Représenter et agréger des préférences à l'aide d'une interprétation markovienne

François Glineur

Faculté Polytechnique de Mons

LAMSADE, séminaire MCAD

Université Paris-Dauphine

16 novembre 1999

Plan

Introduction

- ◇ Chaînes de Markov
- ◇ Relations de préférence

Méthode stochastique

- ◇ Une relation de préférence
- ◇ Cas multicritère
- ◇ Introduire de l'incomparabilité

Illustrations

- ◇ Quelques relations de préférence
- ◇ Localisation d'usine

Conclusions

Chaînes de Markov

Définitions

$\mathbf{E}$ = ensemble de n états = $\{E_i\}$

$\mathbf{X}$ = ensemble de variables aléatoires = $\{X_t\}$ où t est un index temporel discret et $X_t \in \mathbf{E}$

$\mathbf{X}$ est une *chaîne de Markov* discrète à temps fini ssi

- X_t dépend uniquement de X_{t-1} (processus *markovien*, sans mémoire)
- Cette dépendance est invariante dans le temps (processus *homogène*)

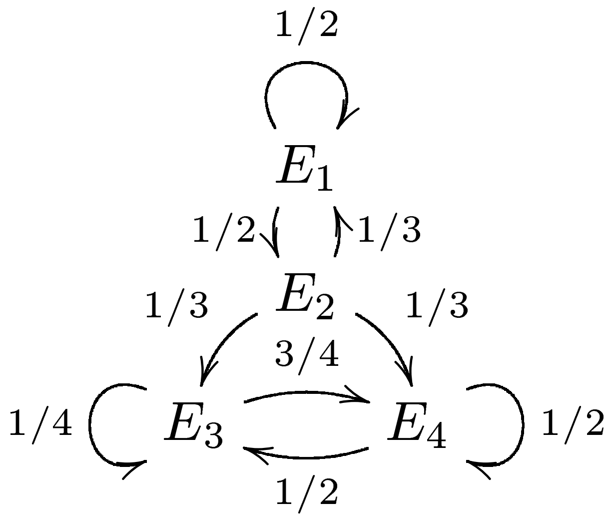
$\mathbf{X}$ est complètement défini par la matrice $\mathbf{M} = \{p_{i,j}\}$ où

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(X_t = E_j \mid X_{t-1} = E_i)$$

Représentation comme un *graphe orienté valué* (sommets $\equiv$ états, arcs $\equiv$ transitions)

Exemples et propriétés

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



$\mathbf{M}$ est une matrice stochastique (somme des lignes égale à 1)

Soit a_0 la distribution de probabilité initiale (correspondant à la v.a. X_0)

1. Il est possible de calculer a_i (distribution de X_i) récursivement à partir de a_{i-1} $\forall i$
2. La suite $\{a_i\}$ tend vers une limite a indépendamment de la distribution initiale a_0 (sous une hypothèse de *régularité*)
3. Cette limite a est appelée *distribution stationnaire*, et peut être calculée efficacement (système linéaire)

Dans l'exemple, $a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

Relations de préférence

Définitions

$\mathbf{A}$ = ensemble de n alternatives $= \{A_i\}$

$\mathcal{R}$ = relation binaire sur $\mathbf{A}$ ($\subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{A}$)

Soit $a, b, c \in \mathbf{A}$. La relation $\mathcal{R}$ est

- ◇ *réflexive* si $a \mathcal{R} a$
- ◇ *complète* si $a \mathcal{R} b$ ou $b \mathcal{R} a$
- ◇ *symétrique* si $a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$
- ◇ *asymétrique* si $a \mathcal{R} b \Rightarrow b \neg\mathcal{R} a$
- ◇ *transitive* si $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} c$

On donne à la relation $\mathcal{R}$ la signification $\leq$:

$\boxed{a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a \text{ n'est pas préféré strictement à } b}$

$\mathcal{I} \equiv$ la partie indifférence" de $\mathcal{R}$, définie par

$\boxed{a \mathcal{I} b \Leftrightarrow a \mathcal{R} b \text{ et } b \mathcal{R} a}$

$\mathcal{S} \equiv$ la partie "préférence stricte" de $\mathcal{R}$, définie par $\boxed{a \mathcal{S} b \Leftrightarrow a \mathcal{R} b \text{ et } b \neg\mathcal{R} a}$

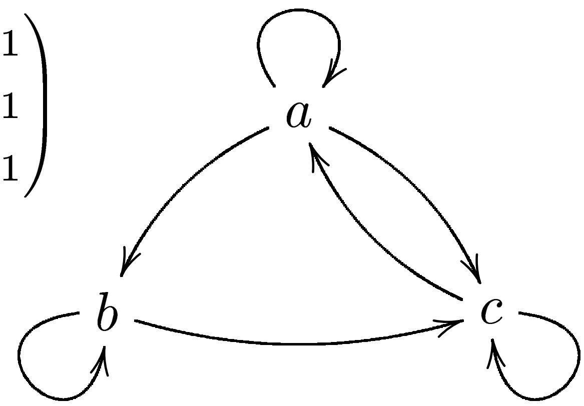
$\mathcal{R} = \mathcal{I} \cup \mathcal{S}$, $\mathcal{I}$ est symétrique et réflexive, $\mathcal{S}$ est asymétrique

Représentations et exemples

- Représentation matricielle $\{r_{i,j}\}$ avec $r_{i,j}$ égal à 1 si $A_i \mathcal{R} A_j$, 0 sinon
- Représentation comme un *graphe orienté* (sommets $\equiv$ alternatives, arcs $\equiv$ relation $\mathcal{R}$)

Par exemple, $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{R} = \{(a, c), (c, a), (a, b), (b, c), (a, a), (b, b), (c, c)\}$ est réflexive et complète

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Quelques relations de préférence

Soit $\mathcal{R}$ une relation complète et réflexive

- Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{I}$ sont tous les deux transitives, $\mathcal{R}$ est un *préordre complet* (ordre avec ex-aequo).

  On peut associer à chaque alternative une valeur v_i telle que

$$A_i \; \mathcal{R} \; A_j \Leftrightarrow v_i \leq v_j$$

- Si $\mathcal{S}$ est transitive et $\mathcal{I} = \{(a, a)\} \; \forall a \in \mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ est un *ordre complet* (sans ex-aequo).

  On peut associer à chaque alternative une valeur *distincte* v_i telle que

$$A_i \; \mathcal{R} \; A_j \Leftrightarrow v_i \leq v_j$$

◇ Si on peut associer à chaque alternative un intervalle de la droite réelle $U_i = [v_i \ v_i']$ tel que

$$A_i \ \mathcal{I} \ A_j \Leftrightarrow U_i \cap U_j \neq \emptyset$$

et

$$A_i \ \mathcal{S} \ A_j \Leftrightarrow v_i' < v_j \ ,$$

$\mathcal{R}$ est un *ordre d'intervalle* (complet).

$\mathcal{S}$ est transitive mais $\mathcal{I}$ ne l'est pas.

◇ Si on peut associer à chaque alternative un intervalle de la droite réelle $U_i = [v_i \ v_i']$ tel que

$$A_i \ \mathcal{I} \ A_j \Leftrightarrow U_i \cap U_j \neq \emptyset \ ,$$

$$A_i \ \mathcal{S} \ A_j \Leftrightarrow v_i' < v_j$$

et si aucun intervalle n'est inclus strictement dans un autre, $\mathcal{R}$ est un *semiordre* (complet).

$\mathcal{S}$ est transitive mais $\mathcal{I}$ ne l'est pas.

Quelques exemples

◇ Ordre complet $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{———}\ a\ \text{———}\ b\ \text{———}\ c\ \text{——}\!\!\longrightarrow$$

◇ Préordre complet $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{———}\ a\ \text{———}\ b, c\ \text{————}\!\!\longrightarrow$$

◇ Ordre d'intervalle $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$- \{ - [\overset{a}{-}] - [\overset{b}{-}] - [\overset{c}{-}] - \underset{d}{\}} \longrightarrow$$

◇ Semiordre $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$- [\overset{a}{-}] - [\overset{b}{-} \{ -] - [- \underset{d}{\}} \overset{c}{-}] \longrightarrow$$

Théorèmes

Soit $\mathcal{R}$ une relation de préférence sans *alternatives équivalentes* (a et b sont équivalentes ssi $a \mathcal{R} x \Leftrightarrow b \mathcal{R} x$ et $x \mathcal{R} a \Leftrightarrow x \mathcal{R} b \; \forall x \in \mathbf{A}$)

- ◇ Si $\mathcal{R}$ est un semiordre, il existe un *unique ordre complet* sous-jacent à $\mathcal{R}$. Il s'agit de l'ordre des nombres $\{v_i\}$ (ou $\{v_i'\}$). De plus, si on ordonne les lignes et les colonnes de la représentation matricielle de $\mathcal{R}$ selon cet ordre, on obtient une matrice échelonnée.
- ◇ Si $\mathcal{R}$ est un ordre d'intervalle, il existe *deux* ordres complets sous-jacent à $\mathcal{R}$. De plus, si on ordonne les lignes (et les colonnes) de la représentation matricielle de $\mathcal{R}$ selon le premier (et le second) de ces ordres, on obtient aussi une matrice échelonnée.

◇

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est une *matrice échelonnée*

Méthode stochastique

Une relation de préférence

Soit $\mathcal{R}$ une relation de préférence complète et réflexive. Nous procédons comme suit :

1. *Construction d'une chaîne de Markov* : Associer un état E_i à chaque alternative A_i
2. *Choisir les probabilités de transition*, en respectant les conditions suivantes
   - ◇ $p_{i,j} > 0$ si $A_i \; \mathcal{R} \; A_j$
   - ◇ $p_{i,j} = 0$ si $A_i \; \neg\mathcal{R} \; A_j$
   - ◇ La matrice $\{p_{i,j}\}$ est stochastique
3. *Calculer la distribution stationnaire* et classer les alternatives selon les probabilités résultantes

Justification

Intuitivement, ce processus ne peut passer que d'une alternative à une alternative préférée (ou équivalente). Il est donc raisonnable de penser que les *meilleures* alternatives auront une forte probabilité dans la distribution stationnaire.

Choix des $\{p_{i,j}\}$

Objectif : valeur de $p_{i,j}$ indépendante des alternatives autres que A_i et A_j

$\boxed{\text{Si } A_i \mathcal{R} A_j\text{, poser } p_{i,j} = \frac{1}{n}\text{, sinon poser } p_{i,j} = 0}$

Mais $\mathbf{M}$ n'est pas nécessairement stochastique $\Rightarrow$ modifier $p_{i,i}$ selon

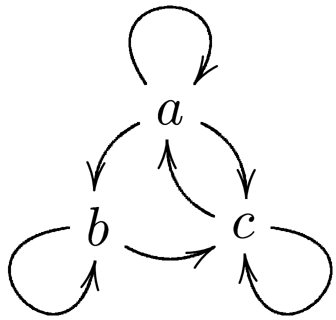
$$p_{i,i} = 1 - \sum_{j \neq i} p_{i,j}$$

Avec ce choix, le processus de Markov peut être interprété comme suit :

1. Je suis à l'état E_i
2. Choisir au hasard un état E_j (de façon équiprobable)
3. Si $A_i \mathcal{R} A_j$, passer à l'état E_j, sinon rester en E_i

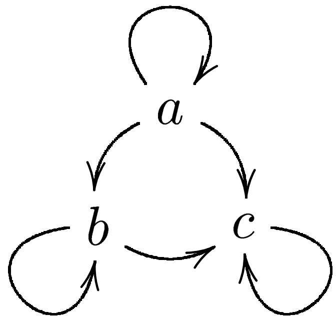
Exemples

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donne } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



La distribution stationnaire est $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$: c est en tête, a et b suivent.

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donne } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



La distribution stationnaire est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: c est en tête *mais* nous n'avons plus d'information distinguant les autres alternatives (impossible de quitter l'état c)

Amélioration du choix des $\{p_{i,j}\}$

Ajoutons un *état fictif neutre* E_0, ne représentant aucune alternative, tel que $p_{0,0} = 0$ et $p_{0,i} = \frac{1}{n}$. Les transitions depuis cet état ne favorisent aucune alternative. Nous gardons la règle

$$\boxed{\text{Si } A_i \mathcal{R} A_j\text{, poser } p_{i,j} = \tfrac{1}{n}\text{, sinon poser } p_{i,j} = 0}$$

mais choisissons les $p_{i,0}$ pour rendre la matrice stochastique, i.e.

$$p_{i,0} = 1 - \sum_{j \neq 0} p_{i,j}$$

Avec ce choix, le processus de Markov peut être interprété comme suit :

1. Je suis à l'état E_i
2. Choisir au hasard un état E_j (de façon équiprobable)
3. Si $A_i \; \mathcal{R} \; A_j$, passer à l'état E_j, sinon passer à l'état neutre E_0

Exemples

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donne } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

La distribution stationnaire est $\begin{pmatrix} \frac{7}{27} & \frac{6}{27} & \frac{9}{27} & \frac{5}{27} \end{pmatrix}$: c est en tête, b est le moins bon

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donne } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

La distribution stationnaire est $\begin{pmatrix} \frac{4}{27} & \frac{6}{27} & \frac{9}{27} & \frac{8}{27} \end{pmatrix}$: c est en tête, a est le moins bon

Propriété

Si $\mathcal{R}$ est un préordre complet, les probabilités de la distribution stationnaire sont correspondent à ce préordre

Cas multicritère

$\mathbf{R}$ = ensemble de relations de préférence $\{\mathcal{R}_i\}$ où chaque $\mathcal{R}_i$ est complète et réflexive. Ces relations sont pondérées par des poids $\{w_i\}$ de somme égale à 1.

$\mathbf{M}_i$ = matrice stochastique pour chaque $\mathcal{R}_i$ (calculée comme ci-dessus). Soit

$$\mathbf{M} = \sum_i w_i \mathbf{M}_i$$

$\mathbf{M}$ est aussi stochastique et décrit une chaîne de Markov. Nous classons les alternatives selon les probabilités résultant de la distribution stationnaire.

1. Je suis à l'état E_i
2. Choisir au hasard une relation $\mathcal{R}_p$ (selon les poids $\{w_i\}$)
3. Choisir au hasard un état E_j (de façon équiprobable)
4. Si $A_i \ \mathcal{R} \ A_j$, passer à l'état E_j, sinon passer à l'état neutre E_0

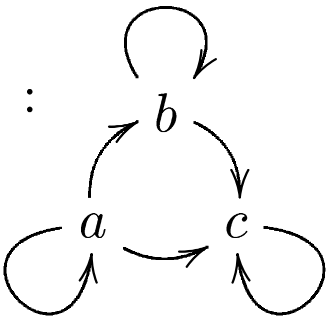
Exemples

$r = 2, w_1 = \frac{1}{3}$ et $w_2 = \frac{2}{3}$

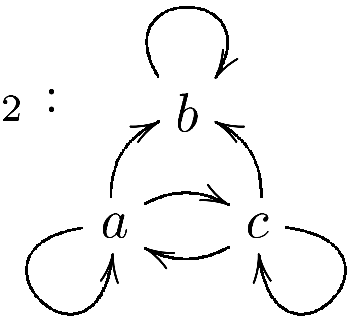
$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{R}_1$:



$\mathcal{R}_2$:



La distribution stationnaire est $\begin{pmatrix} \frac{16}{79} & \frac{24}{79} & \frac{21}{79} & \frac{18}{79} \end{pmatrix}$: b est en tête, a est le moins bon

Ajouter l'incomparabilité

Motivation

Au vu du *théorème d'Arrow*, il est illusoire d'espérer de bonnes propriétés d'une méthode d'analyse multicritère produisant un préordre complet.

$\Rightarrow$ Affaiblir la relation produite par notre méthode

Pas de distinction entre $A_i \, \mathcal{S} \, A_j$ et $A_i \, \mathcal{I} \, A_j$ (indifférence et préférence stricte)

Quand A_i et A_j sont indifférents, choisir quelque chose de moins radical que $p_{i,j} = \frac{1}{n}$:

- ◇ Si $A_i \, \mathcal{S} \, A_j$, poser $p_{i,j} = \frac{1}{n}$
- ◇ Si $A_i \, \mathcal{I} \, A_j$, poser $p_{i,j} = \frac{\alpha}{n}$
- ◇ Sinon let $p_{i,j} = 0$

où α est un *paramètre* à choisir entre 0 et 1

Le processus de Markov peut à présent être interprété comme suit :

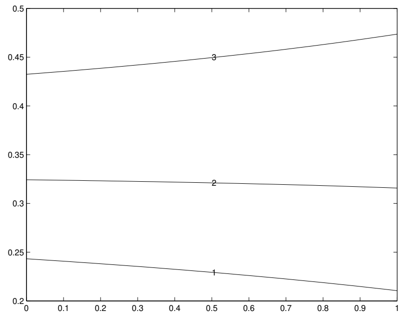
1. Je suis à l'état E_i
2. Choisir au hasard une relation $\mathcal{R}_p$ (selon les poids $\{w_i\}$)
3. Choisir au hasard un état E_j (de façon équiprobable)
   - ◇ Si $A_i\ \mathcal{S}_p\ A_j$, passer à l'état E_j
   - ◇ Si $A_i\ \mathcal{I}_p\ A_j$, passer à l'état E_j avec une probabilité α ou à l'état neutre E_0 avec une probabilité $1 - \alpha$
   - ◇ Sinon, passer à l'état neutre E_0

Utiliser cette famille de préordres complets paramétrée par α pour construire une *relation partielle* :

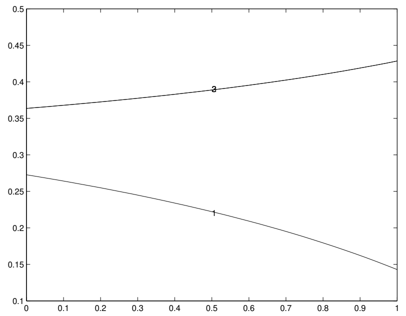
- ◇ Si A_i est meilleur que A_j pour toutes les valeurs de α, déclarer $A_i > A_j$
- ◇ Si A_i est moins bon que A_j pour toutes les valeurs de α, déclarer $A_i < A_j$
- ◇ Sinon, déclarer A_i et A_j incomparables

Exemples

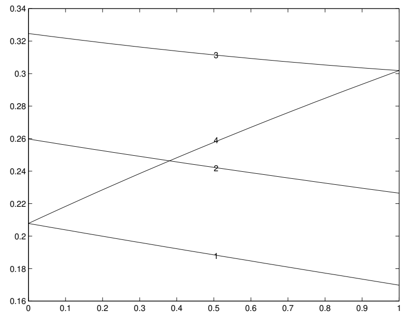
Ordre complet



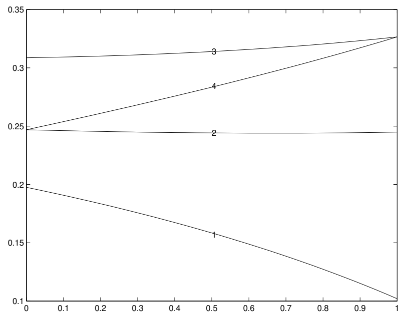
Préordre complet



Ordre d'intervalle



Semiordre



Propriétés

Si $\mathcal{R}$ est un préordre complet, le rangement obtenu est conforme à $\mathcal{R}$ $\forall\alpha \in [0\ 1]$

Si $\mathcal{R}$ est un semiordre, le rangement obtenu correspond à l'unique ordre complet sous-jacent $\mathcal{R}$ $\forall\alpha \in]0\ 1[$

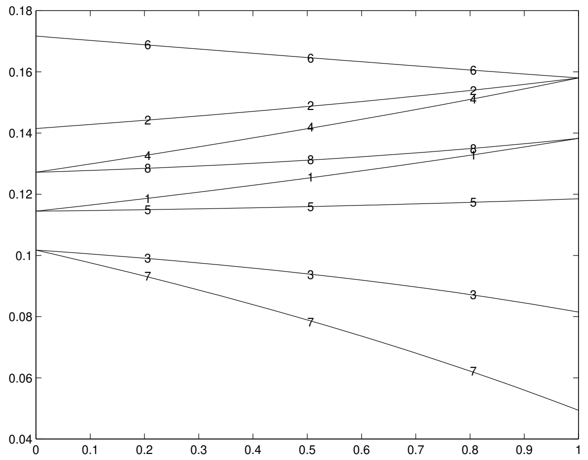
Si $\mathcal{R}$ est un ordre d'intervalle, les rangements obtenus pour α tendant vers 0 et 1 correspondent aux deux ordres complets sous-jacents à $\mathcal{R}$ $\Rightarrow$ il y a au moins un cas d'incomparabilité

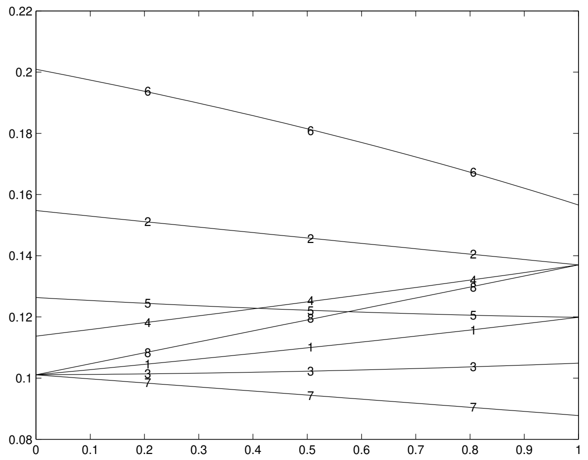
Utilisation

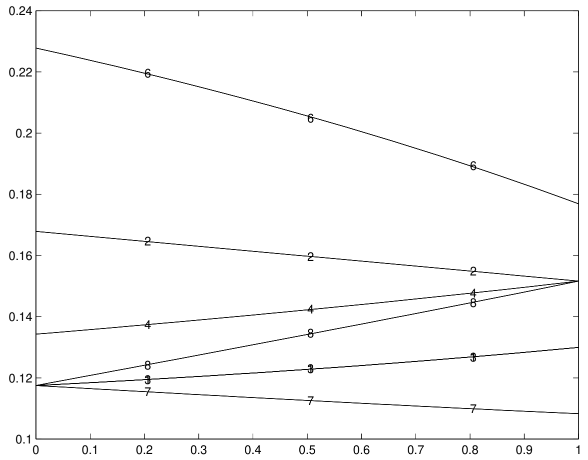
Si on doit sélectionner une seule alternative, choisir parmi toutes celles se trouvant en tête pour au moins une valeur de α (celles-ci étant incomparables entre elles)

Plus un *croisement* est proche de 0 ou 1, moins l'incomparabilité associée est prononcée

Illustrations - Semiordres

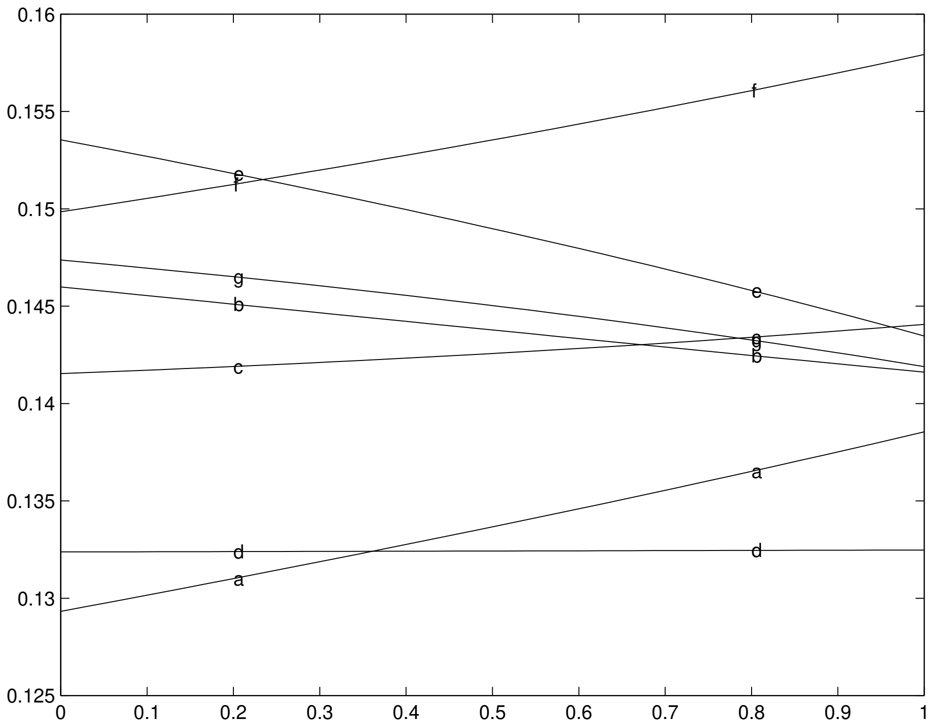






Localisation d'usine

- ◇ 5 critères numériques : Prix, Transport, Environnement, Résidents, Compétition
- ◇ Utilisation de seuils pour calculer un semiordre pour chaque critère



Conclusions

Méthode stochastique

- ◇ Principe intuitif
- ◇ Résultats graphiques
- ◇ Pas de paramètre à fixer
- ◇ Implémentation aisée

Analyse multicritère

- ◇ Généralisation naturelle
- ◇ Analyse de sensibilité facile à réaliser
- ◇ Exploitation d'information cardinale possible

Perspectives

- ◇ Propriétés théoriques (indépendance)
- ◇ Relations valuées