si on avait décidé de placer les foyers sur l'axe Oy, on aurait obtenu une équation de la forme

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Cette fois, l'axe qui porte les foyers est celui de la coordonnée dont le coefficient est positif.

L'équation (4.5) peut encore s'écrire

$$y^2 = b^2 \left(\frac{x^2 - a^2}{a^2} \right)$$

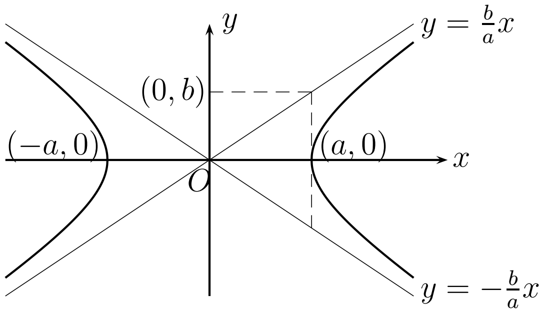
ou

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Si x tend vers l'infini, $\dfrac{a^2}{x^2}$ tend vers 0 et l'hyperbole tend à se confondre avec les droites

$$y = \frac{b}{a}\,x \qquad \text{et } y = -\frac{b}{a}\,x.$$

Ces droites sont appelées **asymptotes** de l'hyperbole.



La quantité $e = \frac{c}{a}$ est encore appelée **excentricité**. Cette fois $e \in]1, \rightarrow [$.

Cas particulier : si $b = a$, les asymptotes sont perpendiculaires entre elles. On parle alors d'**hyperbole équilatère**.

(b) Hyperbole dont le centre n'est pas à l'origine

Par le même raisonnement que pour l'ellipse, on trouve que l'hyperbole de centre (x_0, y_0) a pour équation

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

4.5 Paraboles

Dans un plan fixé, on se donne un point F et une droite Δ tels que

$$d(F, \Delta) = 2c > 0.$$

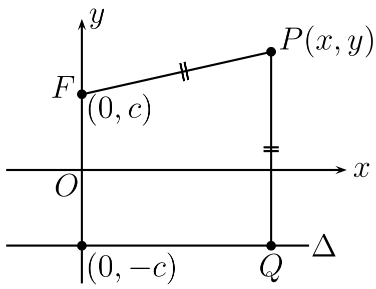
Définition On appelle **parabole de foyer F et de directrice** Δ, l'ensemble des points du plan qui sont à égale distance du point F et de la droite Δ ($F \notin \Delta$). C'est donc l'ensemble des points P du plan qui vérifient la condition

$$d(P, F) = d(P, \Delta).$$

On appelle **axe** de la parabole la perpendiculaire à la directrice issue du foyer. On appelle **sommet** de la parabole le point d'intersection de la parabole et de son axe.

(a) Parabole dont le sommet est à l'origine et le foyer sur l'un des axes de coordonnées

Pour établir l'équation cartésienne de la parabole, on prend un repère tel que $F = (0, c)$ et Δ a pour équation $y = -c$.



Soit $P = (x, y)$, un point de la parabole. Puisque $d(P, F) = d(P, \Delta)$, on a

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = \sqrt{0^2 + (y+c)^2}.$$

En élevant au carré, on trouve

$$x^2 = 4yc,$$

et on obtient **l'équation canonique de la parabole**

$$y = \frac{x^2}{4c}.$$

Cette courbe est symétrique par rapport à Oy et passe par l'origine O qui est son **sommet**.

Remarque – Si on avait décidé de placer le foyer sur l'axe Ox, on aurait obtenu une équation de la forme

$$x = \frac{y^2}{4c}.$$

(b) Parabole dont le sommet n'est pas à l'origine

Par un raisonnement semblable à celui fait pour les ellipses, on arrive aux conclusions suivantes. Soit $c > 0$. Une parabole de sommet (x_0, y_0) a pour équation

$(x - x_0)^2 = 4c(y - y_0)$	si la parabole est verticale, ouverte vers le haut ;
$(x - x_0)^2 = -4c(y - y_0)$	si la parabole est verticale, ouverte vers le bas ;
$(y - y_0)^2 = 4c(x - x_0)$	si la parabole est horizontale, ouverte vers la droite ;
$(y - y_0)^2 = -4c(x - x_0)$	si la parabole est horizontale, ouverte vers la gauche.

Remarque – Le lecteur est certainement familiarisé avec la parabole comme graphe d'une fonction du type $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Le sommet d'une telle parabole a comme coordonnées

$$(-\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}).$$

En faisant une translation vers ce sommet, on voit que l'équation $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ devient

$$y' - \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = \alpha(x' - \frac{\beta}{2\alpha})^2 + \beta(x' - \frac{\beta}{2\alpha}) + \gamma$$

et, après simplification, on trouve $y' = \alpha x'^2$.

4.6 Etude de l'équation générale du 2ème degré

Si on donne une équation du 2ème degré telle que

$$17x^2 - 41xy - 9x + 7y + 13 = 0,$$

comment savoir quel genre de courbe elle décrit et comment déterminer les éléments métriques de celle-ci (tels que : longueur des axes, excentricité, distance du foyer à la directrice pour la parabole, etc.) ?

L'équation générale peut s'écrire

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Remarque – On a mis des 2 à certains endroits pour permettre l'écriture sous la forme

$$(x\,y\,1)\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

On peut montrer que le déterminant de la matrice des coefficients joue un rôle important.

La quantité $\delta = AC - B^2$ joue un rôle très important : elle est invariante par changement de repère et permet de déterminer le genre de la conique.

(a) Réduction sous forme canonique

Voyons d'abord comment simplifier l'équation initiale en faisant des changements de repère appropriés.

1ère étape : on élimine le terme en xy au moyen d'une rotation. Si $B \neq 0$, on effectue une rotation en vue d'obtenir une équation où $B' = 0$. Ceci est possible car après une rotation d'angle α on obtient

$$2B' = 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (C - A)2\sin\alpha\cos\alpha$$

ou encore

$$2B' = 2B\cos 2\alpha + (C - A)\sin 2\alpha$$

de sorte qu'on aura $B' = 0$ pour α tel que

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B}.$$

2ème étape : on fait une translation pour éliminer les termes du premier degré. On regarde la nouvelle équation

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

et on agit selon le cas qui se présente :

Cas 1 : si $A'C' \neq 0$, on fait une translation $x' = x_0 + x''$ et $y' = y_0 + y''$ en vue d'éliminer les termes du 1er degré.

Cas 2 : si $A'C' = 0$, comme les deux ne peuvent pas être nuls, on a deux cas possibles :
• $A' \neq 0$ et $C' = 0$ et on fait une translation en vue d'éliminer le terme du 1er degré en x'' et le terme indépendant ;
• $A' = 0$ et $C' \neq 0$ et on fait une translation en vue d'éliminer le terme du 1er degré en y'' et le terme indépendant.

3ème étape : on obtient les équations canoniques.

Cas 1 : on aboutit à l'équation $A'x''^2 + C'y''^2 + F'' = 0$. Le caractère non dégénéré impose que $F'' \neq 0$. On peut donc conclure comme suit :
• si $A' = C'$, il s'agit d'un **cercle** ;
• si A' et C' ont même signe, opposé à celui de F'', l'équation peut s'écrire

$$\frac{x''^2}{(-F''/A')} + \frac{y''^2}{(-F''/C')} = 1$$

et on reconnaît qu'il s'agit d'une **ellipse**.
• si A' et C' ont même signe que F'', l'équation ne représente rien du tout.
• si A' et C' sont de signes opposés, on est devant une **hyperbole** avec les foyers sur Oy'' ou Ox'' selon que F'' a le signe de A' ou de C'.

Cas 2 : on aboutit aux équations $A'x''^2 + 2D''y'' = 0$ ou $C'y''^2 + 2E''x'' = 0$, qui représentent des **paraboles** ayant respectivement Oy'' ou Ox'' comme axe de symétrie.

Une fois l'équation canonique obtenue, l'étude des diverses propriétés métriques se fait facilement (voir ci-dessus).

(b) Détermination rapide du genre de la conique

Il arrive souvent qu'on veuille savoir rapidement, avec un minimum de calculs, à quel genre de courbe on a affaire. Pour connaître de suite le genre de la courbe, en supposant qu'elle n'est pas dégénérée et qu'il ne s'agit pas d'un cercle, il suffit de regarder la quantité

$$\delta = AC - B^2.$$

On déduit de ce qui a été fait ci-dessus que

si $\delta > 0$ alors la courbe est une ellipse,
si $\delta < 0$ alors la courbe est une hyperbole,
si $\delta = 0$ alors la courbe est une parabole.

De plus, quand on regarde les équations canoniques, il est clair que

si la courbe est une ellipse alors $\delta > 0$,
si la courbe est une hyperbole alors on a $\delta < 0$,
si la courbe est une parabole alors on a $\delta = 0$.

Comme δ est un invariant, ces implications sont vraies aussi bien avant qu'après la réduction.

Exemple : Etudions la conique d'équation

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0.$$

C'est une hyperbole vu que $\delta = AC - B^2 = -\frac{1}{4} < 0$.

Faisons une rotation d'angle α tel que $\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{A-C}{2B} = 0$. On prend $\alpha = \frac{\pi}{4}$. On obtient

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

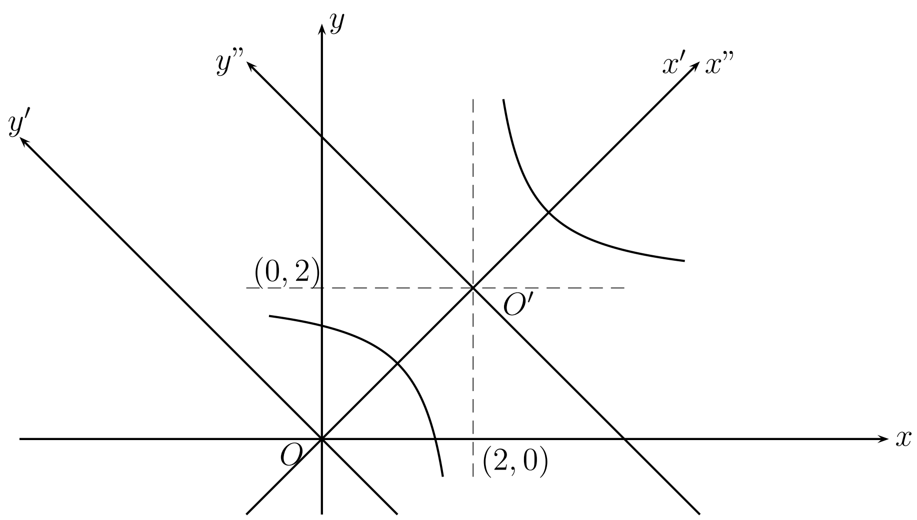
et la nouvelle équation s'écrit

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} + 2x'\sqrt{2} + 2 = 0.$$

Faisons une translation en vue d'éliminer les termes du 1er degré. En posant $x' = x_0 + x''$ et $y' = y_0 + y''$, on voit que cette élimination impose les relations $x_0 = 2\sqrt{2}$ et $y_0 = 0$. Ceci mène à l'équation

$$\frac{x''^2}{4} - \frac{y''^2}{4} = 1.$$

Il s'agit d'une hyperbole équilatère dont les sommets dans le repère $O'x''y''$ sont $(2,0)$ et $(-2,0)$. Sachant que les coordonnées de O' sont $(x_0, y_0) = (2\sqrt{2}, 0)$, on peut trouver les coordonnées des sommets dans le repère $Ox'y'$ et ensuite dans le repère Oxy en utilisant les équations obtenues lors de la rotation.

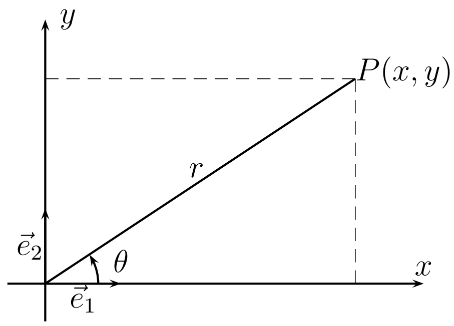


Remarque – On constate que la rotation a eu pour effet d'amener les axes de coordonnées en position parallèle aux axes de symétrie de l'hyperbole. La translation a eu pour effet d'amener l'origine au centre de symétrie, point de concours des axes de symétrie.
On pourrait faire des constatations similaires si la courbe considérée était une ellipse.
Si la courbe est une parabole, l'effet de la rotation est d'amener un des axes de coordonnées en position parallèle à l'axe de symétrie. Et la translation qui suit a pour effet d'amener l'origine au sommet.

5 Autres systèmes de coordonnées

5.1 Dans le plan : coordonnées polaires

Soit $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ un repère cartésien orthonormé. Pour préciser la position d'un point P, au lieu de ses coordonnées cartésiennes (x, y), on peut donner les informations suivantes :
- la distance de P à l'origine, notée r $(r > 0)$,
- l'angle entre l'axe Ox et OP, noté θ. Par convention, $\theta \in [0, 2\pi[$.



On observe immédiatement que

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Le lien dans l'autre sens demande un peu plus d'attention. Vu que r est la distance de P à l'origine, on a

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Pour θ, on note que si $x = 0$ alors $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$, selon que $y > 0$ ou $y < 0$. Si $x \neq 0$, on a

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x},$$

ce qui nous permet de trouver θ, en y ajoutant au besoin π ou 2π selon les signes de x et y.

Exemple : Pour $P = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ on trouve

$$r = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

et

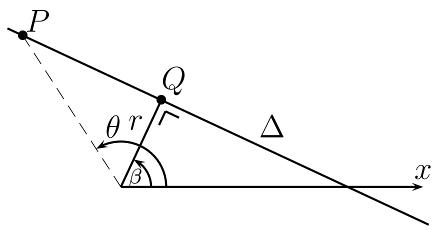
$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$$

et on doit prendre $\theta = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$ car les coordonnées de P sont toutes les deux négatives.

L'intérêt des coordonnées polaires est qu'elles permettent de décrire certaines figures géométriques à l'aide d'équations particulièrement simples.

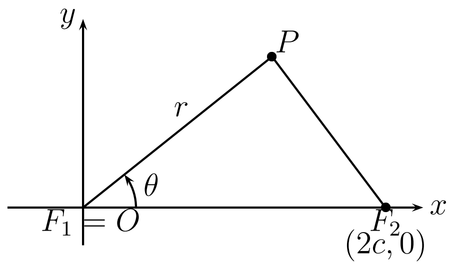
Quelques exemples

1. *Le cercle de centre O et de rayon R* sera décrit par l'équation $r = R$.
   Une demi-droite issue de O et formant un angle α avec Ox sera décrite par $\theta = \alpha$.
2. *Cherchons l'équation de la droite Δ telle que $d(O, \Delta) = p > 0$ et l'angle entre OQ et l'axe Ox vaut β.*



   On peut dire que $P \in \Delta$ si $r\cos(\theta - \beta) = p$. Ici, on préférera sans doute l'équation du 1er degré qu'on trouve en coordonnées cartésiennes.
3. *L'équation d'une ellipse en coordonnées polaires est*

$$r = \frac{a - c^2/a}{1 + e\cos\theta}.$$



En effet, on a

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{PF_2}\|^2 &= \overrightarrow{PF_2} \cdot \overrightarrow{PF_2} \\ &= (\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{F_1F_2}) \cdot (\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{F_1F_2}) \end{aligned}$$

et vu que $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{F_1F_2} = 2cr\cos\theta$, on a

$$\|\overrightarrow{PF_2}\|^2 = r^2 + 4cr\cos\theta + 4c^2.$$

La condition $\|\overrightarrow{PF_1}\| + \|\overrightarrow{PF_2}\| = 2a$ peut alors se récrire $\|\overrightarrow{PF_2}\| = 2a - r$ ou encore

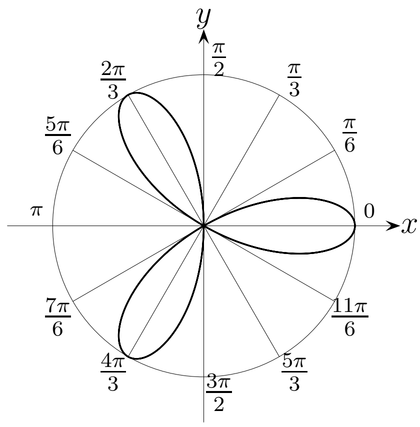
$$r^2 + 4cr\cos\theta + 4c^2 = 4a^2 + r^2 - 4ar,$$

c'est-à-dire $r(a + c\cos\theta) = a^2 - c^2$. Finalement on obtient l'équation de l'ellipse

$$r = \frac{a - c^2/a}{1 + e\cos\theta}.$$

Cette description est utilisée en astronomie car la terre (ou une autre planète) décrit une ellipse dont un foyer est occupé par le soleil.

4. *L'équation de la feuille de trèfle est donnée par* $r = \cos 3\theta$.



Si on essayait d'obtenir l'équation cartésienne correspondante, on pourrait utiliser le fait que $\cos 3\theta = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$ et en tirer la relation

$$r^4 = r^3\cos^3\theta - 3(r^2\sin^2\theta)(r\cos\theta)$$

ou encore

$$(x^2 + y^2)^2 = x^3 - 3xy^2.$$

Il n'est pas évident de voir l'allure de la courbe à partir de cette équation !

En coordonnées polaires, les choses sont plus simples. Tout d'abord, vu que $r \in [0, 1]$, la courbe est contenue dans le disque de rayon 1 centré à l'origine. On fait alors varier θ de 0 à 2π et on examine étape par étape les valeurs de r données par la condition $r = \cos 3\theta$:

• si θ parcourt $[0, \frac{\pi}{6}]$ alors 3θ parcourt $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\cos 3\theta$ descend de 1 à 0.
• si $\theta \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$ alors 3θ parcourt $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ et $\cos 3\theta$ prend des valeurs négatives … ce qui ne définit aucun point.
• si $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$ alors $3\theta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ et $\cos 3\theta$ remonte de 0 à 1.

En continuant de la sorte, on découvre la courbe suivante.

Pour un trèfle à 4 feuilles ou 5 feuilles, on prend $r = \cos 4\theta$ ou $r = \cos 5\theta$.

5.2 Dans l'espace : coordonnées cylindriques et sphériques

(a) Coordonnées cylindriques

Pour obtenir les coordonnées cylindriques, on garde une des coordonnées cartésiennes, par exemple z, et, dans le plan de coordonnées correspondant aux 2 autres on passe aux coordonnées polaires. Un point P se trouvera ainsi repéré par
- la cote z,
- les coordonnées polaires r et θ de sa projection orthogonale dans le plan Oxy.

Ce type de coordonnées est indiqué pour une surface dont les coupes horizontales sont des cercles centrés sur l'axe Oz.

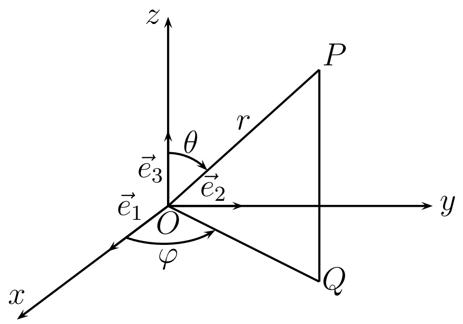
Quelques exemples

1. Un *cylindre circulaire droit d'axe Oz et de rayon R* sera décrit par l'équation $r = R$.
2. *Une surface de révolution engendrée par la rotation autour de Oz du graphe d'une fonction* $f\ : I \to \mathbb{R}^+ ; z \to f(z)$ sera décrite par $r = f(z)$ simplement. Par exemple, le paraboloïde $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$ sera décrit par $r = a\sqrt{z}$.

Ces coordonnées sont souvent utilisées en physique pour l'étude de mouvements de rotation par exemple.

(b) Coordonnées sphériques

Pour préciser la position d'un point sur la surface terrestre, on donne la longitude et la latitude. Les coordonnées sphériques vont dans ce sens.



On considère un repère orthonormé $(0; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Pour préciser la position d'un point P dans l'espace, on peut donner les trois quantités suivantes :
- la distance du point P à l'origine, notée r ($r > 0$),
- l'angle que fait le demi-plan comprenant Oz et P avec le demi-plan Oxz, appelé **longitude** et noté φ,
- l'angle que fait OP avec Oz, appelé **co-latitude** et noté θ (la latitude se compte à partir de l'équateur).

Le lien avec les coordonnées cartésiennes est donné par les équations

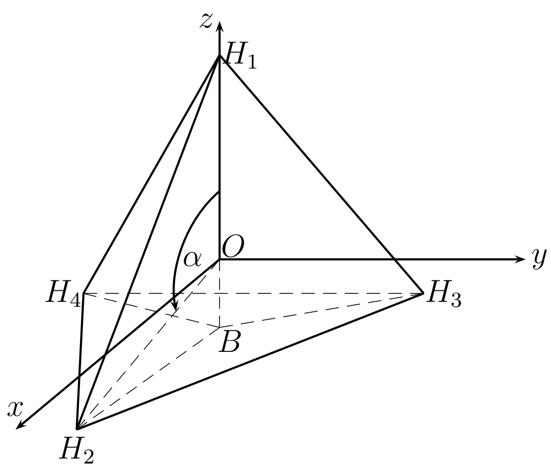
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Quelques exemples

1. La *sphère de centre O et de rayon R* est décrite par l'équation $r = R$.
2. Un *demi-plan issu de Oz* sera décrit par $\varphi = \alpha$ (α donné).
3. Un *cône de révolution d'axe Oz* sera décrit par $\theta = \alpha$ (α donné).

Application

Une application intéressante est le calcul de l'angle entre les liaisons d'une molécule de méthane (CH_4).



On a un tétraèdre régulier de sommets H_1, H_2, H_3, H_4. L'origine O est placée au centre, H_1 est sur l'axe Oz, H_2, H_3, H_4 sont les sommets d'un triangle équilatéral dans un plan horizontal, avec H_2 dans Oxz sous le plan Oxy. On cherche à déterminer l'angle α.
Puisque c'est l'angle qui nous intéresse, nous pouvons supposer que $\|\vec{OH_i}\| = 1$.
On a de suite : $\vec{OH_1} \cdot \vec{OH_2} = \cos\alpha = \vec{OH_2} \cdot \vec{OH_3}$.
On va calculer $\vec{OH_2} \cdot \vec{OH_3}$ d'une autre manière : les coordonnées sphériques de H_2 sont $r = 1$, $\varphi = 0$ et $\theta = \alpha$. Les coordonnées sphériques de H_3 sont $r = 1$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ et $\theta = \alpha$ (en effet, le triangle $H_2H_3H_4$ est équilatéral et la somme des angles entre BH_2, BH_3 et BH_4 vaut 2π). Les coordonnées cartésiennes de H_2 sont donc $(\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$ et celles de H_3 sont $(-\frac{\sin\alpha}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha, \cos\alpha)$.
Donc

$$\vec{OH_2} \cdot \vec{OH_3} = -\frac{\sin^2\alpha}{2} + \cos^2\alpha$$

et on a l'équation

$$\cos\alpha = -\frac{\sin^2\alpha}{2} + \cos^2\alpha,$$

ou encore

$$3\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 1 = 0.$$

On en tire

$$\cos\alpha = \frac{2 \pm 4}{6}$$

et comme la valeur $\alpha = 0$ ne doit pas être retenue, il reste

$$\cos\alpha = -\frac{1}{3}.$$

Remarque – On peut arriver à cette réponse autrement, en utilisant par exemple le fait que O, centre de gravité du tétraèdre, est situé aux trois quarts de H_1B.

Chapitre 11

Exercices

1 Séances d'exercices

Séance 1 : Chapitre 1 - Les fonctions

Exercices à préparer avant la séance : 1, 2 et 6.

1. Trouvez, s'ils existent, les majorants, les minorants, le supremum et l'infimum des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :
   (a) $\{\frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$;
   (b) $\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$;
   (c) $\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. Déterminez le domaine de définition le plus grand possible des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$;
   (b) $f(x) = \frac{1}{x+7}$;
   (c) $f(x) = \frac{1}{\cos 3x}$;
   (d) $f(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$;
   (e) $f(x) = (x^2 + 2x - 3)^{-\frac{1}{2}}$.
3. (a) Si f et g sont deux fonctions paires (resp. impaires), quelles sont les propriétés de symétrie des fonctions $f + g$ et $f \cdot g$?
   (b) Si f est une fonction paire et g une fonction impaire, quelles sont les propriétés de symétrie des fonctions $f + g$ et $f \cdot g$?
4. (a) Trouvez la fonction réciproque de la fonction $f(x) = \frac{7x}{2x+3}$.
   (b) Soit $g(x) = x - 7$ et $f(y) = 3y$; déterminez $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(y)$.
   (c) Soit $g(x) = x + 2$ et $f(y) = y^{\frac{1}{2}}$; déterminez $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(y)$.
   (d) Soit $f(x) = (x-5)^{\frac{1}{2}}$; déterminez une fonction $g(x)$ telle que $(f\circ g)(x) = (x^2-5)^{\frac{1}{2}}$.

5. (a) Soient $f\colon B \to C$ et $g\colon A \to B$ deux fonctions injectives (resp. surjectives sur C et sur B, bijectives). Montrez que $f \circ g$ est injective (resp. surjective sur C, bijective).
   (b) Supposons que la fonction composée $f \circ g$ soit injective (resp. surjective sur C). Montrez que g est injective (resp. f est surjective sur C).
   (c) Supposons que la fonction composée $f \circ g$ soit injective (resp. surjective sur C). Montrez que f n'est pas nécessairement injective (resp. g n'est pas nécessairement surjective sur A).
6. (a) Trouvez l'équation d'une droite qui passe par (7,2).
   (b) Trouvez l'équation d'une droite perpendiculaire à la droite d'équation $y+2x = 3$.
   (c) Trouvez l'équation de la droite α passant par (2,3) et parallèle à la droite β passant par les points (7,9) et (3,-2). Déterminez la pente de la droite α ainsi que ses intersections avec les axes.
7. (Janvier 2004)
   (a) La fonction $f(x) = \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$ est-elle paire, impaire ou ni paire, ni impaire ? Justifiez.
   (b) Montrez que la formule suivante est fausse :
   $$\exp(x^n) = (\exp x) \cdot (\exp n), \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}\,.$$
   (c) Déterminez le domaine de la fonction $g(x) = \log\left(\sqrt[3]{1-x^2}\right)$. Justifiez votre réponse.

Séance 2 : Chapitre 2 - Limite de fonctions

Exercices à préparer avant la séance : 1 et 2.

1. (a) En utilisant la définition de limite d'une fonction en un point, montrez que la limite de la fonction $f(x) = 5x - 3$ au point 2 est 7.
   (b) En utilisant la définition de limite d'une fonction à l'infini, montrez que la limite de la fonction $f(x) = 5x^2 - 3$ pour x tendant vers $+\infty$ est $+\infty$.
2. Interprétez sur un dessin la condition $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$. Déterminez le δ en prenant, dans la définition de limite, d'abord $\epsilon = 1$ et ensuite $\epsilon > 0$ arbitraire.
3. Déterminez la limite au point $x = 1$ de la fonction $f(x) = x^2 + 1$. Justifiez votre réponse par la définition de limite.
4. Soit $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et $g\colon A \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrez que $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

5. Soit une fonction rationnelle
$$Q(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}.$$
Démontrez les propriétés suivantes :
   (a) $\lim_{x\to\pm\infty} Q(x) = 0$, lorsque $n < m$.
   (b) $\lim_{x\to\pm\infty} Q(x) = \frac{a_n}{b_m}$, lorsque $n = m$.
   (c) $\lim_{x\to\pm\infty} Q(x) = +\infty$ ou $-\infty$, lorsque $n > m$.
6. Déterminez les coefficients a et b pour que la fonction
$$f(x) = \frac{ax^2 + 4x + b}{x^2 + x - 2}$$
ait une limite finie pour x tendant vers 1 et vers -2.
7. (Septembre 2004) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - \sin x| \leq |x|$. Déterminez, si elle existe, la limite de f en 0.
8. (Novembre 2004) En utilisant la définition de limite, démontrez la proposition suivante :
$$\lim_{x\to a} f(x) = L \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} |f(x)| = |L|.$$
Montrez sur un exemple que la réciproque de cette proposition n'est pas vraie.
9. (a) Calculez, si elle existe, la limite pour x qui tend vers 0 de la fonction
$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } x < 0, \\ \frac{\sin(x)}{|x|} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$
   (b) Quelles propriétés avez-vous utilisées au point précédent ?

Séance 3 : Chapitre 2 - Limite de fonctions, calcul des limites

Exercices à préparer avant la séance : 3.

1. Calculez les limites suivantes si elles existent :
   (a) $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$;
   (b) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x}$;
   (c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x}$.
2. Calculez les limites suivantes si elles existent :
   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(ax)}{bx}$;

   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x}$;
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[4]{x^2-1}$;
   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$.
3. Calculez les limites suivantes si elles existent :
   (a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x-2}{x^2+3x}$;
   (b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-1}{4+x-3x^2}$;
   (c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$;
   (d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.
4. Recherchez les asymptotes des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;
   (b) $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-2x-3}$;
   (c) $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$;
   (d) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$.
5. (Novembre 2004)
   (a) Calculez (sans utiliser le théorème de l'Hospital) la limite suivante :
   $$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}-1}.$$
   (b) Donnez un exemple de fonction qui n'est pas affine (c.-à-d. dont le graphe n'est pas une droite) et dont le graphe admet comme asymptote la droite d'équation $y = -2x+3$.

Séance 4 : Chapitre 3 - Continuité

Exercices à préparer avant la séance : 1 et 8.

1. Étudiez la continuité des fonctions définies comme suit :
   (a) $f(x) = x$ si $x \in [-1,1]$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$;
   (b) $f(x) = 2-x$ si $x<0$, $f(x) = 2x$ si $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = 3-x$ si $x>1$;
   (c) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$;
   (d) $f(x) = \frac{x+1}{x} \sin \frac{x}{x+1}$ si $x \neq 0$ et $x \neq -1$, $f(0) = 0$ et $f(-1) = 0$.
2. On considère les fonctions suivantes, qui ne sont pas définies au point a. Peut-on les prolonger par continuité en a ?

(a) $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$, $a = 9$;

(b) $f(x) = \frac{x^2-x}{\sqrt{x^2}}$, $a = 0$.

3. Montrez que le polynôme $P(x) = x^3 - x - 1$ possède une racine sur l'intervalle $[0, 2]$.
4. Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrez qu'il existe un $c \in [0,1]$ tel que $c = f(c)$.
5. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrez que le graphe de f possède un point à une distance minimale de l'origine et un point à une distance maximale.
6. (Septembre 2003) La fonction $f\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{|x|^{\frac{3}{2}}}{\sin x} \text{ si } x \neq 0, \quad f(0) = 0$$
est-elle bornée ? Justifiez votre réponse.
7. (Janvier 2004) Soit a un nombre réel non nul. Posons
$$f(x) = \begin{cases} \frac{(ax)^3 - x^2 + 1}{x^2 - x + 1} & \text{si } x < 1, \\ x + 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$
   (a) Donnez, si elle existe, l'asymptote au graphe de f en $-\infty$.

   (b) Pour quelles valeurs de a, la fonction f est-elle continue ?
8. (Septembre 2004) Trouver les nombres réels a tels que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 0, \\ a^2 + \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x > 0, \end{cases}$$
soit continue.
9. (Septembre 2005)

   (a) Définissez le concept de limite $L \in \mathbb{R}$ d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ si x tend vers $+\infty$.

   (b) Soit $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que la limite $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Montrez que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

   (c) Dans les hypothèses de la partie (b), montrez que si $f(0) < 0$ et $L > 0$, il existe un point c tel que $f(c) = 0$.

Séance 5 : Chapitre 4 - Dérivées

Exercices à préparer avant la séance : 3.

1. Trouvez la pente de la tangente au graphe de $f(x) = x^2 + x$ en $x = 1$. Trouvez l'équation de cette tangente.

2. Trouvez a, b et c tels que le graphe de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ passe par le point (1,2) et est tangent à la droite d'équation $y = x$ à l'origine.
3. On considère la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$. Montrez que, quel que soit $h \neq 0$, la tangente à cette parabole au point d'abscisse x_0 est parallèle à la sécante construite sur les points d'abscisse $x_0 + h$ et $x_0 - h$.
4. (a) Vérifiez que la fonction f définie par

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

est dérivable en 0.

(b) Vérifiez que la fonction g définie par

$$g(x) = x \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 0$$

est continue mais non dérivable en 0.

5. (Janvier 2005) On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = -x^3 \text{ si } x \leq 0 \text{ et } f(x) = a\sqrt{x} \text{ si } x > 0$$

et la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = -e^x$.
Pour quelles valeurs du paramètre réel a la fonction f est-elle

- injective ?
- surjective ?
- dérivable ?

Mêmes questions pour la fonction composée $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

6. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

(a) Montrez que $f(0) = 0$;

(b) Montrez que f est dérivable en 0 et calculez $f'(0)$.

Séance 6 : Chapitre 4 - Dérivées, théorèmes fondamentaux

Exercices à préparer avant la séance : 1 et 3.

1. Calculez la dérivée des fonctions suivantes :

(a) $3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} - (16x^2)^{\frac{1}{4}}$;

(b) $(3x^{-2} + 5x^4)^{-1} + (2x + 1) \cdot (x^3 + 2)$;

(c) $\cos(\sin x) + \cos^2(x^3)$;

(d) $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} + \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$;

(e) $\frac{1}{\ln x} + x^x$;

(f) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$;

(g) $e^{x^2} + (e^x)^2$.

2. Sachant que les fonctions f suivantes admettent une fonction réciproque, calculez la dérivée $\frac{d}{dy} f^{-1}(y)$ au point y indiqué :

   (a) $f(x) = 2x^4 - 4$, $x < 0$, $y = -2$;

   (b) $f(x) = x^3 + 4x$, $x \geq 0$, $y = 0$;

   (c) $f(x) = \frac{x+2}{x^2}$, $x > 0$, $y = 3$.

3. Donnez l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction f au point x_0 considéré :

   (a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

   (b) $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$.

4. Appliquez le théorème des accroissements finis pour montrer que

$$\arcsin x - \arcsin y \geq x - y \quad \text{si} \quad x \geq y\,.$$

5. (Janvier 2004) Dites si l'énoncé suivant est vrai ou faux. S'il est vrai interprétez-le sur un dessin. S'il est faux, donnez-en un contre-exemple.
   Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$. *Alors il existe* $c \in\,]a,b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

6. (Septembre 2004) Le théorème de Rolle s'applique-t-il à la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x-3|$ sur l'intervalle $[0,6]$? Justifiez votre réponse.

7. (Janvier 2005) Considérons une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en tout point. Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ la condition suivante soit vérifiée

$$f(x+t) = f(x) + f(t)\,.$$

   (a) Montrez que $f(0) = 0$;

   (b) Montrez que $f'(x)$ est constante ;

   (c) En utilisant un théorème vu au cours, déduisez-en que le graphe de f est une droite.

8. (Juin 2005) Soit $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0) = g(0)$ et $f(1) = g(1)$. En vous basant sur un théorème du cours, montrez qu'il existe $c \in\,]0,1[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.

9. Montrez que, pour $x > 0$ et $n > 1$, les graphes des fonctions $f(x) = 2 + \ln x$ et $g(x) = x^n$ ont au plus deux points d'intersection.

Séance 7 : Chapitre 5 - Applications des dérivées I

Exercices à préparer avant la séance : 1.

1. Recherchez les extrema des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = x^2$ pour $x \in [-2, 2]$;
   (b) $f(x) = x^3$ pour $x \in]-1, 3[$;
   (c) $f(x) = |\sin x|$ pour $x \in \mathbb{R}$;
   (d) $f(x) = |x^2 - 2|$ pour $x \in \mathbb{R}$;
   (e) $f(x) = e^{-x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Parmi tous les rectangles de périmètre donné P, déterminez celui d'aire maximale.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrez que les droites passant par l'origine et par les points du graphe de f maximisant ou minimisant la distance à l'origine sont perpendiculaires aux tangentes au graphe en ces points.
4. Quel est le rectangle de surface maximale inscrit dans un demi-cercle de rayon r si la base du rectangle repose sur le diamètre ?
5. Étudiez les fonctions suivantes (domaine, zéros, extrema, variation, asymptotes) et esquissez leur graphe :
   (a) $f(x) = \frac{x^2}{x^3+4}$;
   (b) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3-1}$;
   (c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;
   (d) $f(x) = x^4 e^{-2x}$;
   (e) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
6. (Septembre 2003) Trouvez les dimensions du rectangle d'aire maximale inscrit dans un triangle équilatéral de côté de longueur 1, si la base du rectangle repose sur la base du triangle.
7. (Janvier 2004) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Montrez que la fonction f est croissante si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

Séance 8 : Chapitre 5 - Applications des dérivées II

Exercices à préparer avant la séance : 2.

1. Calculez les limites suivantes (si vous utilisez le théorème de l'Hospital, vérifiez-en d'abord les hypothèses).

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{1-\cos x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \cdot \ln(x-1)$.

2. Déterminez le polynôme de Taylor d'ordre 2 de la fonction $f(x) = e^{(x^2)}$ centré au point $a = 0$.
3. Donnez une majoration de l'erreur commise en utilisant la linéarisation de $f(x) = \cos x + 2 \sin x$ en $\frac{\pi}{4}$ pour approximer $f(\frac{\pi}{4} + 10^{-1})$.
4. Trouvez une borne sur l'erreur commise en utilisant $1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour approximer $f(x) = e^x$ lorsque $|x| \leq 10^{-1}$.
5. Calculez $\ln(0,99)$ à 10^{-5} près en utilisant un développement de Taylor convenable.
6. (Janvier 2000) Le théorème de l'Hospital s'applique-t-il au calcul des limites suivantes ? Justifiez et calculez ces limites si elles existent.

   (a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x+\sin^2 x}$.

7. (Janvier 2000) On considère la fonction $f(x) = 2\cos x$.

   (a) Calculez le polynôme de Taylor $T^{(3)}_{f,\frac{\pi}{6}}(x)$ d'ordre 3 autour de $\frac{\pi}{6}$ de la fonction $f(x)$;

   (b) En utilisant la formule du reste, donnez une majoration de $|R(\frac{\pi}{7})| = |f(\frac{\pi}{7}) - T^{(3)}_{f,\frac{\pi}{6}}(\frac{\pi}{7})|$.

8. (Juin 2001) Soit la fonction définie par

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & (1-x)\ln|1-x| & \text{si } x \neq 1, \\ & = & 0 & \text{si } x = 1. \end{array}$$

   (a) Cette fonction est-elle continue au point $x = 1$?

   (b) Cette fonction est-elle dérivable au point $x = 1$?

9. (Septembre 2003) Le théorème de l'Hospital s'applique-t-il au calcul de la limite suivante ? Justifiez votre réponse.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

10. (Septembre 2005) On considère la fonction $f(x) = e^{2x}$. Majorez l'erreur commise en remplaçant la fonction f par son polynôme de Taylor d'ordre n centré en 0 sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Séance 9 : Chapitres 6 et 7 - Primitives et intégrales I

Exercices à préparer avant la séance : 2.

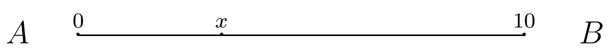
1. Soit $f\colon\ ]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \frac{1}{t}$.
   (a) Pourquoi f est-elle primitivable sur son domaine ?
   (b) Parmi toutes les primitives de f, montrez qu'il en existe une qui s'annule en 1. Montrez qu'elle est unique.
   (c) Soit F l'unique primitive de f qui s'annule en 1. Montrez que pour tout a, $x \in]0,+\infty[$, on a : $F(ax) = F(a) + F(x)$.
2. Utilisez la méthode de primitivation par parties pour primitiver les fonctions suivantes :
   (a) $\ln x$;
   (b) $\frac{x}{e^x}$;
   (c) $\operatorname{arctg} x$;
   (d) $x^2 \ln x$;
   (e) $e^x \sin x$;
   (f) $x \sin x$.
3. Utilisez la méthode de primitivation par substitution ou par changement de variables pour primitiver les fonctions suivantes :
   (a) $\operatorname{tg}^2 x$;
   (b) xe^{x^2} ;
   (c) $\frac{1}{1+e^x}$;
   (d) $\frac{1}{x \ln^2 x}$;
   (e) $\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}$.
4. Soit $f(x) = \frac{x^4+x+1}{x(x-1)(x+1)}$.
   (a) Déterminez $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = (\alpha x + \beta) + \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.
   (b) En utilisant le point (a), déterminez les primitives de f.
5. (Juin 2005) Calculez toutes les primitives de $\frac{x}{\sqrt{2+3x^2}}$.
6. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire.
   (a) Soit F une primitive de f et posons $G(x) = F(-x)$. Montrez que G est une primitive de f et déduisez-en que $F = G$.
   (b) Que peut-on dire des affirmations suivantes ?
      (i) Toute primitive d'une fonction impaire est une fonction paire.
      (ii) Toute primitive d'une fonction paire est une fonction impaire.

7. (Juin 2001) Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f.
Sachant que la fonction $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, définie par $G(x) = \int_a^x f$, est une primitive de f, montrez que $F(b) - F(a) = \int_a^b f$.
8. (Janvier 2005) Soit $f\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g\colon [a,b] \to [c,d]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $F(x) = \int_0^x f(u)\,du$. Démontrez que $F(g(x))$ est une primitive de $f(g(x)) \cdot g'(x)$ et que
$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du\,.$$
9. (Septembre 2005) Calculez l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^3}{x+3}\,dx$.

Séance 10 : Chapitres 6 et 7 - Primitives et intégrales II

Exercices à préparer avant la séance : 1 et 6.

1. Calculez les intégrales suivantes :
(a) $\int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$, (b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx$, (c) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$, (d) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$.
2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x) = 0 \text{ si } x < -1\,,\quad f(x) = 3x+4 \text{ si } -1 \le x \le 1\,,\quad f(x) = -x+1 \text{ si } x > 1\,.$$
   (a) Déterminez les intervalles de $\mathbb{R}$ où cette fonction est intégrable ;
   (b) Déterminez la fonction définie par $F(t) = \int_1^t f(x)\,dx$.
3. Déterminez le domaine de définition et la dérivée des fonctions suivantes :
(a) $f(t) = \int_0^{2t+1} 2u^2\,du$, (b) $f(t) = \int_0^{t^2+1} \sin u\,du$, (c) $f(t) = \int_{\cos t}^{\sin t} \operatorname{tg} u\,du$,
(d) $f(t) = \int_{t-1}^{t^2+1} \frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\,du$, (e) $f(t) = \int_{-t^2}^{t^2} (u^3 - u)\,du$.
4. Calculez l'aire de la surface finie délimitée par les courbes $y = x^3+1$ et $y = 2x^2+x-1$.
5. (Janvier 2000) Prouvez l'inégalité suivante : $\int_0^2 \cos^2(\frac{\pi}{4} \cdot \cos x)\,dx \ge 1$.
6. (Janvier 2003) Calculez les intégrales suivantes :
(a) $\int_0^1 xe^x\,dx$, (b) $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$, (c) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$.
7. (Janvier 2004) On considère une barre métallique de section négligeable, de densité constante δ et de longueur égale à 10 mètres.



La température initiale de la barre est, en chaque point x, de 30°C : $T_i(x) = 30$. On fait chauffer l'extrémité A de la barre jusqu'à la température de 60°C. Quand la température de l'extrémité A arrive à 60°C, la température en chaque point x dépend

de la distance entre le point et l'extrémité chauffée, et décroît de façon linéaire selon la fonction $T_f(x) = 60 - x$. Déterminez la quantité de chaleur Q fournie à la barre métallique pendant la phase de réchauffement. Justifiez votre réponse.
Rappel : la quantité de chaleur nécessaire pour faire passer un corps de masse m de la température initiale T_i à le température finale T_f est $Q = m \cdot c \cdot (T_f - T_i)$, où c est une constante positive, dite chaleur spécifique du corps.
Remarque : la section étant négligeable, la densité est une densité de longueur et la masse est donnée par le produit de la densité par la longueur.

8. (Septembre 2004) Soit
$$g(t) = \int_{t^2}^{t^2+1} e^{x^2}\, dx\,.$$
Déterminez la fonction dérivée $g'(t)$.
Suggestion : surtout, n'essayez pas de calculer une primitive de e^{x^2} !
9. (Janvier 2005) Soit la fonction $f(x) = \cos(\pi x)\,\mathrm{tg}(\sin(\pi x))$. Calculez
$$f(1) \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(x)\, dx.$$
10. (Juin 2005) On considère la fonction
$$f(x) = \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2}.$$
   (a) Étudiez la fonction f : domaine de définition, limites, variation, asymptotes, symétries. Esquissez le graphe de f.
   (b) Esquissez le graphe de la fonction $g :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = \int_{\pi - x}^{\pi + x} f(t)\, dt\,.$$

Séance 11 : Chapitre 8 - Fonctions de deux variables réelles I

1. Déterminez le domaine de définition des fonctions suivantes et représentez-le graphiquement :
   (a) $f(x, y) = \sqrt{x + y}\,$;
   (b) $f(x, y) = \ln(x + 5y)\,$;
   (c) $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)\,$;
   (d) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}\,$;

(e) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$.

2. Tracez les courbes iso-X, iso-Y et les courbes de niveau pour les fonctions suivantes :
   (a) $f(x,y) = y - x^2$;
   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2$;
   (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;
   (d) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$.
3. Représentez le graphe des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :
   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$;
   (b) $f(x,y) = x^2 - y^2$;
   (c) $f(x,y) = |x| + |y|$.

   Représentez des lignes de niveau pour ces mêmes fonctions.
4. Calculez les limites suivantes si elles existent :
   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^3 + (y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}$;
   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y}$;
   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}$;
   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 - y^4) \sin \frac{1}{|x| + |y|}$.
5. Les fonctions suivantes sont-elles continues ?
   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x+y} & \text{si } x \neq -y \\ 1 & \text{si } x = -y \end{cases}$
   (b) $f(x,y) = \begin{cases} x|y| \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
6. Donnez si possible un prolongement continu pour les fonctions suivantes :
   (a) $f(x,y) = (x^2 - y^2) \sin \frac{1}{x-y}$;
   (b) $f(x,y) = \dfrac{7x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2}$.

Séance 12 : Chapitre 8 - Fonctions de deux variables réelles II

1. Calculez les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 pour les fonctions suivantes :
   (a) $f(x, y) = x^2 + 2x^2y + 3y^2$;
   (b) $f(x, y) = e^{-x} \ln y$;
   (c) $f(x, y) = x^y$.
2. On considère la fonction
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^3 - 3xy.$$
   (a) Tracez la courbe de niveau de valeur 0.
   (b) Calculez les dérivées partielles au point $(1, 1)$.
   (c) Représentez graphiquement les sections du graphe de f par les plans d'équations $x = 1$ et $y = 1$.
3. Vérifiez à l'aide de la définition de différentiabilité (c'est-à-dire en calculant la limite du quotient différentiel) si les fonctions suivantes sont différentiables au point donné. Si oui, donnez la différentielle ainsi que l'équation du plan tangent en ce point.
   (a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ au point $(0, 0)$;
   (b) $f(x, y) = \begin{cases} x^3|y| \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ au point $(0, 1)$;
   (c) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 3x^2y + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ au point $(0, 0)$.
4. Établissez la différentiabilité des fonctions suivantes au point $(2, 1)$ et donnez l'équation du plan tangent au graphe au point $(2, 1, f(2, 1))$.
   (a) $f(x, y) = x^2 - y^3$;
   (b) $f(x, y) = \sin x \cos y$;
   (c) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable au point $(1, 1)$. Sachant que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2.5, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 0.4 \quad \text{et que} \quad f(1, 1) = 1.8,$$
   estimez $f(1.1, 0.95)$.

6. On considère la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 3x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - y + 15\,.$$

   (a) Calculez le gradient de f au point $(1, 1)$.

   (b) Donnez l'équation de la courbe de niveau C passant par le point $(1, 1)$. Quelle est la nature de cette courbe ?

   (c) Donnez l'équation de la droite tangente C au point $(1, 1)$.

   (d) Dans quelle direction la fonction f diminue-t-elle le plus vite au voisinage du point $(1, 1)$?

7. On considère la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 + 3xy.$$

   Déterminez la direction de plus forte pente au point $(1, 2)$, ainsi que l'équation de la tangente à la courbe de niveau passant par le point $(1, 2)$.

8. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Dans la négative, donnez un contre-exemple.

   (a) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles au point (a, b) alors f est différentiable en ce point.

   (b) Si la fonction $x \mapsto f(x, b)$ est continue au point a et si $y \mapsto f(a, y)$ est continue au point b alors la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue au point (a, b).

   (c) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles au point (a, b) alors il y a un plan tangent au graphe de f au point $(a, b, f(a, b))$.

Séance 13 : Chapitre 9 - Intégrales doubles I

1. En utilisant le principe de Cavalieri, calculez les volumes suivants :

   (a) volume de la sphère de rayon r ;

   (b) volume du solide obtenu en faisant tourner la surface délimitée par $y = x$ et $y = x^2$ autour de l'axe OX ;

   (c) volume de la pyramide de hauteur h et dont la base est un rectangle de côtés b et $2b$.

2. Calculez les intégrales suivantes définies sur des rectangles :

   (a) $\displaystyle\int\!\!\int_R \sin^2 x \sin^2 y\, dx\, dy$ où $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$;

   (b) $\displaystyle\int\!\!\int_R (x \sin y - ye^x)\, dx\, dy$ où $R = [-1, 1] \times [0, \pi/2]$;

(c) $\iint_R (x+y^3)\,dx\,dy$, où $R=[0,1]\times[1,2]$;

(d) $\iint_R \frac{1}{(x+2y)^2}\,dx\,dy$, où $R=[3,4]\times[1,2]$;

(e) $\iint_R xy\sin(x^2y)\,dx\,dy$, où $R=[0,2]\times[0,1]$.

3. Définissez les bornes d'intégration pour l'intégrale $\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy$, où D est le domaine délimité par les courbes d'équation :
   (a) $x=0,\ y=0,\ x+y=a$;
   (b) $x^2+y^2=a^2$;
   (c) $y=\frac{2}{1+x^2},\ y=x^2$;
   (d) $xy=16,\ y=x,\ y=0,\ x=8$.
4. Calculez $\iint_D x\,dx\,dy$, où D est :
   (a) le triangle de sommets $(0,0),(0,1)$ et $(1,1)$;
   (b) le domaine délimité par les courbes d'équations $y=x$, $y=x\sqrt{3}$ et les verticales $x=1$ et $x=2$;
   (c) la région comprise entre les courbes $y=x^2/2$ et $y=x$;
   (d) le domaine délimité par les courbes $xy=1$, $y=\sqrt{x}$ et la droite $x=2$.

   Même question pour $\iint_D xy\,dx\,dy$.

Séance 14 : Chapitre 9 - Intégrales doubles II

1. Intervertissez l'ordre d'intégration dans les intégrales suivantes :
   (a) $\int_0^1\int_{x^2}^1 f(x,y)\,dy\,dx$;
   (b) $\int_0^a\int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{y+a} f(x,y)\,dx\,dy$;
   (c) $\int_0^1\int_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy$.
2. Calculez à l'aide d'intégrales doubles l'aire des figures délimitées par les courbes d'équations :
   (a) $y^2=4x,\ y=2x-4$;
   (b) $y=6x-x^2,\ y=x^2-2x$;

(c) $y = x^2 - 4$, $y = 8 - 2x^2$;

(d) $3y^2 = 25x$, $5x^2 = 9y$;

(e) $xy = 12$, $x + y = 8$.

3. Calculez le volume des figures délimitées par les surfaces d'équations :

   (a) $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

   (b) $2x + y + 2z = 16$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 3$;

   (c) $x + y + z = 6$, intérieur à $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4. Trouvez les coordonnées du centre de masse du quart de disque
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}\,.$$

5. Trouvez les coordonnées du centre de masse de la surface
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, \pi],\ 0 \leq y \leq \sin x\}\,.$$

6. Trouvez la masse totale d'une plaque située dans le quadrant $x \geq 0$, $y \geq 0$, et délimitée par l'ellipse d'équation $x^2 + 4y^2 = 12$, sachant que la densité de la plaque au point (x, y) est donnée par $\rho(x, y) = 3x$.

7. Trouvez la masse totale et les coordonnées du centre de masse d'une plaque triangulaire de sommets $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$, sachant que la densité de la plaque au point (x, y) est donnée par $\rho(x, y) = 2x + y + 2$.

Séance 15 : Chapitre 10 - Géométrie : vecteurs et changement de repère

1. On considère un triangle de sommets A, B, C ; soit α l'angle en A. Montrez que
$$\| \overrightarrow{BC} \|^2 = \| \overrightarrow{BA} \|^2 + \| \overrightarrow{AC} \|^2 - 2 \| \overrightarrow{BA} \| \, \| \overrightarrow{AC} \| \cos\alpha\,.$$

2. Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs donnés, tels que $\vec{b}$ n'est pas multiple de $\vec{a}$ et $\vec{a}$ n'est pas nul, trouvez la valeur de α pour laquelle $\|\vec{a} - \alpha\vec{b}\|$ est minimum. Vérifiez que pour cette valeur de α, les vecteurs $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux.

3. Vérifiez que pour tout vecteur $\vec{a}$ et $\vec{b}$ on a
$$\| \vec{a} \times \vec{b} \|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b}\,)^2 = \| \vec{a} \|^2 \, \| \vec{b} \|^2 \ .$$

4. Déterminez α, β et γ pour que les vecteurs $\vec{a} = (1, 2, 3)$ et $\vec{b} = (\alpha, \beta, \gamma)$ vérifient les relations $\vec{a} \times \vec{b} = (1, 1, -1)$ et $\vec{a} \cdot \vec{b} = 9$. Le problème est-il possible si on impose plutôt $\vec{a} \times \vec{b} = (1, 2, -2)$ par exemple ? Pourquoi ?

5. Un parallélipipède a comme arêtes concourantes les vecteurs $\vec{a} = (1, 3, 1)$, $\vec{b} = (2, 0, -1)$ et $\vec{c} = (-2, 2, -1)$. Déterminez son volume, l'aire de la base déterminée par $\vec{b}$ et $\vec{c}$, et sa hauteur.
6. Soit $P_1 = (-1, 2, 3)$ et $P_2 = (2, -2, 8)$.
   (a) Donnez les coordonnée du vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ et sa longueur.
   (b) Donnez les coordonnée du point M, milieu de $\overrightarrow{P_1P_2}$.
   (c) Donnez l'équation de la sphère de centre M passant par P_1 et P_2.
   (d) Donnez les coordonnées de P_3 tel que $\overrightarrow{P_1P_3} = 3\overrightarrow{P_1P_2}$.
7. (a) Trouvez le centre et le rayon de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 14y - 8z + 1 = 0$. Trouvez aussi le centre et le rayon du cercle qui est l'intersection entre cette sphère et le plan $x = 0$.
   (b) Trouvez le centre et le rayon de la sphère passant par $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 5, 0)$ et $(0, 9, 4)$.
8. Déterminez m en sachant que le point $P = (2, 1, 5)$ est à une distance 7 du milieu du segment joignant $A = (1, 2, 3)$ à $B = (-1, 6, m)$.
9. Que deviennent les coordonnées de $P = (6, -1, 2)$ quand on fait une translation de l'origine du repère vers le point $(-3, -5, 7)$?
10. (a) Que devient l'équation $x^2 + z^2 = 1$ quand on fait une translation de l'origine du repère vers le point $(0, -5, -1)$?
    (b) Que devient l'équation $xy = 4$ quand on fait une rotation de $\frac{\pi}{4}$ autour de Oz dans le sens antihorlogique ?
11. Une surface admet l'équation $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 - 18x - 16y - 216z + 313 = 0$. Vers quel point doit-on translater l'origine pour que la nouvelle équation ne comporte plus de termes du premier degré ?
12. (Juin 2003) On considère trois points P, Q et R de coordonnées $P = (-1, 3, -5)$, $Q = (2, k, -1)$ et $R = (m, 0, -8)$, avec $k, m \in \mathbb{R}$. Déterminez les valeurs des paramètres k et m telles que le triangle de sommets P, Q et R soit rectangle en P, et les côtés PQ et PR soient de même longueur.

Séance 16 : Chapitre 10 - Géométrie : plans et droites

1. Donnez une équation cartésienne du plan Π lorsque :
   (a) Π est parallèle au plan d'équation $x - 3y + 5z = 1$ et passe par le point $(2, 3, -1)$.
   (b) Π est perpendiculaire au vecteur $(1, 3, 4)$ et passe par le point $(1, 0, 2)$.
   (c) Π est parallèle aux vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 1)$ et passe par le point $(2, 0, 0)$.
   (d) Π contient les points $A = (1, 2, 1)$ et $B = (1, 0, 1)$ et est parallèle au vecteur $\overrightarrow{CD}$, avec $C = (0, 2, 0)$ et $D = (1, 3, -1)$.

   (e) Π contient les points $A = (1,2,1), B = (1,0,1)$ et $P = (3,4,5)$.
   (f) La perpendiculaire à Π passant par $Q = (3,4,5)$ rencontre Π au point $R = (2,1,0)$.
2. Donnez l'équation de la sphère centrée au point $P = (1, \sqrt{2}, 3)$ et tangente au plan d'équation $\Pi\colon 5x + 2\sqrt{2}y - 4z = 0$.
3. Donnez des équations (cartésiennes ou paramétriques) de la droite Δ lorsque :
   (a) Δ est parallèle au vecteur $(2,-1,3)$ et passe par le point $(5,7,2)$.
   (b) Δ passe par $(0,1,4)$ et est perpendiculaire au plan d'équation $3x - y + 4z = 12$.
   (c) Δ passe par $P = (1,2,-4)$ et est parallèle aux plans $\Pi_1\colon y - 3x = 5$ et $\Pi_2\colon z - 2x = 12$.
   (d) Δ est perpendiculaire aux vecteurs $(1,1,0)$ et $(-1,4,0)$ et passe par le point $(2,1,7)$.
   (e) Δ passe par les points $(2,1,5)$ et $(-1,4,0)$.
   (f) Δ est l'intersection des plans $\Pi_1\colon 3x + y = 2$ et $\Pi_2\colon x + y + z = 5$.
4. (a) Donnez un point et un vecteur directeur pour la droite $\Delta\colon 8x-4 = 6-2y = z-3$.
   (b) En utilisant des équations paramétriques, vérifiez si le point $P = (3,-1,-1)$ appartient à la droite joignant les points $A = (2,1,1)$ et $B = (4,1,-1)$.
5. (a) Trouvez la distance de l'origine à la droite Δ qui passe par $P = (2,0,1)$ et $Q = (5,-3,1)$.
   (b) Trouvez la distance entre la droite Δ_1, qui passe par les points $A = (1,2,3)$ et $B = (-1,0,2)$, et la droite Δ_2, qui passe par les points $C = (0,1,7)$ et $D = (2,0,5)$.
6. Trouvez l'équation du plan Π sachant que la perpendiculaire à Π passant par $(3,4,5)$ rencontre Π en $(2,1,0)$.
7. (Septembre 2002)
   (a) Calculez les coordonnées du centre et le rayon de la sphère S passant par les points $O = (0,0,0), X = (1,0,0), Y = (0,1,0), Z = (0,0,1)$.
   (b) Donnez l'équation du cercle sur cette sphère passant par les points X, Y et Z. Donnez les coordonnées du centre du cercle ainsi que son rayon.
   (c) Calculez la distance entre le centre de la sphère et le centre du cercle.
8. (Septembre 2002)
   (a) Soit la droite Δ d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 4 \end{cases}$$

      (i) Déterminez le point de percée de Δ dans le plan $x + y + z = 4$.

(ii) Déterminez les points de Δ à une distance $\sqrt{65}$ de l'axe Ox.

(iii) Calculez la distance entre l'origine et la droite Δ.

(b) Déterminez les réels a et b tels que le plan $\Pi\colon x+ay+bz=2$ soit perpendiculaire au plan $\Sigma\colon x+y+z=4$ et parallèle à l'axe Oy.

9. (Juin 2003)
   (a) Définissez la "projection orthogonale" d'un point P de $\mathbb{R}^3$ sur un plan Π de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculez-la pour $P=(1,-1,2)$ et $\Pi : x+2y+3z=-9$.
10. (Juin 2004)
   (a) Calculez la distance entre le plan d'équation $\Pi\colon 3x+y+2=0$ et le point $Q=(2,2,2)$.
   (b) Considérons la sphère $\mathcal{S}$ centrée à l'origine et de rayon 1 et le point $V=(0,0,\sqrt{2})$. Soit Δ la droite par V et par P, où P est un point de S. Déterminez l'ensemble des points qui sont intersection entre la droite Δ et le plan $z=0$, quand P varie sur $\mathcal{S}$.

Séance 17 : Chapitre 10 - Géométrie : coniques

1. Pour l'ellipse d'équation $9x^2+36y^2=121$, trouvez les demi-axes, les foyers, l'excentricité et faites une esquisse.
2. Une ellipse a ses foyers en $(1,0)$ et $(-1,0)$. Son excentricité vaut $\frac{1}{2}$. Trouvez la longueur des axes et donnez l'équation cartésienne par rapport au repère canonique.
3. Pour l'hyperbole d'équation $4x^2-9y^2=36$, trouvez les asymptotes, les foyers, l'excentricité et faites une esquisse.
4. Une hyperbole a un de ses foyers en $(\sqrt{2},0)$ et admet les bissectrices des axes de coordonnées comme asymptotes. Quelle est son équation ?
5. Une hyperbole admet l'équation
$$1+\frac{x^2}{16}=\frac{y^2}{4}.$$
   Indiquez ses sommets, ses asymptotes et ses foyers.
   Que devient son équation si on déplace l'origine vers $(1,2)$?
   Que devient-elle si on fait ensuite une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens antihorlogique ?
6. Une parabole admet le point $(2,0)$ comme foyer et la droite $x=-2$ comme directrice. Etablissez son équation cartésienne.
7. On considère la parabole d'équation $y=x^2-4x+7$. Donnez les coordonnées du sommet, celles du foyer et l'équation de la directrice.

8. On considère la conique d'équation $2x^2 + y^2 + 4x + 7y - 1 = 0$. A l'aide d'une translation, transformez cette équation en équation canonique. Quel est le centre de cette conique ? Quelle est sa nature ?

9. Dans le plan, établissez l'équation du lieu des points dont la distance à l'axe Oy vaut deux fois la distance au point $(3, 0)$. De quelle courbe s'agit-il ? Donnez son centre et son excentricité.

10. Quelles sont les coniques représentées par les équations suivantes ?

    (a) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 109 = 0$;

    (b) $x^2 + y^2 - 3x - 4y + 4 = 0$;

    (c) $5x^2 + 4x - 3y + 6 = 0$;

    (d) $2x^2 - 4y^2 - 7x + 6y - 5 = 0$;

    (e) $3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7y - 6x - 8 = 0$;

    (f) $y = \frac{1}{x-3} + 8$.

11. (Septembre 2000) Soient $P_1 = (2, 5, 2)$, $P_2 = (2, 7, 0)$ et $P_3 = (0, 7, 0)$.

    (a) Calculez le produit vectoriel $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$;

    (b) Déduisez-en l'équation cartésienne du plan contenant P_1, P_2 et P_3.

    On donne également l'ellipse (contenue dans le plan Oxy) d'équation :

$$E \equiv \begin{cases} 2\,x^2 - 8\,x + y^2 - 6\,y + 15 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

    (c) Donnez-en le centre ainsi que les longueurs de ses demi-axes ;

    (d) Montrez que la droite (notée N) perpendiculaire au plan $P_1\,P_2\,P_3$ et passant par P_1 contient le centre de l'ellipse.

    (e) L'ellipse E peut être considérée comme la section d'un cylindre circulaire d'axe N (la normale calculée précédemment) par le plan $z = 0$. Quel serait le diamètre d'un tel cylindre ?

12. (Juin 2001) Dans le repère orthonormé Oxy, on considère l'hyperbole H dont l'un des foyers est $(4, 0)$, l'un des sommets est $(4, 8)$ et l'autre sommet est à distance $\sqrt{20}$ de l'origine.

    (a) Représentez graphiquement cette hyperbole en indiquant les coordonnées du centre, des foyers et des sommets.

    (b) Donnez l'équation de cette hyperbole dans le repère Oxy.

    (c) Donnez l'équation des asymptotes dans le repère Oxy.

2 Eléments de Solution

La réponse à certains exercices est entièrement développée. Pour d'autres, nous ne présentons que des éléments de réponse ou simplement le résultat sans justificatifs. Il ne faut donc pas considérer ces *éléments de solution* comme des réponses modèles mais comme une information qui permet de vérifier l'exactitude du résultat obtenu.

Séance 1 : Chapitre 1 - Les fonctions

1. (a) L'ensemble des majorants est $[\frac{3}{2}, +\infty[$, le supremum est $\frac{3}{2}$ et il appartient à l'ensemble de départ. L'ensemble des minorants est $]-\infty, -1]$, l'infimum est -1 et il n'appartient pas à l'ensemble de départ.
   (b) L'ensemble des majorants est $[\sqrt{2}, +\infty[$, le supremum est $\sqrt{2}$ et il appartient à l'ensemble de départ. L'ensemble des minorants est $]-\infty, 0]$, l'infimum est 0 et il n'appartient pas à l'ensemble de départ.
   (c) L'ensemble des majorants est $[1, +\infty[$, le supremum est 1 et il n'appartient pas à l'ensemble de départ. L'ensemble des minorants est $]-\infty, 0]$, l'infimum est 0 et il appartient à l'ensemble de départ.
2. (a) dom $f = \mathbb{R}$;
   (b) dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$;
   (c) dom $f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$;
   (d) dom $f = [-1, 1]$;
   (e) dom $f =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$.
3. (a) Si f et g sont paires, alors $f + g$ et $f \cdot g$ sont paires. Si f et g sont impaires, alors $f + g$ est impaire et $f \cdot g$ est paire.
   (b) Si f est paire et g est impaire, alors $f \cdot g$ est impaire. Par contre, on ne peut rien dire de $f + g$. Par exemple, si on pose $f(x) = 1$ et $g(x) = x$, la fonction $(f + g)(x) = x + 1$ n'est ni paire ni impaire.
4. (a) Si $y = \frac{7x}{2x+3}$, pour trouver la fonction réciproque il faut déterminer la variable x en fonction de y. On a $x = \frac{3y}{7-2y}$ c'est-à-dire $f^{-1}(x) = \frac{3x}{7-2x}$.
   (b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3(x - 7) = 3x - 21$; $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3x - 7$.
   (c) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x + 2)^{\frac{1}{2}}$; $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x^{\frac{1}{2}} + 2$.
   (d) Si on pose $h(x) = (f \circ g)(x) = (x^2 - 5)^{\frac{1}{2}}$, on a $f \circ g = h$. Par conséquent, $g = f^{-1} \circ h$. Or, $f^{-1}(x) = x^2 + 5$, et donc $g(x) = f^{-1}(h(x)) = f^{-1}((x^2 - 5)^{\frac{1}{2}}) = x^2$.
5. (a) Si f et g sont injectives et si $f(g(x)) = f(g(y))$, on a $g(x) = g(y)$ (car f est injective) et donc $x = y$ (car g est injective). Cela montre que $f \circ g$ est injective. Supposons maintenant que f et g sont surjectives. Si $c \in C$, on peut trouver un b dans B tel que $f(b) = c$ (car f est surjective). Mais g est surjective, et donc

il existe $a \in A$ tel que $g(a) = b$. Par conséquent, $f(g(a)) = f(b) = c$, ce qui montre que $f \circ g$ est surjective.

(b) Si $g(x) = g(y)$, alors $f(g(x)) = f(g(y))$. Si $f \circ g$ est injective, cela implique que $x = y$, et donc g est injective. Soit maintenant $c \in C$. Si $f \circ g$ est surjective, il existe $a \in A$ tel que $f(g(a)) = c$. Si on pose $b = g(a)$, on a $f(b) = f(g(a)) = c$, ce qui montre que f est surjective.

(c) On peut considérer les fonctions

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\ ,\ g(x) = (x, 0)\ \ ;\ \ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ,\ f(x, y) = x\,.$$

La composée est la fonction identité

$$f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ f(g(x)) = x$$

qui est injective et surjective. Néanmoins, g n'est pas surjective (par exemple, $\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) \neq (0, 1)$) et f n'est pas injective (par exemple, $f(0, 0) = f(0, 1)$).

6. (a) Les droites par (7,2) ont une équation du type $y - 2 = a(x - 7)$, pour $a \in \mathbb{R}$ arbitraire, ou bien $x - 7 = 0$ (qui est la droite verticale par (7,2)).

(b) Les droites perpendiculaires à la droite d'équation $y + 2x = 3$ ont une équation du type $y - \frac{1}{2}x = a$, pour $a \in \mathbb{R}$ arbitraire.

(c) La droite β a comme équation $\frac{x-3}{7-3} = \frac{y+2}{9+2}$. Sa pente est donc $\frac{11}{4}$. La droite α a même pente et passe par (2,3). Son équation est donc $y - 3 = \frac{11}{4}(x - 2)$. Les intersections avec les axes sont $(\frac{10}{11}, 0)$ et $(0, -\frac{5}{2})$.

7. (a) La fonction $\sin x$ est impaire : $\sin(-x) = -\sin x$. La fonction $f(x)$ est donc paire. En effet : $f(-x) = \frac{\sin(\sin(-x))}{\sin(-x)} = \frac{\sin(-\sin x)}{-\sin x} = \frac{-\sin(\sin x)}{-\sin x} = \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} = f(x)$.

(b) Il suffit de choisir $x = 1 = n$. La formule nous donne $e = e^2$, qui est évidemment faux.

(c) La fonction log est définie si son argument est strictement positif. Il faut donc que la condition $\sqrt[3]{1 - x^2} > 0$ soit remplie. Pour cela, il faut que $1 - x^2 > 0$ (car la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ est monotone croissante), c'est-à-dire $-1 < x < 1$.

Séance 2 : Chapitre 2 - Limite de fonctions

1. (a) Le point 2 est adhérent au domaine de f, qui est $\mathbb{R}$. Il faut montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, si $|x-2| \ \leq \delta$, alors $|5x-10| \ \leq \epsilon$. Pour cela, on peut choisir $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ car, si $|x - 2| \leq \delta = \frac{\epsilon}{5}$, alors $|5x - 10| = 5|x - 2| \leq 5\delta = \epsilon$.

(b) Il faut montrer que, pour tout $M > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, si $x \geq \delta$, alors $f(x) \geq M$. Il suffit de choisir $\delta = \sqrt{\frac{M+3}{5}}$. Pour un tel δ, on a que si $x \geq \delta$ alors $f(x) = 5x^2 - 3 \geq 5(\sqrt{\frac{M+3}{5}})^2 - 3 = M$.

2. On peut choisir $\delta = 1$ si $\epsilon = 1$, et $\delta = \frac{1}{\epsilon}$ pour $\epsilon > 0$ arbitraire.
3. $\lim_{x\to 1}(x^2+1) = 2$ et on peut choisir $\delta = \sqrt{1+\epsilon} - 1$ dans la définition de limite.
4. Il faut montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, si $|x-a| \leq \delta$, alors $|f(x)g(x)| \leq \epsilon$. La fonction g étant bornée, il existe un $M > 0$ tel que, pour tout x, $|g(x)| < M$. Puisque $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, il existe un $\delta_1 > 0$ tel que si $|x-a| \leq \delta_1$, alors $|f(x)| \leq \frac{\epsilon}{M}$. On peut alors choisir $\delta = \delta_1$, car maintenant si $|x-a| \leq \delta$, alors $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon$.
5. (a) Il suffit de mettre x^m en évidence au numérateur et au dénominateur et de simplifier la fraction. Le numérateur tend alors vers 0.
   (b) Il suffit de mettre x^m en évidence au numérateur et au dénominateur et de simplifier.
   (c) Il suffit de mettre x^n en évidence au numérateur et au dénominateur et de simplifier. Le dénominateur tend alors vers 0.
6. On peut remarquer que
$$f(x) = \frac{ax^2+4x+b}{x^2+x-2} = \frac{ax^2+4x+b}{(x-1)(x+2)}\,.$$
Pour que la limite de f en 1 et en -2 soit finie, il faut que 1 et -2 soient racines du numérateur. Si on pose $g(x) = ax^2+4x+b$, on a le système suivant :
$$g(1) = a+4+b = 0 \ \ , \ \ g(-2) = 4a-8+b = 0\,.$$
Ce système admet $(a = 4,\ b = -8)$ comme unique solution.
7. Soit $g(x) = f(x) - \sin x$. Par le théorème du sandwich, la limite de $|g(x)|$ en 0 existe et vaut 0. Par conséquent, la limite en 0 de $g(x)$ existe et vaut 0. Or, $f(x) = g(x) + \sin x$, donc la limite de $f(x)$ en 0 existe et on a
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(g(x)+\sin x) = \lim_{x\to 0} g(x) + \lim_{x\to 0}\sin x = 0\,.$$
8. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que, si $|x-a| \leq \delta$, alors $|f(x)-L| \leq \epsilon$. Par conséquent, $\big|\,|f(x)| - |L|\,\big| \leq |f(x)-L| \leq \epsilon$, ce qui montre que la limite en a de $|f(x)|$ est bien $|L|$.
Pour montrer que la proposition réciproque est fausse, on peut considérer la fonction
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ \ f(x) = -1 \ \text{ si } \ x < 0\ ,\ f(x) = 1 \ \text{ si } x \geq 0\,.$$
La limite de la fonction $|f(x)|$ en 0 est 1, mais la limite de la fonction $f(x)$ en 0 n'existe pas (car la limite à gauche vaut -1 et la limite à droite vaut 1).
9. La limite est 1 car la limite à gauche et la limite à droite sont égales à 1.

Séance 3 : Chapitre 3 - Limite de fonctions, calcul des limites

1. (a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\sin\frac{1}{x}$ est une fonction bornée (voir séance 2, exercice 4).

   (b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\sin x$ est une fonction bornée.

   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x\cos x}{x} = 0$. En effet : $-1 \leq \sin x\cos x \leq 1$, et donc $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$, le théorème de l'étau implique la thèse. Il faut utiliser ici une version du théorème de l'étau adaptée aux limites à l'infini. Formulez vous-mêmes un tel théorème.

2. (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(ax)}{bx} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{bx\cos(ax)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{ax}{bx} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos(ax)} = \frac{a}{b} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{a}{b}$.

   (b) Puisque $\sin x$ est une fonction bornée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x+\cos x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$. Comment justifiez-vous la première égalité ?

   (c) Le calcul de cette limite est impossible car 0 n'est pas adhérent au domaine de la fonction.

   (d) Cette limite n'existe pas car la limite à gauche vaut -1 et la limite à droite vaut 1.

3. (a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x-2}{x^2+3x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}{x^2(1+\frac{3}{x})} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{3}{x}} = 1.$

   (b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-1}{4+x-3x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{-3x^2} = -\frac{1}{3}$. On peut justifier la première égalité par un argument semblable à l'argument utilisé au point précédent.

   (c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{|x|} = 1$ (si $x \to +\infty$) et $= -1$ (si $x \to -\infty$).

   (d) Il est impossible de calculer la limite pour x tendant vers $-\infty$ car le domaine de définition de la fonction est $[0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0.\end{aligned}$$

4. (a) La droite $x = y$ est une asymptote oblique en $\pm\infty$. La droite $x = 0$ est une asymptote verticale.

   (b) La droite $y = 1$ est AH en $\pm\infty$. Les droites $x = -1$ et $x = 3$ sont asymptotes verticales.

   (c) La droite $x = 1$ est asymptote verticale. La droite $y = x + 5$ est asymptote oblique en $\pm\infty$.

   (d) La droite $y = x - \frac{3}{2}$ est asymptote oblique en $+\infty$. La droite $y = -x + \frac{3}{2}$ est asymptote oblique en $-\infty$.

5. (a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}-1} &= \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(\sqrt{x^2+2x+2}+1)}{x^2+2x+1} \\ &= \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(\sqrt{x^2+2x+2}+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}+1}{x+1} .\end{aligned}$$

Il faut distinguer deux cas : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}+1}{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}+1}{x+1} = -\infty$.

(b) Il suffit d'ajouter à la fonction $y = -2x+3$ une fonction qui tend vers 0 lorque $x \to \pm\infty$. Par exemple, on peut prendre $f(x) = -2x+3+\frac{1}{x}$.

Séance 4 : Chapitre 3 - Continuité

1. (a) f est continue sur $\mathbb{R}$, car $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -1 = f(-1)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$.

   (b) f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, car $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2 \neq 0 = f(0)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2 = f(1)$.

   (c) f est continue sur $]0,+\infty[$, car $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

   (d) f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, car $f(-1) = 0 = \lim\limits_{x\to -1} f(x)$ (car $\sin\frac{x}{x+1}$ est bornée) et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{x}\frac{x}{x+1} = 1 \neq 0 = f(0)$.

2. (a) On prolonge par continuité en posant $f(9) = 6$, car $\lim\limits_{x\to 9^{\cdot}} f(x) = 6$.

   (b) On ne peut pas prolonger par continuité la fonction en 0 car la limite de f en 0 n'existe pas (en effet, la limite à gauche vaut 1 et la limite à droite vaut -1).

3. La fonction P est continue sur l'intervalle fermé $[0,2]$, $P(0) = -1 < 0$ et $P(2) = 5 > 0$. Le théorème de Bolzano nous dit qu'il existe un point $c \in]0,2[$ tel que $P(c) = 0$.

4. Si $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$, le résultat est démontré. Supposons que $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 1$. On a alors $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$. On pose $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - f(x)$. La fonction g est continue, $g(0) = -f(0) < 0$ et $g(1) = 1 - f(1) > 0$. Le théorème de Bolzano nous dit qu'il existe un $c \in]0,1[$ tel que $g(c) = 0$. Donc $c - f(c) = 0$, c'est-à-dire $c = f(c)$.

5. On peut considérer la fonction qui donne la distance entre un point du graphe et l'origine
$$d\colon [0,1] \to \mathbb{R}\,, \quad d(x) = \mathrm{dist}((x,f(x)),(0,0)) = \sqrt{x^2+f(x)^2}\,.$$
La fonction d est continue et donc, par le théorème de Weierstrass, il existe $x_m, x_M \in [0,1]$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$, $d(x_m) \leq d(x) \leq d(x_M)$. Le point $(x, f(x_m))$ est donc un point du graphe qui a une distance minimale à l'origine, et le point $(x, f(x_M))$ a une distance maximale.

6. La fonction f est continue sur un segment fermé. Elle est donc bornée. Pour montrer que f est continue, on observe que si $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ (montrez-le !). Ensuite,
$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{|x|^{\frac{3}{2}}}{\sin x}\right| = \lim_{x\to 0} |x|^{\frac{1}{2}} \cdot \lim_{x\to 0} \left|\frac{x}{\sin x}\right| = 0 \cdot 1 = 0 = f(0)\,.$$

7. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a^3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - a^3x) = a^3 - 1$. Donc la droite $y = a^3x + a^3 - 1$ est asymptote en $-\infty$.
   (b) Pour que f soit continue, il faut que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1)$, ce qui revient à $a^3 = 2$. Il faut donc choisir $a = \sqrt[3]{2}$.
8. Il faut que $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x)$. Cela donne l'équation $a = a^2$ (car la limite en 0 de $\exp(-\frac{1}{x^2})$ vaut 0). Il faut donc choisir $a = 1$ ou $a = 0$.
9. (a) La limite de f en $+\infty$ est L si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que, si $x > \delta$, alors $|f(x) - L| < \epsilon$.
   (b) On fixe un $\epsilon > 0$ et on considère le δ correspondant. Sur $[0, \delta]$ la fonction f est bornée car elle est continue sur un segment fermé. Sur $]\delta, +\infty[$ la fonction f est bornée car, par le point (a), on a $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$.
   (c) On fixe $\epsilon = \frac{L}{2}$. Par le point (a), il existe un $\delta > 0$ tel que, si $x > \delta$, alors $|f(x) - L| < \epsilon$. Cela implique que $f(x) > \frac{L}{2} > 0$. Puisque f est continue et $f(0) < 0$, par le théorème des valeurs intermédiaires il existe un c entre 0 et δ tel que $f(c) = 0$.

Séance 5 : Chapitre 4 - Dérivées

1. L'équation de la droite tangente en x_0 au graphe de la fonction f est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Dans notre cas, $x_0 = 1$, $f(x) = x^2 + x$ et $f'(x) = 2x + 1$. La droite tangente a donc comme équation $y = 2 + 3(x - 1)$ et la pente est 3.
2. On a $f'(x) = 2ax + b$. Il faut donc imposer les conditions $f(1) = 2$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. On trouve $f(x) = x^2 + x$.
3. La pente de la droite tangente est $f'(x_0) = 2ax_0 + b$. La pente de la droite sécante est
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{(x_0 + h) - (x_0 - h)} = \frac{4ax_0h + 2bh}{2h} = 2ax_0 + b.$$
4. (a) $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ (car la fonction $\sin\frac{1}{x}$ est bornée). Donc f est dérivable à l'origine et $f'(0) = 0$.
   (b) $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0 = g(0)$ et donc g est continue à l'origine, mais $\lim\limits_{x\to0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0} \sin\frac{1}{x}$ n'existe pas, et donc g n'est pas dérivable en 0.
5. Après avoir dessiné le graphe de f, graphe qui dépend du paramètre a, on tire facilement les conclusions suivantes.
   Si a est strictement positif, la fonction f n'est pas injective ni surjective ; elle n'est pas dérivable en 0. Si $a = 0$, la fonction f n'est pas injective ni surjective ; elle est dérivable. Si a est strictement négatif, la fonction f est injective et surjective ; elle

n'est pas dérivable en 0.
En ce qui concerne la fonction composée, il faut d'abord la calculer explicitement. Elle est donnée par $(f \circ g)(x) = e^{3x}$. Elle est donc injective et dérivable. Elle n'est pas surjective car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) > 0$.

6. (a) On a que
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} x = 0 \cdot 0 = 0.$$
Par la continuité de f en 0, on a alors que $f(0) = 0$.
   (b) En utilisant le point (a) et l'hypothèse, on a
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Séance 6 : Chapitre 4 - Dérivées, théorèmes fondamentaux

1. (a) $f'(x) = 6x - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}(16x^2)^{-\frac{3}{4}}32x = 6x - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$;
   (b) $f'(x) = -(3x^{-2} + 5x^4)^{-2}(-6x^{-3} + 20x^3) + 2(x^3 + 2) + 3x^2(2x + 1)$;
   (c) $f'(x) = -\sin(\sin x) \cdot \cos x - 6x^2 \cos(x^3) \cdot \sin(x^3)$;
   (d) $f'(x) = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{1+x})^{-\frac{1}{2}}(1 + x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}}(2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}})$
   $= \frac{1}{4}((1 + \sqrt{1+x})(1 + x))^{-\frac{1}{2}} \pm \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$, avec $+$ si $2x^2 < 1$ et $-$ si $2x^2 > 1$;
   (e) $f'(x) = -\frac{1}{x\ln^2 x} + e^{x\ln x}(\ln x + 1) = -\frac{1}{x\ln^2 x} + x^x(\ln x + 1)$;
   (f) $f'(x) = \frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2} = \frac{2}{2\sin x\cos x-1}$;
   (g) $f'(x) = 2xe^{x^2} + 2e^{2x}$.
2. (a) On a que $f(-1) = -2$; donc $\frac{d}{dy}f^{-1}(-2) = \frac{1}{f'(-1)} = -\frac{1}{8}$ car $f'(x) = 8x^3$ et $f'(-1) = -8$.
   (b) On a que $f(0) = 0$; donc $\frac{d}{dy}f^{-1}(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}$.
   (c) On a que $f(1) = 3$; donc $\frac{d}{dy}f^{-1}(3) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{5}$.
3. L'équation de la droite tangente en $(x_0, f(x_0))$ est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Dans les deux exemples on a :
   (a) $y = -x + \sqrt{2}$;
   (b) $y = x$.
4. La fonction $f = \arcsin\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis. Donc si $x, y \in [-1, 1]$, $x > y$, il existe $c \in]y, x[$ tel que
$$\arcsin x - \arcsin y = f'(c)(x - y) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}(x - y) \geq x - y\,,$$
car $-1 < c < 1$.

5. L'énoncé est faux. Contre-exemple : $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Cette fonction est continue et dérivable, mais $f'(x) = 1$ pour tout x.
6. Non, car cette fonction n'est pas dérivable au point 3. En effet, en ce point la limite du quotient différentiel n'existe pas car
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{3-x}{x-3} = -1 \neq \lim_{x\to 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x\mapsto 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1\,.$$
7. Pour $x = 0$, on a $f(t) = f(0) + f(t)$. Donc $f(0) = 0$, c'est-à-dire que le graphe de f passe par l'origine. Calculons la dérivée de f :
$$f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x) + f(t) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = f'(0)\,.$$
On a donc que la dérivée est constante (elle ne dépend pas de x). Par le théorème des accroissements finis, le graphe de f est alors une droite.
8. On considère la fonction $h = f - g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Cette fonction vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. Il existe donc $c \in]0,1[$ tel que $h'(c) = 0$. Cela signifie que $f'(c) = g'(c)$.
9. On peut considérer la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$. La dérivée $h'(x)$ admet une seule racine positive. Par le théorème de Rolle, la fonction $h(x)$ admet au plus deux racines.

Séance 7 : Chapitre 5 - Applications des dérivées I

1. (a) maxima absolus : $x = -2$ et $x = 2$; minimum absolu : $x = 0$;
   (b) ni minimum, ni maximum ;
   (c) maxima absolus : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; minima absolus : $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
   (d) minima absolus : $x = \pm\sqrt{2}$; maximum local : $x = 0$;
   (e) maximum absolu : $x = 0$.
2. Si on dénote par x et y les deux côtés du rectangle, on a $y = \frac{P}{2} - x$. L'aire du rectangle est donnée par la fonction $A(x) = x \cdot y = x \cdot (\frac{P}{2} - x)$. Sa dérivée est donc $A'(x) = \frac{P}{2} - 2x$, qui s'annule en $x = \frac{P}{4}$. Le rectangle d'aire maximale est donc le carré.
3. La distance entre l'origine et un point de coordonnées $(x, f(x))$ est
$$d(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2}.$$
Sa dérivée est $d'(x) = \frac{x + f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{x^2+f(x)^2}}$. La distance est donc maximale ou minimale pour les points a tels que $d'(a) = 0$, ce qui revient à $f'(a) = -\frac{a}{f(a)}$. Ceci donne aussi la pente de la droite tangente au graphe de f en un tel point. Par contre, la droite qui passe par l'origine et le point $(a, f(a))$ a comme équation $y = \frac{f(a)}{a} \cdot x$. On voit bien que la condition d'orthogonalité est vérifiée.

4. Si x est la moitié de la base du rectangle et y est la hauteur, on a la relation $x^2+y^2=r^2$. Par conséquent, l'aire du rectangle est $A(x)=2x\cdot y=2x\cdot(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$. La dérivée est $A'(x)=2(r^2-2x^2)\cdot(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ et elle s'annule en $x=\frac{r}{\sqrt{2}}$. On a donc que la base du rectangle d'aire maximale vaut $\frac{2r}{\sqrt{2}}$ et la hauteur $\frac{r}{\sqrt{2}}$.
5. (a) Dom$f=\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt[3]{4}\}$, $x=0$ est la seule racine, AH : $y=0$ en $\pm\infty$, asymptote verticale en $-\sqrt[3]{4}$, minimum en 0 et maximum en 2, f est décroissante sur $]-\infty,-\sqrt[3]{4}\,[\,\cup\,]-\sqrt[3]{4},0[\,\cup\,]2,+\infty[$ et croissante sur $]0,2[$.
   (b) Dom$f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $x=-1$ est la seule racine, AH : $y=1$ en $\pm\infty$, asymptote verticale en 1, f est toujours décroissante.
   (c) Dom$f=]-\infty,-1\,]\cup[\,1,+\infty\,[$, $f(\pm1)=0$, asymptote oblique : $y=-x$ en $-\infty$ et $y=x$ en $+\infty$, f est décroissante sur $]-\infty,-1\,]$ et croissante sur $[\,1,+\infty[$.
   (d) Dom$f=\mathbb{R}$, $x=0$ est la seule racine, AH : $y=0$ en $+\infty$, minimum en $x=0$ et maximum en $x=2$, f est décroissante sur $]-\infty,0\,]\cup]2,+\infty\,[$ et croissante sur $]0,2[$.
   (e) Dom$f=]0,+\infty\,[$, $x=1$ est la seule racine, asymptote verticale en $x=0$, AH : $y=0$ en $+\infty$, maximum en $x=e$, f est décroissante sur $]e,+\infty[$ et croissante sur $]0,e[$.
6. Appelons x la base du rectangle et y sa hauteur. La hauteur du triangle vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$. En utilisant les triangles semblables, on a la relation

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}}{y},$$

d'où $y=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)$. L'aire du rectangle est donc $A(x)=x\cdot y=\frac{\sqrt{3}}{2}x\cdot(1-x)$ et sa dérivée est $A'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}x$. Par conséquent, l'aire du rectangle est maximale si $x=\frac{1}{2}$ (qui est la racine de la dérivée $A'(x)$) et $y=\frac{\sqrt{3}}{4}$.
7. Voir le théorème 5.3.

Séance 8 : Chapitre 5 - Applications des dérivées II

1. (a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x}=0\,;$
   (b) $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0\,;$
   (c) $\lim\limits_{x\to0}x^x=\lim\limits_{x\to0}e^{\ln(x^x)}=\lim\limits_{x\to0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0}x\ln x}=e^0=1$ (on utilise ici le fait que la fonction exponentielle est continue) ;
   (d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{\operatorname{cotg}x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\ln x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2x}}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x}$
   $=-\lim\limits_{x\to0}\sin x\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=0\cdot1=0\,;$

(e) On écrit la limite à calculer sous la forme

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}},$$

on applique deux fois la règle de l'Hospital et on trouve que la limite cherchée vaut 0.

2. On a $T^{(n)}_{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$.
Dans notre cas, il faut calculer $f'(x) = 2xe^{(x^2)}$ et $f''(x) = 2e^{(x^2)} + 4x^2e^{(x^2)}$.
On a donc $T^{(2)}_{f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 + x^2$.

3. L'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $T^{(n)}_{f,a}(x)$ est

$$f(x) - T^{(n)}_{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

pour un certain c compris entre a et x. Dans notre cas, on a $n = 1, x = \frac{\pi}{4} + 10^{-1}$ et $a = \frac{\pi}{4}$. Donc

$$|f(x) - T^{(1)}_{f,a}(x)| \ = |\frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-a)^2| \ = \ \frac{|-\cos c - 2\sin c|10^{-2}}{2} \le \frac{3}{2}10^{-2}\,.$$

4. On a que $1 + x + \frac{x^2}{2} = T^{(2)}_{f,0}(x)$. Par conséquent,

$$|e^x - T^{(2)}_{f,0}(x)| \ = \ |\frac{f'''(c)}{3!}x^3| \ = \ |\frac{e^c}{3!}x^3| \ \le \ \frac{e^{0,1}}{3!} \cdot 10^{-3}$$

car c est compris entre 0 et x, et $|x| \ \le 10^{-1}$.

5. On considère la fonction $f(x) = \ln(1+x)$, son polynôme de Taylor d'ordre 2 centré au point $a = 0$ et l'erreur commise au point $x = -0,01 = -10^{-2}$. On a

$$|f(x) - T^{(2)}_{f,0}(x)| \ = \ |\frac{f'''(c)}{3!}x^3| \ = \ |\frac{2}{(1+c)^3} \cdot \frac{10^{-6}}{3!}| \le \frac{2}{(0,99)^3} \cdot \frac{10^{-6}}{3!} \le 10^{-6}\,.$$

On peut donc calculer $\ln(0,99) = f(-0,01) \simeq T^{(2)}_{f,0}(-0,01) = -10^{-2} - \frac{10^{-4}}{2}$.

6. (a) On ne peut pas calculer la limite en $+\infty$ car le domaine de la fonction est $[-1,1] \setminus \{0\}$.
(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x+\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1+2\sin x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1+\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\cos 2x} = 0.$

7. (a) $T^{(3)}_{f,\frac{\pi}{6}}(x) = f(\frac{\pi}{6}) + f'(\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{6}) + \frac{f''(\frac{\pi}{6})}{2}(x-\frac{\pi}{6})^2 + \frac{f'''(\frac{\pi}{6})}{3!}(x-\frac{\pi}{6})^3$
$= \sqrt{3} - (x-\frac{\pi}{6}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6})^2 + \frac{1}{6}(x-\frac{\pi}{6})^3$.
(b) $|R(\frac{\pi}{7})| \ = \ |f(\frac{\pi}{7}) - T^{(3)}_{f,\frac{\pi}{6}}(\frac{\pi}{7})| \ = \ |\frac{f^{(iv)}(c)}{4!}(\frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{6})^4| \ = \frac{\cos c}{12} \cdot \frac{\pi^4}{42^4} \le \frac{\cos\frac{\pi}{7}}{12} \cdot \frac{\pi^4}{42^4} \le \frac{\pi^4}{12\cdot 42^4}\,.$

8. (a) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0 = f(1)$, donc f est continue en $x = 1$.

   (b) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\lim_{x\to 1} \ln|1-x| = +\infty$, donc f n'est pas dérivable en $x = 1$.

9. Vérifions les hypothèses du théorème, en posant $f(x) = x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}$ et $g(x) = \sin x$. On a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$ et $g'(x) = \cos x \neq 0$ sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \setminus \{0\}$. Étudions alors la limite suivante :
$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}\,.$$
Cette limite n'existe pas : en effet, la limite du dénominateur est 1, mais la limite du numérateur n'existe pas (le terme $\cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0). Le théorème de l'Hospital ne s'applique donc pas.

10. $|f(x) - T_{f,0}^{(n)}(x)| = |\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}| = |\frac{2^{n+1}e^{2c}}{(n+1)!}x^{n+1}| \leq \frac{2^{n+1}e^{2\cdot\frac{1}{2}}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{e}{(n+1)!}\,.$

Séance 9 : Chapitres 6 et 7 - Primitives et intégrales I

1. (a) La fonction est primitivable sur $]0, +\infty[$ car elle est continue sur $]0, +\infty[$.

   (b) Soit G une primitive de f et soit $F(x) = G(x) - G(1)$. La fonction F est donc une primitive de f et $F(1) = 0$. Si H est une autre primitive de f telle que $H(1) = 0$, alors $H(x) = F(x) + C$ pour une certaine constante C, et cela est valable pour tout x. Si on pose $x = 1$, la condition $H(1) = F(1)$ implique $C = 0$.

   (c) Par dérivation d'une fonction composée, on a $\frac{d}{dx}F(ax) = aF'(ax) = a\frac{1}{ax} = \frac{1}{x} = f(x)$. Donc $F(ax)$ est une primitive de f et donc $F(ax) = F(x) + C$ pour une certain constante C. Si on pose $x = 1$, on a $F(a) = F(1) + C = C$, d'où $F(ax) = F(x) + F(a)$.

2. (a) $\int \ln x = \int 1 \cdot \ln x = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} = x\ln x - \int 1 = x\ln x - x\,.$

   (b) $\int x \cdot e^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x} = -xe^{-x} - e^{-x}\,.$

   (c) $\int \operatorname{arctg} x = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,.$

   (d) $\int x^2 \ln x = \frac{1}{3}x^3\ln x - \int \frac{1}{3}x^3\frac{1}{x} = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3\,.$

   (e) $\int e^x \sin x = e^x\sin x - \int e^x\cos x = e^x\sin x - (e^x\cos x + \int e^x \sin x)$, d'où $\int e^x\sin x = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)\,.$

   (f) $\int x\sin x = -x\cos x + \int \cos x = -x\cos x + \sin x\,.$

3. (a) $\int \operatorname{tg}^2 x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1) = \operatorname{tg} x - x\,.$

   (b) $\int xe^{x^2} = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2} = \frac{1}{2}\int e^y = \frac{1}{2}e^y = \frac{1}{2}e^{x^2}\,.$

   (c) On pose $e^x = y$ et donc $x = \ln y$. On a alors
   $\int \frac{1}{1+e^x} = \int \frac{1}{1+y}\cdot\frac{1}{y} = \int(-\frac{1}{1+y} + \frac{1}{y}) = -\ln(1+e^x) + \ln e^x = -\ln(1+e^x) + x\,.$

   (d) $\int \frac{1}{x\ln^2 x} = \int \frac{1}{y^2} = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{\ln x}\,.$

(e) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} = \int \cos x \cdot \frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x} = \int \frac{1-y^2}{y^4} = \int (\frac{1}{y^4} - \frac{1}{y^2}) = -\frac{1}{3}y^{-3} + y^{-1} = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x}$.

4. (a) L'équation $f(x) = (\alpha x + \beta) + \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$ nous donne

$$x^4 + x + 1 = \alpha x^4 + \beta x^3 + x^2(-\alpha + a + b + c) + x(-\beta + b - c) - a.$$

Par le principe d'identité des polynômes, on a $\alpha = 1, \beta = 0, a = -1, b = \frac{3}{2}, c = \frac{1}{2}$.

(b) Par le point (a), $f(x) = x - \frac{1}{x} + \frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$.
Donc $\int f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x + \frac{3}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+1)$.

5. $\int \frac{x}{\sqrt{2+3x^2}} = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{\sqrt{2+3x^2}} = \frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{3}\sqrt{y} + C = \frac{1}{3}\sqrt{2+3x^2} + C$.

6. (a) $G'(x) = \frac{d}{dx}F(-x) = -F'(-x) = -f(-x) = f(x)$. Donc G est une primitive de f et donc $G(x) = F(x) + C$ pour tout x. La condition $G(0) = F(0)$ implique que $C = 0$. Finalement, on a $F(x) = G(x) = F(-x)$.

(b) La première affirmation est vraie. Elle est une conséquence évidente du point (a). La deuxième affirmation est fausse. Contre-exemple : la fonction $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ n'est pas impaire, mais elle est une primitive de la fonction paire $f(x) = x^2$.

7. Les fonctions F et G étant deux primitives de f, on a $F(x) = G(x) + C$ pour une constante C. Par conséquent, $F(b) - F(a) = G(b) + C - G(a) - C = G(b) - G(a) = \int_a^b f - \int_a^a f = \int_a^b f$.

8. On sait que F est une primitive de f. Donc, en utilisant la règle de dérivation des fonctions composées, on a $F(g(x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \int_0^{g(b)} f(u)\,du - \int_0^{g(a)} f(u)\,du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du\,.\end{aligned}$$

9. On décompose $\frac{x^3}{x+3} = ax^2 + bx + c + \frac{r}{x+3}$. On trouve une primitive de $\frac{x^3}{x+3}$ et on applique le théorème fondamental.

Séance 10 : Chapitres 6 et 7 - Primitives et intégrales II

1. (a) $\int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx = \int_3^4 \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right)\,dx = [-\ln(x-1) + \ln(x-2)]_3^4 = \ln\frac{4}{3}$.

(b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx = 0$ car la fonction $\operatorname{tg} x$ est impaire et le domaine d'intégration est symétrique par rapport à l'origine.

(c) On pose $e^x = y$. On a $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int_1^e \frac{y}{1+y} \cdot \frac{1}{y}\,dy = \int_1^e \frac{1}{1+y}\,dy = [\ln(1+y)]_1^e = \ln\frac{1+e}{2}$.

(d) On pose $\ln x = y$. On a $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{y}\,dy = [\ln y]_1^2 = \ln 2$.

2. (a) La fonction $f(x)$ est intégrable sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$ car elle est continue partout sauf en $x=-1$ et $x=1$.

   (b) En se basant sur le graphe de f et sur la signification géométrique de l'intégrale :
   $F(t)=-8$ si $t<-1$,
   $F(t)=\left[\frac{3}{2}x^2+4x\right]_1^t=\frac{3}{2}t^2+4t-\frac{11}{2}$ si $-1\leq t\leq 1$,
   $F(t)=\left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^t=-\frac{1}{2}t^2+t-\frac{1}{2}$ si $t>1$.

3. (a) $\mathrm{Dom} f=\mathbb{R}$ car $2u^2$ est intégrable sur tout segment fermé de $\mathbb{R}$. Pour déterminer la dérivée de $f(t)$ deux méthodes sont possibles. L'avantage de la deuxième méthode est qu'il ne faut pas calculer une primitive de $2u^2$.
   Méthode 1 : $f(t)=\int_0^{2t+1}2u^2\,du=\left[\frac{2}{3}u^3\right]_0^{2t+1}=\frac{2}{3}(2t+1)^3$, et donc $f'(t)=4(2t+1)^2$.
   Méthode 2 : soit $F(u)$ une primitive de $g(u)=2u^2$. On a que

   $$f(t)=\int_0^{2t+1}2u^2\,du=F(2t+1)-F(0)\,.$$

   Par conséquent,

   $$\begin{aligned}f'(t)&=\tfrac{d}{dt}(F(2t+1)-F(0))=\tfrac{d}{dt}F(2t+1)\\&=\tfrac{d}{du}F(2t+1)\cdot\tfrac{d}{dt}(2t+1)=g(2t+1)\cdot 2=4(2t+1)^2.\end{aligned}$$

   (b) $\mathrm{Dom} f=\mathbb{R}$ et $f'(t)=2t\sin(t^2+1)$.

   (c) $\mathrm{Dom} f=\mathbb{R}$ car $\mathrm{tg}\,u$ est intégrable sur chaque segment fermé contenu dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $\sin u,\cos u\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ pour tout $u\in\mathbb{R}$. On a $f'(t)=\cos t\cdot\mathrm{tg}(\sin t)+\sin t\cdot\mathrm{tg}(\cos t)$.

   (d) $\mathrm{Dom} f=]1-\sqrt{2},\sqrt{\sqrt{2}-1}\,[$. En effet, la fonction $\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}$ est intégrable sur tout segment fermé contenu dans $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$. Il faut donc choisir t tel que $t-1,t^2+1\in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$. La première condition nous donne $1-\sqrt{2}<t<1+\sqrt{2}$. La deuxième condition nous donne $|t|<\sqrt{\sqrt{2}-1}$. Pour que les deux conditions soient vérifiées au même temps, il faut imposer $1-\sqrt{2}<t<\sqrt{\sqrt{2}-1}$. On a aussi $f'(t)=\frac{2t(t^2+1)}{\sqrt{2-(t^2+1)^2}}-\frac{t-1}{\sqrt{2-(t-1)^2}}$.

   (e) $\mathrm{Dom} f=\mathbb{R}$ et $f'(t)=0$ car la fonction u^3-u est impaire et le domaine d'intégration est symétrique par rapport à l'origine.

4. Les deux courbes ont trois points d'intersection : $x=-1,x=1$ et $x=2$. Après avoir esquissé le graphe, on voit que l'aire de la surface est donnée par

   $$A=\int_{-1}^{1}(x^3+1)-\int_{-1}^{1}(2x^2+x-1)+\int_1^2(2x^2+x-1)-\int_1^2(x^3+1)=\frac{37}{12}\,.$$

5. On remarque que chacune des lignes ci-dessous implique la suivante

$$\begin{aligned}
-1 \leq \cos x &\leq 1, \\
-\tfrac{\pi}{4} \leq \tfrac{\pi}{4}\cos x &\leq \tfrac{\pi}{4}, \\
\tfrac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos(\tfrac{\pi}{4}\cos x) &\leq 1, \\
\tfrac{1}{2} \leq \cos^2(\tfrac{\pi}{4}\cos x) &\leq 1, \\
1 = \int_0^2 \frac{1}{2}\,dx \leq \int_0^2 \cos^2(\frac{\pi}{4}\cos x)\,dx &\leq \int_0^2 1\,dx = 2.
\end{aligned}$$

6. (a) $\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x - e^x]_0^1 = 1$.
   (b) $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^y\,dy = \frac{e-1}{2}$.
   (c) On pose $y = \sqrt{x}$. On a $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 2ye^y\,dy = 2$.
7. La variation de température en chaque point est $\Delta(x) = T_f(x) - T_i(x) = 30 - x$. On peut imaginer de découper la barre en segments $[x_{i-1}, x_i], i = 1, \ldots, n$, et de choisir un point $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sur chaque segment. La quantité de chaleur fournie à chaque segment est approximativement $Q_i = m_i \cdot c \cdot \Delta(c_i) = \delta \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot c \cdot \Delta(c_i)$. La quantité totale est donc approximativement

$$\sum_{i=1,\ldots,n} \delta \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot c \cdot \Delta(c_i)\,.$$

   Si le découpage est de plus en plus fin, on obtient par passage à la limite

$$Q = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1,\ldots,n} \delta \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot c \cdot \Delta(c_i)\right] = \int_0^{10} \delta \cdot c \cdot \Delta(x)dx = 250 \cdot \delta \cdot c\,.$$

8. Soit $F(x)$ une primitive de $f(x) = e^{x^2}$. Une telle primitive existe car $f(x) = e^{x^2}$ est continue. Par le théorème fondamental du calcul intégral, on a

$$g(t) = \int_{t^2}^{t^2+1} e^{x^2}\,dx = F(t^2+1) - F(t^2).$$

   On obtient alors la fonction $g'(t)$ comme dérivée d'une fonction composée :

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{dF}{dx}(t^2+1) \cdot \frac{d}{dt}(t^2+1) - \frac{dF}{dx}(t^2) \cdot \frac{d}{dt}(t^2) \\
&= f(t^2+1) \cdot 2t - f(t^2) \cdot 2t = 2t \cdot (e^{t^4+2t^2+1} - e^{t^4})\,.
\end{aligned}$$

9. Pour $f(x) = \cos(\pi x) \cdot \mathrm{tg}(\sin(\pi x))$ on a évidemment $f(1) = 0$. Si on pose $u = \sin(\pi x)$, on a aussi $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^0 \mathrm{tg}\,u\,du = 0$.
10. (a) $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. La fonction est périodique de période 2π. La fonction est décroissante car $f'(x) < 0$ pour tout x.
    Sur $]0, 2\pi[$: $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 2\pi} f(x) = -\infty$, $f(\pi) = 0$. Le graphe de la fonction est symétrique par rapport au point $x = \pi$.

(b) Le domaine d'intégration est symétrique par rapport au point $x = \pi$. Donc, à cause de la propriété de symétrie du graphe de f (voir point précédent), la fonction g est la fonction constante nulle : $g(x) = 0$ pour tout $x \in [0, \pi[$.

Séance 11 : Chapitre 8 - Fonctions de deux variables réelles I

1.
2.
3.
4. (a) n'existe pas ;
   (b) n'existe pas ;
   (c) 0 ;
   (d) 0.
5. (a) f est continue ;
   (b) f n'est pas continue en $(0, a)$, $a \in \mathbb{R}$;
   (c) f n'est pas continue en $(0, 0)$.
6. (a) $g(x, y) = f(x, y)$ si $x \neq y$, $g(x, y) = 0$ si $x = y$;
   (b) Il n'y a pas de prolongement continu pour f.

Séance 12 : Chapitre 8 - Fonctions de deux variables réelles II

1.

$D_1 f(x,y)$	$D_2 f(x,y)$	$D_{11} f(x,y)$	$D_{22} f(x,y)$	$D_{12} f(x,y) = D_{21} f(x,y)$
a) $2x + 4xy$	$2x^2 + 6y$	$2 + 4y$	6	$4x$
b) $-e^{-x} \ln y$	e^{-x}/y	$e^{-x} \ln y$	$-e^{-x}/y^2$	$-e^{-x}/y$
c) yx^{y-1}	$x^y \ln x$	$y(y-1)x^{y-2}$	$x^y (\ln x)^2$	$x^{y-1}(1 + y \ln x)$

2.
3.
4. Pour ce qui est de la différentiabilité, on vérifie que les fonctions considérées ont des dérivées partielles d'ordre 1 continues au point $(2, 1)$: pour la première fonction, ces dérivées partielles sont des polynômes, donc continues en tout point de $\mathbb{R}^2$; pour la seconde, ce sont des produits de cosinus et de sinus, donc des fonctions continues ; pour la dernière, la fonction et ses dérivées partielles sont des fonctions rationnelles, donc continues en tout point où le dénominateur ne s'annule pas.

5. On utilise l'approximation affine

$$f(x,y) \simeq f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)\ ;$$

avec $x = 1.1$, $y = 0.95$, elle donne

$$\begin{aligned} f(1.1, 0.95) &\simeq 1.8 + 2.5 \times 0.1 + 0.4 \times (-0.05) \\ &\simeq 2.03 \end{aligned}$$

6. (a) On calcule que

$$\nabla f(x,y) = (6x - 3y + 2, -3x + 4y - 1)$$

et

$$\nabla f(1,1) = (5,0).$$

(b) La courbe de niveau C passant par le point $(1,1)$ a pour équation $f(x,y) = f(1,1)$, c'est-à-dire

$$3x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - y = 3.$$

Il s'agit d'une ellipse.

(c) La courbe C est perpendiculaire au vecteur $\nabla f(1,1) = (5,0)$ au point $(1,1)$. La tangente C en ce point est donc perpendiculaire à l'axe Ox et a pour équation $x = 1$.

(d) La fonction f diminue le plus vite, au voisinage du point $(1,1)$, dans la direction opposée à celle du vecteur $\nabla f(1,1)$, c'est-à-dire dans la direction du vecteur $(-1,0)$.

7. La direction de plus forte pente est celle du gradient ; au point $(1,2)$, celui-ci vaut

$$\nabla f(1,2) = (\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)) = (3x^2 + 3y, 3y^2 + 3x)_{x=1, y=2} = (9,15).$$

La tangente à la courbe de niveau est perpendiculaire au gradient ; elle est donc parallèle au vecteur $(-15,9)$ et a pour équation $\dfrac{x-1}{-15} = \dfrac{y-2}{9}$ ou $5y + 3x - 13 = 0$.

8. (a) Non, il suffit de considérer, par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \tfrac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

Elle n'est pas différentiable en $(0,0)$ (elle n'est même pas continue en ce point), bien qu'elle admette en $(0,0)$ des dérivées partielles (qui sont nulles).

(b) Non ; la fonction du point (a) convient ici aussi (avec $(a,b) = (0,0)$).

(c) L'existence du plan tangent équivaut à la différentiabilité ; on retombe donc sur le cas (a).

Séance 13 : Chapitre 9 - Intégrales doubles I

1. (a) $\frac{4}{3}\pi r^3$;
   (b) $\frac{2}{15}\pi$;
   (c) $\frac{2}{3}b^2h$.
2. (a) $\frac{\pi^2}{4}$;
   (b) $\frac{\pi^2}{8}(\frac{1}{e}-e)$;
   (c) $\frac{17}{4}$;
   (d) $\frac{1}{2}\ln(21/20)$;
   (e) $\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\sin(4)$.
3.
4. (a) $\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_x^1 x\,dy\right)dx = \frac{1}{6}$;
   (b) $\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy = \int_1^2\left(\int_x^{x\sqrt{3}} x\,dy\right)dx = \frac{7}{3}(\sqrt{3}-1)$;
   (c) Le domaine d'intégration est compris entre les abscisses $x=0$ et $x=2$. On doit donc calculer $\displaystyle\int_0^2\left(\int_{x^2/2}^{x} x\,dy\right)dx = \frac{2}{3}$;
   (d) Le domaine d'intégration est compris entre les abscisses $x=1$ et $x=2$. On doit donc calculer $\displaystyle\int_1^2\left(\int_{1/x}^{\sqrt{x}} x\,dy\right)dx = \frac{1}{5}(8\sqrt{2}-7)$.

   Pour $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy$, on trouve respectivement les valeurs 1/8, 15/4, 2/3 et $(7-3\ln 2)/6$.

Séance 14 : Chapitre 9 - Intégrales doubles II

1.
2. (a) 3 ;
   (b) $\frac{64}{3}$;
   (c) 32 ;
   (d) 5 ;
   (e) $16+12(\ln 2-\ln 6)$.

3. (a) $\frac{1}{6}$;
   (b) $\frac{75}{2}$;
   (c) $6\pi - \frac{16}{3}$.
4. Par définition, les coordonnées du centre de masse sont données par

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\iint_D \,dx\,dy}\,, \tag{1}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y\,dx\,dy}{\iint_D \,dx\,dy}\,. \tag{2}$$

Compte tenu de la symétrie, on a $\bar{x} = \bar{y}$. Par ailleurs, $\iint_D \,dx\,dy$ est l'aire du quart de disque et vaut $\pi/4$. En calculant les intégrales doubles, on voit que

$$\begin{aligned}\bar{x} = \bar{y} = \frac{4}{\pi}\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy\right] dx &= \frac{4}{\pi}\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx \\ = \frac{4}{\pi}\left[-\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}\right]_0^1 &= \frac{4}{3\pi}.\end{aligned}$$

5. Les coordonnées du centre de masse sont données par les formules (1),(2). On en tire

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\int_0^\pi \left[\int_0^{\sin x} y\,dy\right] dx}{\int_0^\pi \left[\int_0^{\sin x} dy\right] dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx}{2} \\ &= \frac{1}{4}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

De même, on trouve $\bar{x} = \pi/2$, ce qui peut aussi se déduire de la symétrie de la surface par rapport à la droite $x = \pi/2$.

6. La masse est donnée par

$$M = \iint_D 3x\,dx\,dy\,,$$

où

$$D = \{(x,y) \mid x^2 + 4y^2 \leq 12, x \geq 0, y \geq 0\}\,.$$

En ramenant l'intégrale double à deux intégrales simples successives, cela donne

$$\begin{aligned}M = \int_0^{\sqrt{12}} \left[\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{12-x^2}} 3x\,dy\right] dx &= \int_0^{\sqrt{12}} \frac{3}{2}\,x\sqrt{12-x^2}\,dx \\ = \left[-\frac{(12-x^2)^{3/2}}{2}\right]_0^{\sqrt{12}} &= 12\sqrt{3}.\end{aligned}$$

7. La masse est donnée par

$$M = \iint_D (2x + y + 2)\, dx\, dy\,,$$

où D est le triangle de sommets $(0,0), (2,0)$ et $(1,1)$. Cela donne (attention à l'ordre d'intégration choisi ici !)

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 \left[\int_y^{2-y} (2x + y + 2)\, dx\right] dy = \int_0^1 \left[x^2 + xy + 2x\right]_y^{2-y} dy \\ &= \int_0^1 (8 - 2y^2 - 6y)\, dy = \frac{13}{3}. \end{aligned}$$

Pour les coordonnées $\bar{x}$, $\bar{y}$ du centre de masse, on calcule que

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{M} \iint_D x(2x + y + 2)\, dx\, dy \\ &= \frac{1}{M} \int_0^1 \left[\int_y^{2-y} x(2x + y + 2)\, dx\right] dy \\ &= \frac{3}{13} \times \frac{14}{3} = \frac{14}{13} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{M} \iint_D y(2x + y + 2)\, dx\, dy \\ &= \frac{1}{M} \int_0^1 \left[\int_y^{2-y} y(2x + y + 2)\, dx\right] dy \\ &= \frac{3}{13} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{26}. \end{aligned}$$

Séance 15 : Chapitre 10 - Géométrie : vecteurs et changement de repère

1.
2. $\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\| \vec{b} \|^2}$.
3.
4. $\alpha = 1$, $\beta = 1$ et $\gamma = 2$. Le problème n'est pas possible si on impose $\vec{a} \times \vec{b} = (1, 2, -2)$.
5. Volume=$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = 18$, aire de la base=$\| \vec{a} \times \vec{b} \| = 6$, hauteur=3.
6. (a) $\overrightarrow{P_1P_2} = (3, -4, 5), \| \overrightarrow{P_1P_2} \| = \sqrt{50}$.

(b) $M = (\frac{1}{2}, 0, \frac{11}{2})$.
(c) $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 + (z - \frac{11}{2})^2 = \frac{25}{2}$.
(d) $P_3 = (8, -10, 18)$.

7. (a) Centre$=(6, -7, 4)$, rayon$=10$. Centre$=(0, -7, 4)$, rayon$=8$.
   (b) Centre$=(3, 3, 6)$, rayon$=7$.
8. $m = -5$ ou $m = 19$.
9. $P = (9, 4, -5)$.
10. (a) $(x')^2 + (z' - 1)^2 = 1$.
    (b) $(x')^2 - (y')^2 = 8$.
11. $(1, 2, 3)$.
12.

Séance 16 : Chapitre 10 - Géométrie : plans et droites

1. (a) $x - 3y + 5z = -12$.
   (b) $x + 3y + 5z = 11$.
   (c) $x - y + z = 2$.
   (d) $x + z = 2$.
   (e) $2x - z = 1$.
   (f)
2. $(x - 1)^2 + (y - \sqrt{2})^2 + (z - 3)^2 = \frac{9}{49}$.
3. (a) $\begin{cases} x + 2y - 19 = 0 \\ 3y + z - 23 = 0 \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} x + 3y - 3 = 0 \\ 4y + z - 8 = 0 \end{cases}$
   (c) $\begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ 2y - 3z - 16 = 0 \end{cases}$
   (d) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$
   (e) $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 5y + 3z - 20 = 0 \end{cases}$
   (f)
4. (a) $P = (\frac{1}{2}, 3, 3)$ et $\vec{v} = (1, -4, 8)$.
   (b) $P = (3, -1, -1)$ n'appartient pas à la droite.
5. (a) $\sqrt{3}$.

(b)

6.

7.

8.

9.

10.

Séance 17 : Chapitre 10 - Géométrie : coniques

1. $a = \frac{11}{3}$, $b = \frac{11}{6}$, $c = \frac{11}{2\sqrt{3}}$ et $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.
3. $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{13}$.
4. $x^2 - y^2 = 1$.
5. $a = 4$, $b = 2$, $c = \sqrt{20}$.
   Si on déplace l'origine vers $(1, 2)$: $(x')^2 + 2x' - 4(y')^2 - 16y' + 1 = 0$.
   Si on fait ensuite une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens antihorlogique : $(y'')^2 - 2y'' - 4(x'')^2 - 16x'' + 1 = 0$.
6. $x = \frac{y^2}{8}$.
7. Sommet$=(2, 3)$, foyer$=(2, \frac{13}{4})$ et l'équation de la directrice : $y = \frac{11}{4}$.
8. Ellipse centrée en $(-1, \frac{-7}{2})$, $\frac{8}{61}(x')^2 + \frac{4}{61}(y')^2 = 1$.
9. Ellipse centrée en $(4, 0)$, $\frac{1}{4}(x-4)^2 + \frac{1}{3}(y)^2 = 1$, $e = \frac{1}{2}$.
10. (a) parabole,
    (b) cercle,
    (c) parabole,
    (d) hyperbole
    (e) ellipse,
    (f) hyperbole.
11.
12.

Chapitre 12

Exercices supplémentaires

1 Les fonctions

1. Décomposez les fonctions suivantes en une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Votre décomposition est-elle valable en tous les points du domaine de f ?
   (a) $f(x) = e^x$;
   (b) $f(x) = \dfrac{2x-5}{x-3}$.
2. Complétez le tableau suivant :

$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
$x-7$	$x^{1/2}$	$\ldots$
$x+2$	$3x$	$\ldots$
$\ldots$	$(x-5)^{1/2}$	$(x^2-5)^{1/2}$
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	$\ldots$
$\ldots$	$1+\frac{1}{x}$	x
$\frac{1}{x}$	$\ldots$	x
$\frac{2x+3}{x+7}$	$\ldots$	x

3. Déduisez du graphe de la fonction $f(x) = 1/x$ les graphes des fonctions suivantes :
   (a) $\dfrac{1}{x+2}$, (b) $\dfrac{1}{4x}$, (c) $2 + \dfrac{1}{x}$, (d) $\dfrac{3x+2}{4x-1}$.
4. Tracez le graphe de $f(x) = \cos(nx)$, pour $n = 1, 2, 3$.
5. Calculez les quantités suivantes :
   (a) $\log_3 81$, (b) $\log_2 128$, (c) $\ln 1$, (d) $\exp_3 2$, (e) $\exp 0$.

2 Limite de fonctions

1. En utilisant la définition de limite d'une fonction en un point, montrez que :
   (a) la limite de la fonction x^2 au point 2 est 4 ;
   (b) la fonction $\sin(1/x)$ n'admet pas 0 comme limite au point 0.
2. Calculez les limites suivantes si elles existent :
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$;
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$.
3. Démontrez les propositions suivantes ou donnez-en un contre-exemple.
   (a) Si la droite d'équation $y = b$ est asymptote à la courbe $y = f(x)$ alors
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$
   (b) Si f est une fonction périodique non constante, la courbe d'équation $y = f(x)$ n'a pas d'asymptote, n'a pas d'asymptote oblique.
   (c) Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe d'équation $y = f(x)$ a une asymptote horizontale.
4. (a) Si la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe d'équation $y = f(x)$, trouvez une asymptote à la courbe d'équation $y = -f(x)$, à la courbe d'équation $y = f(-x)$.
   (b) Si les droites d'équation $y = x$ et $y = 0$ sont asymptotes à la courbe d'équation $y = f(x)$, pouvez-vous indiquer des asymptotes à la courbe d'équation $y = \sin(f(x))$?

3 Continuité

1. Etudiez la continuité des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies comme suit :
   (a) $f(x) = 1$ si $x \leq 0$ et $f(x) = 1 - x$ si $x > 0$;
   (b) $f(x) = |x-3|$ si $x \neq 3$ et $f(3) = 1$;
   (c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$;
   (d) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
2. On considère les fonctions suivantes qui ne sont pas définies au point a. Peut-on les prolonger par continuité en a ?
   (a) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, $a = 1$;
   (b) $f(x) = x \cos \dfrac{1}{x}$, $a = 0$.
3. Déterminez les valeurs du paramètre a pour que les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies ci-dessous soient continues.

(a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} + (x+1)^2$ si $x < 0$ et $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+a}$ si $x \geq 0$;

(b) $f(x) = x \sin \dfrac{\pi}{2x}$ si $x < 0$ et $f(x) = a + \sqrt{x^2+1}$ si $x \geq 0$;

(c) $f(x) = x^2 - 1$ si $x < 3$ et $f(x) = 2ax$ si $x \geq 3$.

4. Déterminez m et p pour que la fonction

$$f(x) = \ln|x-2| \text{ si } x \leq 0, \text{ et } f(x) = x^2 + mx + p \text{ si } x > 0$$

soit continue sur $\mathbb{R}$.

5. Montrez que la fonction $f(x) = \sin x \cos x + x^3 + 3x + 2$ possède un zéro.

6. Donnez un exemple de fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(-1) < 0$, $f(1) > 0$ et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in [-1,1]$.

7. Soit $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que la limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe. Montrez que f est bornée.

8. Trouvez numériquement les racines de l'équation $\sin x - x/2 = 0$.

9. Démontrez les propositions suivantes ou indiquez-en un contre-exemple.
(a) Une fonction $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue est nécessairement bornée.
(b) Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue possède un maximum absolu en un point $c \in]a,b[$.
(c) Une fonction $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue et bornée possède un maximum absolu en un point $c \in [a,b[$.
(d) Une fonction $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue et bornée possède un extremum absolu en un point $c \in [a,b[$.
(e) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a,b[$, telle que $f(a)f(b) < 0$. Alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

4 Dérivées

1. Trouvez l'ensemble des points du graphe de la fonction $f(x) = -\frac{1}{8}(x^3 - 9x^2 - 4)$ tels que la tangente à ce graphe, en ces points, soit parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 5$.

2. Etudiez la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes :
(a) $f(x) = |1 - x|$;
(b) $f(x) = x - 1/2$ si $x < 1$, $f(x) = x^2/2$ si $1 \leq x < 2$ et $f(x) = 2x - 4$ si $2 \leq x$.

3. Donnez un exemple de fonction continue qui ne soit pas dérivable
(a) en un point,
(b) en deux points,
(c) en une infinité de points.

4. Calculez la dérivée des fonctions suivantes :

(a) $3x^2 + 3x - 7$;

(b) $(2x+1)(x^3+2)$;

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + x$;

(d) $\dfrac{x(2x^2+3)}{(x-1)^2}$;

(e) $(3x^{-2} + 5x^4)^{-1}$;

(f) $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$;

(g) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$;

(h) $\sin^2 x$;

(i) $\cos(\sin x)$;

(j) $\cos^2(x^3)$;

(k) $(4x)^{1/2} - (16x^2)^{1/4}$;

(l) $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$;

(m) $\exp(x^2)$;

(n) $1/\ln x$;

(o) $(e^x)^2$;

(p) x^x.

5. Soit f et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, dérivables sur $]a,b[$ et telles que $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$. Montrez qu'il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.

6. Démontrez les propositions suivantes ou indiquez-en un contre-exemple.
(a) La dérivée d'une fonction paire est impaire.
(b) La dérivée d'une fonction impaire est paire.
(c) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a un minimum relatif au point $c \in \mathbb{R}$, alors c est parmi les points où la dérivée de f s'annule.
(d) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable au point $c \in \mathbb{R}$ et si $f'(c) = 0$, alors f a un maximum relatif ou un minimum relatif au point c.
(e) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et dérivable sur $]a,b[$ et si $f(b) > f(a)$, il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) > 0$.

7. Un tuyau déverse 16 cm^3 de sable par seconde sur un tas conique dont la hauteur est toujours le quart du diamètre de la base. A quelle vitesse le cône s'élève-t-il lorsque sa hauteur atteint 4 cm ?

5 Applications des dérivées

1. Vérifiez si le Théorème de l'Hospital s'applique et calculez les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln(x)}$;

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$;

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\sin(x)}{1-\cos(x)}$;

(d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

(e) $\lim_{x\to 0} x^x$;

(f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x)}{\mathrm{cotg}(x)}$;

(g) $\lim_{x\to 0} \left(1+\frac{x}{a}\right)^{1/x}$, $a > 0$.

(h) $\lim_{x\to +\infty} (1+\frac{1}{x})^{ax}$;

(i) $\lim_{x\to -\infty} (1+\frac{1}{x})^{x}$.

2. Montrez que, pour $x > 0$ et $k > 1$, les graphes des fonctions $f(x) = 2 + \ln(x)$ et x^k ont au maximum deux points d'intersection.
3. (a) Partagez le nombre 576 en deux nombres positifs dont le produit est maximal.
   (b) Partagez le nombre 577 en deux nombres positifs dont le produit est maximal.
4. Quelle est la distance minimale entre l'origine et les points de la droite d'équation $y = mx + p$?
5. Parmi tous les cylindres circulaires droits inscrits dans un cône droit de hauteur et de base données, trouvez celui de volume maximum.
6. Comparez les graphes des fonctions suivantes et de leur dérivées secondes.
   (a) $f(x) = 5x + 2$;
   (b) $f(x) = x^2$;
   (c) $f(x) = -x^3$;
   (d) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$.
7. Donnez une interprétation graphique du signe de la dérivée seconde d'une fonction deux fois dérivable.
8. Donnez un exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui ne soit pas deux fois dérivable.
9. Donnez l'équation des tangentes aux graphes des fonctions suivantes aux points considérés
   (a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x = \sqrt{2}/2$;
   (b) $f(x) = \ln(1+x)$, $x = 0$;
   (c) $f(x) = \cosh(x)$, $x = 0$.
10. Donnez l'équation des tangentes aux courbes d'équations suivantes aux points considérés.
    Suggestion : aux points considérés, on peut écrire la courbe sous la forme $y = f(x)$.
    (a) $2x^2 + 3y^2 = 5$, $(1, 1)$;
    (b) $2x^3 + x^2y + y^2 = 3$, $(1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$.
11. Trouvez une approximation de $\ln 3$ à partir de la linéarisation de $\ln x$, au point qui vous semble le plus adéquat.
12. Trouvez une borne sur l'erreur commise en utilisant $1 + x + x^2/2$ pour approcher e^x lorsque $|x| \leq 0,1$.

13. Quel ordre faut-il atteindre pour obtenir les valeurs suivantes à 10^{-5} près
    (a) e ; (b) $\sin(0,1)$?
14. Soit $f(x) = e^{\sin x}$.
    (a) Calculez le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f autour de 0.
    (b) Utilisez ce développement pour estimer $f(0,2)$ et majorez l'erreur commise.
15. Donnez une borne de l'erreur que l'on commet en approximant $f(x) = \sin x$ sur $[-\pi, \pi]$ par son polynôme de Taylor d'ordre 3 autour de 0.
16. Soit $f(x) = \exp(x^2)$. Majorez l'erreur commise en approximant $f(0,9)$ par $T^2_{f,1}(0,9)$.
17. Majorez l'erreur commise lorsque l'on approxime $\sqrt{1,2}$ par $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200}$.
18. Soit $f(x) = (1+x)^4 + \cos 2x$ et $p(x)$ son polynôme de Taylor d'ordre 4 autour de 0.
    (a) Majorez l'erreur commise en approximant $f(x)$ par $p(x)$ sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$.
    (b) Quel développement faut-il prendre pour calculer $f(1/2)$ à 10^{-3} près ?
19. Soit $f(x) = (2x+1)^3 + \sin 3x$ et $p(x)$ son polynôme de Taylor d'ordre 3 autour de 0.
    (a) Majorez l'erreur commise en approximant $f(x)$ par $p(x)$ sur l'intervalle $[-1/3, 1/3]$.
    (b) Quel développement faut-il prendre pour calculer $f(1/3)$ à 10^{-3} près ?

6 Primitives

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{|x|}{x}$.
   (a) Déterminez le domaine de f.
   (b) Montrez que f est dérivable sur son domaine et que $f'(x) = 0$.
   (c) La fonction f est-elle constante ? Elle a pourtant une dérivée toujours nulle.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

   (a) En appliquant la méthode de primitivation par parties à f_n, trouvez une relation entre les primitives de f_n et celles de f_{n+1}.
   (b) Déterminez les primitives de f_1.
   (c) Déduisez-en les primitives de f_2.
3. Pour chacune des fonctions suivantes, donnez un intervalle sur lequel la fonction est définie et primitivable. Sur cet intervalle, déterminez les primitives de la fonction.
   (a) $(a + bx^3)^2$, où $a, b \in \mathbb{R}$,
   (b) $\sqrt{2px}$, où $p > 0$,
   (c) $\frac{1}{\sqrt{x}}$,
   (d) $\sqrt{x+1}(x - \sqrt{x+1})$,
   (e) $(a^{2/3} - x^{2/3})^3$, où $a \in \mathbb{R}$,
   (f) $x(x+a)(x+b)$, où a, $b \in \mathbb{R}$,
   (g) $\frac{1}{\sqrt{x}}(x^m - x^n)^2$, où m, $n \in \mathbb{N}$.
4. Utilisez la méthode de primitivation par parties pour primitiver les fonctions suivantes, en précisant l'intervalle où ces fonctions sont définies.

(a) $\ln x$,

(b) x/e^x,

(c) $\operatorname{arctg} x$,

(d) $\arcsin x$,

(e) $x^2 \ln x$,

(f) $\operatorname{arctg} \sqrt{x}$,

(g) $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$,

(h) $e^x \sin x$,

(i) $x^2 e^{3x}$,

(j) $x \operatorname{arctg} x$,

(k) $x \sin x \cos x$,

(l) $x \sin x$.

5. Utilisez la méthode de primitivation par substitution ou par changement de variables pour primitiver les fonctions suivantes. Ecrivez explicitement la substitution utilisée et précisez l'intervalle de définition des fonctions.

(a) $\operatorname{tg}^2 x$,

(b) $\sin^2 x$,

(c) xe^{x^2},

(d) $\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}$,

(e) $\frac{1}{1+e^x}$,

(f) $\frac{1}{x \ln^2 x}$,

(g) $120(6x^2 + 1)^3 x + \frac{\ln x}{x}$,

(h) $(\sin 2x)\sqrt{1 + \cos 2x}$,

(i) $\frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}$,

(j) $\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}$,

(k) $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$,

(l) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$,

(m) $\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

6. Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$.

(a) Déterminez le domaine de f.
Trouvez alors trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \operatorname{dom} f$,

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{1-x+x^2}.$$

(b) Déduisez-en les primitives de f sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

7 Intégrales

1. A l'aide d'un exemple, montrez que l'on n'a pas, en général,

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

2. Démontrez les énoncez suivants ou indiquez-en un contre-exemple.

(a) Si f est intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, alors f est nulle sur $[a, b]$.

(b) Si f est intégrable sur $[a, b]$ et si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

(c) Si f et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont monotones, alors $f + g$ est intégrable sur $[a, b]$.

(d) Si $f + g$ est intégrable sur $[a, b]$, alors f et g sont intégrables sur $[a, b]$.

(e) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur tout intervalle borné. Si pour tout $a \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$, alors f est impaire.

3. En utilisant la définition de l'aire sous-tendue par le graphe d'une fonction comme une intégrale, montrez que :

   (a) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire et intégrable sur tout borné, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx;$$

   (b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire et intégrable sur tout borné, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0;$$

   (c) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique de période T et intégrable sur tout borné, alors pour tout a, $b \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{b}^{b+T} f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_{a}^{a+nT} f(x)\,dx = n\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx.$$

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction affine. Montrez, en utilisant la définition de l'intégrale, que
$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)].$$

5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et F la fonction définie pour $x \neq 0$ par
$$F(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt.$$

   (a) Montrez que F admet une limite quand x tend vers 0. Calculez cette limite.

   (b) Soit G le prolongement par continuité de F en 0, c.-à-d. $G(x) = F(x)$ si $x \neq 0$ et $G(0) = \lim\limits_{x\to 0} F(x)$. Quelles sont toutes les fonctions f continues pour lesquelles $G = 0$?

6. Calculez les limites suivantes

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_{0}^{x} \cos t\,dt$;
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_{0}^{x} \sin^2 t\,dt$.

7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. En utilisant la méthode d'intégration par substitution, vérifiez les propositions suivantes :

   (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{0}^{t} 2xf(x^2+1)\,dx = \int_{1}^{t^2+1} f(u)\,du$;

   (b) Si f est paire, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$;

   (c) Si f est impaire, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$;

(d) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^a f(a-x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$;

(e) Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^1 f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int_b^{a+b} f(x)\,dx$;

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx.$

8. (a) Appliquez la méthode de substitution pour évaluer

$$\int_a^b \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}\,dx,$$

sachant que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, $\varphi(a) = -1$ et $\varphi(b) = 1$.

(b) Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$ et $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 x(4+\operatorname{tg}^2 x)}\,dx.$

9. Calculez les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_1^2 (x^2-2x+3)\,dx$;

(b) $\displaystyle\int_6^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$;

(d) $\displaystyle\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx$;

(e) $\displaystyle\int_0^{-3} \frac{1}{\sqrt{25+3x}}\,dx$;

(f) $\displaystyle\int_{-2}^{-3} \frac{1}{x^2-1}\,dx$;

(g) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^5}{x+2}\,dx$;

(h) $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$;

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$;

(j) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$;

(k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$;

(l) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx.$

10. (a) Calculez l'aire de la surface délimitée par les courbes d'équations $y = \frac{x^2}{2}$, $x = 1$, $x = 3$ et l'axe Ox.
(b) Calculez l'aire de la surface délimitée par les courbes d'équations $y = x^3 - x$, $x = -1$, $x = 1$ et $y = 0$.
(c) Calculez l'aire de la surface finie délimitée par les courbes d'équations $y = x^3 + 1$ et $y = 2x^2 + x - 1$.
(d) Calculez l'aire de la surface délimitée par les courbes d'équations $y = \frac{x^2}{2}$ et $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.

11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$. En utilisant la méthode d'intégration par parties I_n, trouvez une relation entre I_n et I_{n+1}. Calculez I_1 et déduisez-en I_2 et I_3.

Remarque – Pour $n > 1$, cet exercice présente un calcul d'intégrale sans chercher une primitive de la fonction $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ considérée.

12. Soit E la région du plan se trouvant entre la courbe d'équation $y = \frac{1}{(2x+3)^2}$ et l'axe Ox, et se trouvant dans le demi-plan d'équation $x \geq 1$.

(a) Montrez qu'on peut définir l'aire de E par une intégrale. Calculez-la.

(b) Qu'en est-il si on considère la région se trouvant entre la courbe d'équation $y = \frac{1}{2x+3}$ et l'axe Ox, et se trouvant dans le demi-plan d'équation $x \geq 1$.

8 Fonctions de deux variables

1. Représentez le graphe des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :
   (a) $f(x,y) = xy$;
   (b) $f(x,y) = x^3 - y$;
   (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
   Représentez des lignes de niveau pour ces mêmes fonctions.
2. Calculez les limites suivantes si elles existent.
   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-y)^2}$;
   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^4 - y^4)}{x^4 + y^4}$;
   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 - x^2}{y^4 + x^2}$;
   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\, y}{x^2 + y^2}$.
3. La fonction
   $$T(z,t) = T_0 \cos(2\pi t/365 - 0,6z)e^{-0,6z}$$
   décrit les variations saisonnières de température (notée T) dans le sol, en fonction de la profondeur z (en mètres) ; t est le temps (en jours), l'instant $t = 0$ correspondant au moment dans l'année où la température est maximale en surface (elle y vaut alors T_0 degrés). Le coefficient de z (ici $0,6$) dépend des caractéristiques du sol considéré. Montrez que la fonction $T : (z,t) \mapsto T(z,t)$ est une solution de l'équation de diffusion de chaleur
   $$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} ,$$
   pour une valeur de a que l'on déterminera. A quelle profondeur d l'ampleur des variations de température est-elle la moitié de ce qu'elle est en surface ? Quel est le décalage (en jours) entre le moment où la température est maximale en surface et celui où elle est maximale à cette profondeur d?
4. Les vibrations d'une corde élastique, dont les extrémités sont fixes en $x = 0$ et $x = L$ sont décrites par le système d'équations
   $$\begin{aligned}
   &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{k}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} ,\\
   &u(0,t) = u(L,t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}^+ ,\\
   &u(x,0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \forall x \in [0,L] ;
   \end{aligned}$$

où $u(x,t)$ représente le déplacement vertical de la corde à l'abscisse x à l'instant t, $f(x)$ détermine la forme de la corde à l'instant $t = 0$; ρ est la masse par unité de longueur et k la composante horizontale de la tension dans la corde. On observe que, si

$$f(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \text{ avec } n \in \mathbb{N},$$

le problème admet des solutions de la forme

$$u(x,t) = \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \nu t\,.$$

Déterminez ν pour que l'expression ci-dessus fournisse effectivement une solution. Quelle est la fréquence des vibrations obtenues ? Comment varie-t-elle avec la tension dans la corde ? avec la masse par unité de longueur ?

5. Expliquez pourquoi les graphes de

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto 2 - x + 2y + x^2 - y^2 \\ \text{et} \quad g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \exp(y-x) + \sin(x^2+y) + \cos(xy) \end{aligned}$$

sont tangents en $(0,0,2)$.

6. La période T des petites oscillations d'un pendule de longueur ℓ est donnée par

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,.$$

On se propose d'utiliser cette formule pour estimer g, à partir de mesures de T et de ℓ. Majorez l'erreur relative $\Delta g/g$, sachant que les erreurs relatives sur T et ℓ vérifient les conditions

$$|\Delta T/T| \leq 10^{-6}\,, |\Delta \ell/\ell| \leq 10^{-6}\,.$$

Est-il préférable d'accroître la précision sur T ou sur ℓ ?

7. Supposons que la fonction

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto 2000\, e^{-2\cdot 10^{-6} x^2} + 1000\, e^{-0{,}5\cdot 10^{-6} y^2}$$

donne l'altitude (en mètres) sur une montagne en fonction de coordonnées (x,y). Si l'on se trouve au point de coordonnées $(10^3, 10^3)$, dans quelle direction faut-il se diriger pour monter le plus rapidement possible ?

8. Soient $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\,,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,.$$

Expliquez pourquoi les courbes de niveau de u et v, passant par un point (a,b) (quelconque), se coupent perpendiculairement en ce point.

9 Intégrales doubles

1. En utilisant le principe de Cavalieri, calculez les volumes suivants :
   (a) Volume du solide obtenu en faisant tourner la surface délimitée par $y = \cos x$, $y = \sin x$, $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$ autour de l'axe OX ;
   (b) Volume du solide dont la base est un cercle de rayon 1 et chaque section par un plan perpendiculaire à la base est un triangle équilatéral.
2. Changez l'ordre d'intégration dans les intégrales suivantes :
   (a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x} f(x,y)\,dy \right) dx$;
   (b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sin \pi x/2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy \right) dx$;
   (c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^{1} f(x,y)\,dy \right) dx$.
3. Calculez le volume du tétraèdre limité par les plans
$$x = 0, y = 0, z = 0 \text{ et } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 .$$
4. On considère l'intersection des cylindres
$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ et } x^2 + z^2 = a^2 .$$
   Exprimez le volume de ce solide comme une intégrale double et calculez celle-ci.

10 Géométrie

1. Soit les vecteurs $\vec{a} = (1, -2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 2, 1)$, $\vec{c} = (2, 0, -1)$ et $\vec{d} = (0, 1, 1)$. Calculez $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{c} \times \vec{d}$ et $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$.
2. (a) Trouvez les coordonnées du point P, symétrique de l'origine par rapport au plan Π d'équation $x + 2y - 2z = 3$.
   (b) Trouvez les coordonnées du point Q, obtenu en projetant le point $A = (2, 1, 0)$ sur le plan Π d'équation $x + 2y - 2z = 3$, parallèlement au vecteur $\vec{v} = (0, 4, 2)$.
3. Que deviennent les coordonnées de $P = (6, -1, 2)$ quand on fait une translation de l'origine du repère vers le point $(-1, 0, 3)$?
4. Que devient l'équation $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 - 5 = 0$ quand on fait une rotation de $\frac{\pi}{3}$ autour de Oz dans le sens horlogique ?
5. Donnez des équations cartésiennes pour la droite Δ joignant $P = (2, 3, 1)$ et $Q = (4, 5, 3)$ et pour le plan Π médiateur du segment PQ.

6. On considère les droites $\Delta_1\colon 2x - z - 8 = y + 3z - 3 = 0$ et $\Delta_2\colon x + 2z - 4 = 3y - z - 9 = 0$. Vérifiez que les deux droites se rencontrent et trouvez l'équation du plan qu'elles déterminent.
7. On considère la droite Δ passant par les points $(1, 2, 0)$ et $(4, 0, 1)$. Déterminez l'intersection de Δ avec le plan $\Pi_k\colon x + 2y + kz = 4$. Discutez d'après la valeur du paramètre k.
8. Soient $R = (4, 4, 4)$ et $S = (2, 2, 0)$.
   (a) Donnez l'équation de la sphère Σ centrée en M (milieu du segment RS) et qui contient S et R.
   (b) Donnez l'équation qui représente l'intersection entre Σ et le plan Oxy. De quel lieu géométrique s'agit-il ?
   (c) Calculez la projection orthogonale de M sur le plan Oxy. Comparez avec votre réponse à la question précédente.
9. Une ellipse a une excentricité $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et un sommet en $(2\sqrt{3}, 0)$. Donnez l'équation cartésienne par rapport au repère canonique.
10. On considère la courbe vérifiant les équations $x = 0$ et $y^2 + z^2 - 2yz - 4\sqrt{2}(y + z) = 0$. Montrez qu'il s'agit d'une parabole. Que deviennent ces équations si on modifie le repère par une rotation de $\frac{\pi}{4}$ autour de Ox dans le sens antihorlogique ?
11. Du point $P = (1, 0, 0)$ on émet un rayon lumineux en direction du point $(0, 0, 0)$. Ce rayon ce réfléchit suivant les lois de l'optique géométrique sur un miroir plan d'équation $x + y + z = 0$. Trouvez les coordonnées du point de percée du rayon réfléchi dans le plan d'équation $z = 4$.
12. (Juin 2001) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants
$$A = (1, 2, 3), \quad B = (3, 2, 2), \quad C = (5, 5, 6).$$
   (a) Donnez la longueur du segment joignant A et B.
   (b) Montrez que le triangle ABC est rectangle.
   (c) Donnez des équations cartésiennes de la droite passant par A et B.
   (d) On considère la droite $\Delta\colon x + y - z = 2x - 3y - 9 = 0$. Donnez l'équation du plan Π perpendiculaire à Δ passant par A. Ce plan contient-il le point B ?
13. (Juin 2004) Considérons le plan d'équation $\pi\colon 3x + y + 2 = 0$ et le point $P = (2, 2, 2)$.
   (a) Vérifiez que le point P n'appartient pas à π.
   (b) Calculez la projection orthogonale Q de P sur π.
   (c) Calculez la distance de P à π.
   (d) Donnez l'équation de la sphère Γ centrée en P et tangente à π.
14. (Septembre 2004) On considère le plan $\pi\colon 3x + 4z = 7$ dans $\mathbb{R}^3$. Déterminez l'équation des plans parallèles à π qui se trouvent à une distance égale à 5 de π.

11 Exemples d'examens

Janvier 2007

1. (a) Résolvez l'équation $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4}=0$.
   (b) Définissez la notion de “fonction injective”.
   (c) Donnez un exemple de fonction continue qui n'est ni injective, ni surjective. Justifiez votre réponse.
   (d) Énoncez un théorème garantissant l'intégrabilité d'une fonction f sur un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = |xy|$.
   (a) Calculez les dérivées partielles de f au point $(0, 0)$, si elles existent.
   (b) Montrez que pour x, $y \in \mathbb{R}$, on a $|xy| \leq (x^2 + y^2)$.
   (c) Donnez l'équation du seul plan tangent possible au graphe de f au point $(0, 0, 0)$.
   (d) Montrez que f a effectivement un plan tangent au point $(0, 0, 0)$. Justifiez votre réponse.
3. **BIR**
   (a) On considère, dans le plan OXY, la courbe
   $$\mathcal{C} \equiv 5x^2 + \alpha xy + 5y^2 - 40x - 24y + 48 = 0,$$
   où α est un paramètre réel. Déterminez la nature de $\mathcal{C}$ en fonction de la valeur de α.
   (b) On considère, dans $\mathbb{R}^3$, la sphère
   $$\mathcal{S} \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 8y - 4z + 27 = 0.$$
   • Déterminez le centre C et le rayon r de $\mathcal{S}$.
   • Déterminez l'équation paramétrique de la droite d passant par $O = (0, 0, 0)$ et C.
   • Trouvez le point P de $\mathcal{S}$ le plus éloigné de l'origine.
   • Donnez l'équation du plan π tangent à $\mathcal{S}$ en P.

   Sciences — Informatique

   (a) Calculez la limite suivante en justifiant chaque étape : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{(x^2)}-1}{\sin^2(x)}$.
   (b) On considère la région $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq \sqrt{3}, \frac{1}{1+x^2} \leq y \leq \frac{1}{x^2}\}$.
   Calculez $\displaystyle\int\int_D x\,dx\,dy$.
4. (a) Déterminez les extréma de la fonction $f(x) = x^2 - x$ dans l'intervalle $[0, 2]$.

   (b) Déduisez-en un intervalle dans lequel se trouve $\displaystyle\int_0^2 e^{x^2-x}dx$.

5. Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]0,1]$.
   (a) Définissez : "limite de f en 0 égale $+\infty$".
   (b) Supposons que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
   Montrez qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0,1]$, on a $f(x) \geq m$.

Juin 2007

1. A. On considère la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2}.$$

   (a) Indiquez le domaine de f.
   (b) Calculez $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$.
   (c) Donnez une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non constante, telle que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} g(f(x,y)) = 1$.

   B. On sait qu'une condition suffisante pour qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ soit bornée est qu'elle soit continue. Cette condition est-elle nécessaire ? Justifiez votre réponse.

2. (a) Calculez le polynôme de Taylor de degré 3 qui est le développement de la fonction $f(x) = \ln x$ autour du point $a = 1$.
   (b) Déterminez m pour que la fonction $f(x) = e^x - mx$ possède un minimum égal à zéro.
   (c) Calculez

$$\int\int_D xy\, dx\, dy,$$

   où $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq a^2 \text{ et } (x-a)^2+y^2 \leq a^2\}$.
   Suggestion : Intégrez d'abord par rapport à y.

3. **Sciences — Informatique**
   On considère la fonction $f(x,y) = e^{x-y} + \cos(x+y^2)$.
   (a) Déterminez les dérivées partielles d'ordre 1 : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
   (b) Déterminez la dérivée partielle d'ordre 2 : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$.
   (c) Donnez le gradient de f au point $(0,0)$.

   BIR
   Soit les points $P = (0,1,1)$ et $Q = (1,0,0)$.
   (a) Déterminez les coordonnées du point M, milieu du segment reliant P à Q.

(b) Déterminez les équations paramétriques de la droite Δ qui contient les points P et Q.

(c) Donnez l'équation cartésienne du plan Π perpendiculaire à Δ et qui contient le point M.

(d) Donnez la distance du point P au plan Π.

4. Soient $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in D$ un point intérieur.

   (a) Écrivez la définition de "*f est différentiable en* (x_0, y_0)".

   (b) Démontrez que si f est différentiable en (x_0, y_0), alors f est continue en (x_0, y_0).

   (c) Démontrez que la réciproque est fausse en général.

5. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique s'il y a un nombre $T > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   (a) Démontrez par récurrence que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique, alors pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x + nT)$.

   (b) Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique, telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, et soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrez que pour tout $\varepsilon > 0$, $|f(a) - L| \leq \varepsilon$.

   Indication : Appliquez la définition de la limite en considérant un point $x = a + nT$, où n est assez grand.

   (c) Déduisez de l'affirmation (b) que f est constante.

Septembre 2007

1. (a) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Définissez l'expression $\lim_{x\to+\infty} f(x) = c$.

   (b) Donnez un exemple d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que

   $$\lim_{x\to 0} f(x) \text{ n'existe pas,} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -2 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1.$$

   (c) Énoncez le théorème des valeurs intermédiaires.

2. (a) Calculez la dérivée de la fonction $f(x) = \exp(3 + \exp(4x))$.

   (b) Soit f une fonction dérivable au point a. Déterminez $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

   $$\alpha f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{h}.$$

   (c) Calculez par substitution une primitive de la fonction $f(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$.

3. **Sciences — Informatique**

   (a) Étudiez l'existence de la limite suivante

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

(b) Soit la fonction définie par $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.
   (i) Donnez le domaine de définition de la fonction f.
   (ii) Donnez l'équation de la courbe de niveau à hauteur 2 de f.
   Décrivez géométriquement cette courbe.
   (iii) Montrez que
$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 1.$$

BIR

(a) Étudiez l'existence de la limite suivante
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

(b) Montrez que la droite qui passe par $(0,1,1)$ et $(1,-1,6)$ est orthogonale à la droite qui passe par $(-4,2,1)$ et $(-1,6,2)$.

(c) Trouvez les coordonnées du point B obtenu en projetant le point $A = (2,1,0)$ sur le plan $x+2y-2z = 3$, parallèlement au vecteur $\vec{v} = (0,4,2)$.

4. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}_0$.
   (a) Démontrez la propriété suivante :
$$(\exists a \in [0,1]) : f\,(a) = a^n.$$
   (b) En supposant que f est strictement décroissante, démontrez que le nombre a est unique.

5. On considère dans $\mathbb{R}^2$ le triangle D de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,2)$ et la fonction bornée $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{aligned} f(x,y) &= \tfrac{x^2\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0). \\ f(0,0) &= \quad 0. \end{aligned}$$
   (a) Expliquez pourquoi f est intégrable sur D.
   (b) Écrivez les deux manières de calculer l'intégrale de f sur D puis effectuez le calcul en choisissant l'une de ces manières.