FRANÇOIS GLINEUR

ETUDE DES METHODES DE POINT INTERIEUR APPLIQUEES A LA PROGRAMMATION LINEAIRE ET A LA PROGRAMMATION SEMIDEFINIE

Service de Mathématiques et
de Recherche Opérationnelle

5ème Informatique & Gestion
Année académique 1996-1997

Promoteurs
Professeur J. TEGHEM
Docteur D. TUYTTENS

'What's new?' is an interesting and broadening eternal question, but one which, if pursued exclusively, results only in an endless parade of trivia and fashion, the silt of tomorrow. I would like, instead, to be concerned with the question *'What is best?'*, a question which cuts deeply rather than broadly, a question whose answers tend to move the silt downstream.

Robert M. Pirsig, 1974

PRELIMINAIRES

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE (~1939)

Modélisation → meilleure(s) décision(s)
Meilleure → optimiser un critère numérique

PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE

$\min f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D \subseteq \Re^n$

D défini par $g_i(\mathbf{x}) = 0$ et $h_j(\mathbf{x}) \geq 0$

PROGRAMMATION LINÉAIRE

Algorithme du simplexe (Dantzig, 1947)
Méthodes de point intérieur (Karmarkar, 1984)

- Avantages en théorie et en pratique
- Adaptables au cas non-linéaire

OBJECTIF

- Résumer la littérature (plus de 3000 références)
- Donner un aperçu de ces nouvelles méthodes (théorie, implémentations, applications)

PLAN

PRÉLIMINAIRES

PROGRAMMATION LINÉAIRE *[JAN95, WRI96]*

- Rappels
- Méthodes de point intérieur *[ARB91]*
- Démarche de conception
- Classification des méthodes *[FRE96]*
- Implémentation *[GON94, AND96]*
- Résultats numériques *[AND96]*

PROGRAMMATION SEMIDÉFINIE *[VAN96]*

- Présentation
- Applications

IMPLÉMENTATION : CLASSIFICATION PAR ELLIPSOÏDES

- Problème posé
- Implémentation et résultats

CONCLUSIONS

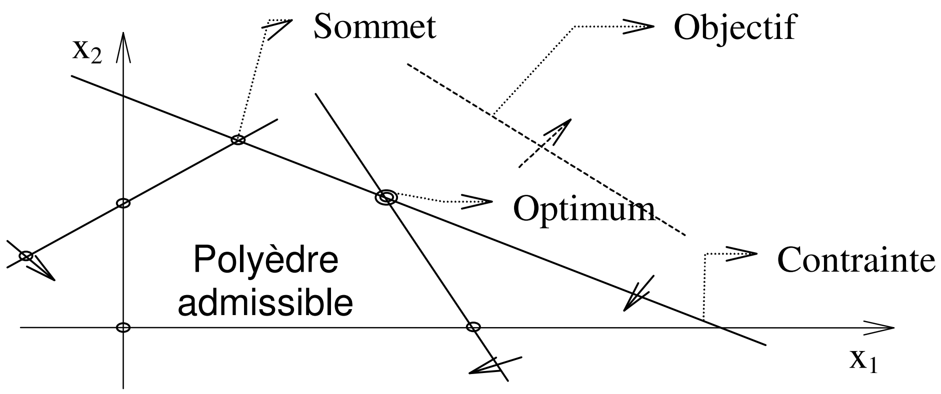
RAPPELS

PROGRAMME LINÉAIRE

$$\min c^T x, \quad x \in \Re^n$$
$$\text{avec } \mathrm{A}x \geq b \text{ et } x \geq 0$$

Données : vecteurs b, c $\in \Re^n$; matrice A $\in \Re^{mxn}$
n variables, un objectif, m contraintes

SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE



ALGORITHME DU SIMPLEXE

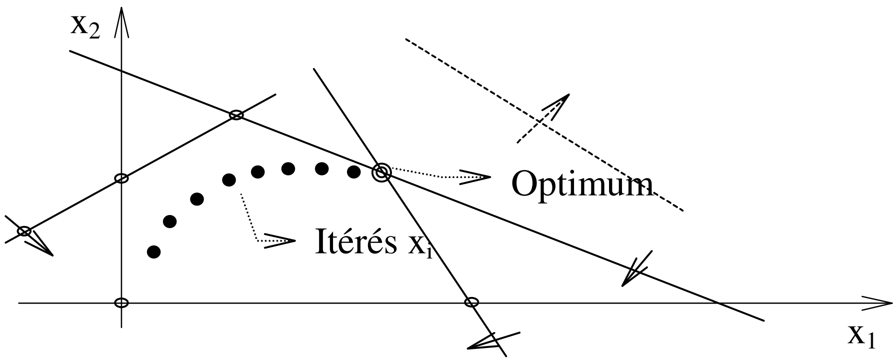
Caractérisation algébrique des sommets
Méthode itérative
Passage d'un sommet à un sommet adjacent
- Simple à calculer (opérations élémentaires)
- Avec une valeur plus petite de l'objectif

S'arrête après un nombre fini d'itérations

METHODES DE POINT INTERIEUR

PRINCIPE

Itéré = point *intérieur* au polyèdre
Convergence vers une solution optimale



CONSTATATIONS

- Solution approchée
- Type de solution différent
- Avantage théorique : complexité algorithmique

COMPLEXITÉ ALGORITHMIQUE

BUT : borner le *temps d'exécution* en fonction de la *taille* du problème ; ordre de grandeur

Complexité *de pire cas* ≠ Complexité *moyenne*

	Simplexe	Point intérieur
Pire cas	Exponentielle (2^n)	Polynomiale ($\sqrt{n}$)
Moyenne	Polynomiale (m+n)	Polynomiale (log n ?)

Complexité en nombre d'itérations

DEMARCHE DE CONCEPTION

Reconstitution d'un cheminement logique

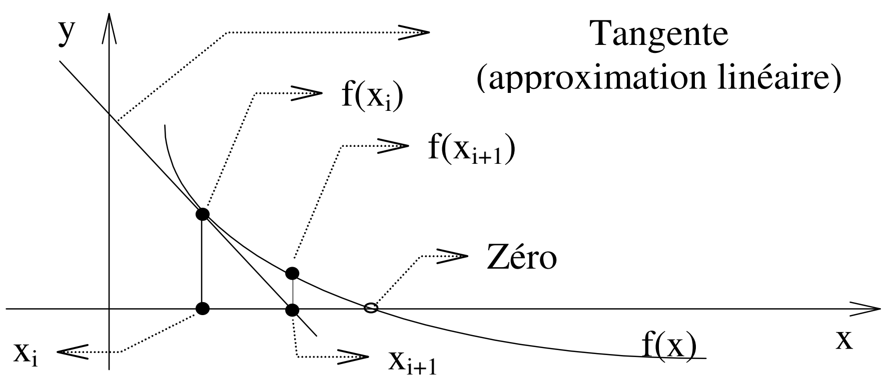
PREMIÈRE IDÉE

Problème d'optimisation → système d'équations
Conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker (nécessaires et suffisantes)

$$\begin{array}{l} \min c^T x, \quad x \in \Re^n \\ \text{avec } Ax = b \text{ et } x \geq 0 \end{array} \Leftrightarrow \text{Trouver (x,y,s)} \left| \begin{cases} A^T y + s = c \\ Ax = b \\ x_i s_i = 0 \ \forall i \\ x \geq 0 \text{ et s} \geq 0 \end{cases} \right.$$

SECONDE IDÉE

Système modérément non-linéaire → résolution par la *méthode de Newton*.



TROISIÈME IDÉE

Tenir compte des contraintes x≥0 à l'aide d'une *fonction barrière* Φ de $\Re \to \Re$ telle que

$$\lim_{x \to 0} \Phi(x) = +\infty, \text{ par exemple } \Phi(x) = -\ln(x)$$

Remplacer l'objectif $c^T x$ par $c^T x - \mu \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$

Conséquences

- Famille de problèmes paramétrée par μ
- Chaque valeur de μ → un optimum différent x(μ)
- Si μ → 0, x(μ) → la solution optimale
- L'ensemble { x(μ) | μ > 0 } est appelé chemin central. Il conduit vers la solution optimale en évitant au mieux les contraintes x≥0
- Le système à résoudre par la méthode de Newton devient

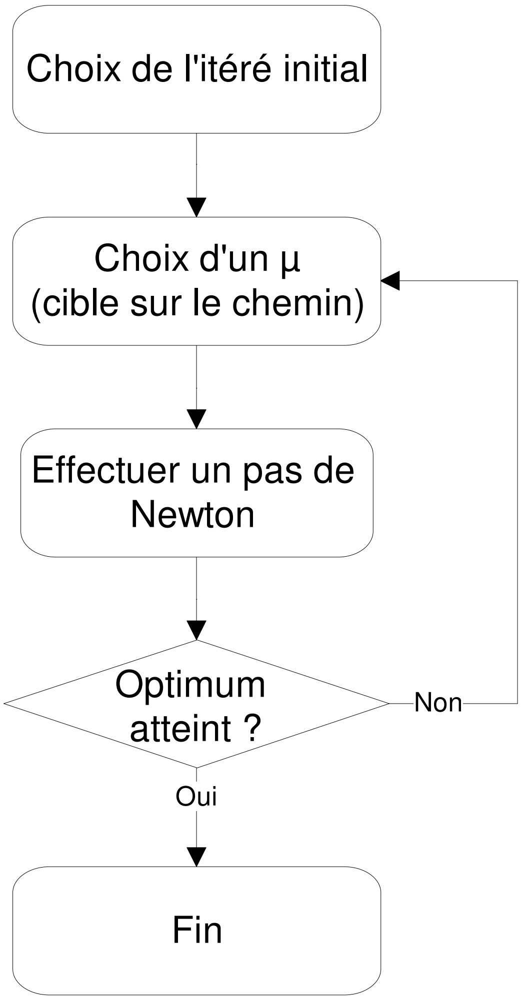
$$\begin{cases} A^T y + s = c \\ Ax = b \\ x_i s_i = \mu \ \forall i \\ x > 0 \text{ et } s > 0 \end{cases}$$

EN RÉSUMÉ

1) Optimisation → Equations par KKT
2) Résoudre avec la méthode de Newton
3) Fonction barrière ln(x) pour les contraintes

CLASSIFICATION DES METHODES

SCHÉMA DE BASE

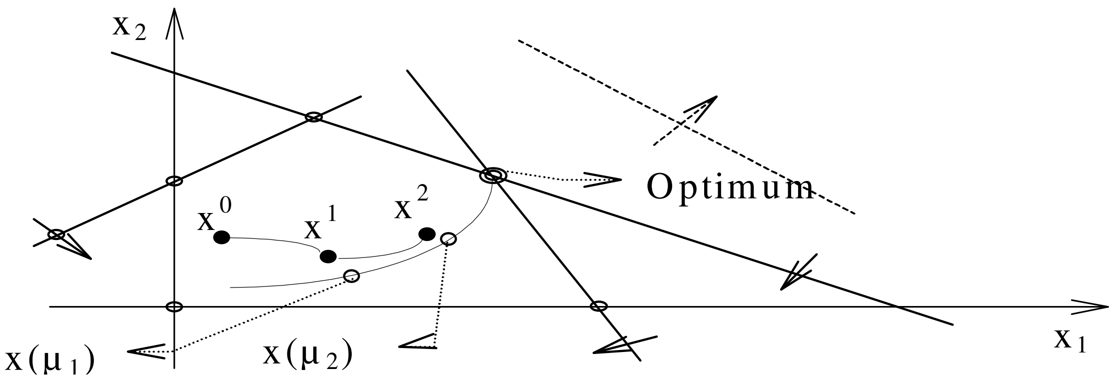


DIFFÉRENCES

- **Itéré**
  Primal
  Dual
  Primal-Dual (symétrie)

- **Choix du μ**
  $\mu = 0$
  Selon chemin central
  Fonction potentiel

- **Type d'itéré initial**
  Intérieur
  Quelconque



IMPLEMENTATION

ETAT DE L'ART

Méthodes primales-duales à suivi de chemin, point de départ quelconque.

COMMENT COMMENCER ?

Choix de $x_0 \rightarrow$ méthode heuristique

QUAND S'ARRÊTER ?

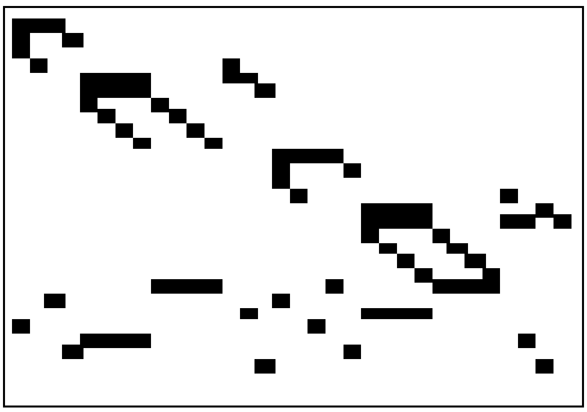
Différence entre objectifs primal et dual < ε

DÉTERMINATION DU PAS DE NEWTON

Résolution d'un système linéaire

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_c \\ -r_b \\ \tau e - XSe \end{bmatrix}$$

Etape la plus importante (> 90% temps calcul)
Grands problèmes ⇒ A possède peu d'éléments ≠ 0



⇒ Utilisation de routines d'algèbre linéaire adaptées (factorisation de Cholevsky ou de Bunch-Partlett)

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Collection standard de problèmes : NETLIB
Format de données standard : MPS *(Mathematical Programming System*, IBM)

POINT INTÉRIEUR CONTRE SIMPLEXE

Dépend de la taille du problème :

- n+m < 2000 → Simplexe plus rapide
- 2000 < n+m < 10 000 → Dépend du problème
- n+m > 10 000 → Méthodes de point intérieur plus rapides (pour les plus grands problèmes : simplexe impraticable)

DOMAINE PUBLIC ET LOGICIELS COMMERCIAUX

Domaine public
BPMPD, HOPDM, LIPSOL, LOQO, PCx
Commercial
CPLEX/Barrier, XPRESS-MP, OSL (IBM)

Méthodes primales-duales à suivi de chemin et point de départ quelconque.

Pas de différence significative de performance entre ces logiciels.

PROGRAMMATION SEMIDEFINIE

CHOIX

- Cas particulier de programmation non-linéaire
- Théorie adaptée depuis le cas linéaire
- Nombreuses applications, très étudié

FORMULATION

$$\begin{aligned}&\min\ C \bullet X\\&\text{avec } A_i \bullet X = b_i \text{ et } X \geq 0\\&\text{où } X \in S^n \text{ et } i = 1,2,\ldots,m\end{aligned} \qquad \left(\begin{aligned}&\min c^T x\\&\text{avec } Ax = b \text{ et } x \geq 0\\&\text{où } x \in \Re^n\end{aligned}\right)$$

Données : vecteur $b \in \Re^n$; matrices $C, A_i \in \Re^{nxn}$
n^2 variables, un objectif, m contraintes

PARALLÈLE AVEC LE CAS LINÉAIRE

Vecteur $x \in \Re^n$	Matrice symétrique $X \in S^n$
Produit scalaire $x^T y$	Produit $X \bullet Y = \mathrm{trace}(X^T Y)$
Contrainte $x \geq 0$	Contrainte $X \geq 0$ (signifie X semidéfinie positive)

- X diagonale $\Rightarrow$ programmation linéaire
- Tous les concepts se généralisent
  - Conditions KKT, fonction barrière, chemin central, méthode de Newton
  - Algorithmes transposés directement
  - Système linéaire (Newton) à modifier

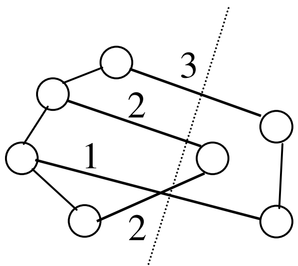
APPLICATIONS

MODÉLISATION EXACTE

- Problèmes de valeurs propres
- Régression logarithmique
- Problèmes géométriques (formes quadratiques)
- Conception d'un contrôleur de bruit actif
- Minimisation de la constante de temps dominante d'un circuit RC

RELAXATIONS

- Programmation quadratique (convexification)
- Problème MAX-CUT : coupe de valeur maximale dans un graphe valué



CUT = 3+2+1+2 = 8

Donne la solution optimale à 14% près

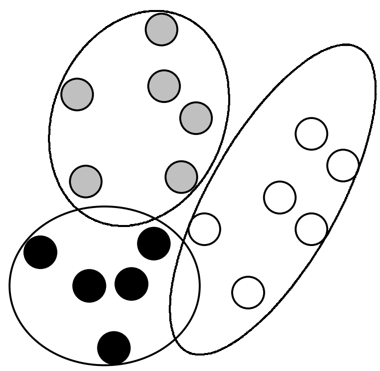
- Partition de graphes
- Cliques et ensembles stables
- Knapsack quadratique

CLASSIFICATION PAR ELLIPSOÏDES

PROBLÈME POSÉ

- N individus, répartis en k sous-ensembles $S_1, \ldots, S_k$
- Individu ≡ d caractéristiques réelles, $\in \Re^d$

- Trouver k ellipsoïdes $E_1, \ldots, E_k$ dans l'espace $\Re^d$
  tels que les individus de S_i appartiennent à E_i
  aucun autre individu n'appartient à E_i
  les E_i sont les plus sphériques possibles



APPLICATION À LA CLASSIFICATION

- Définir k classes, trouver des représentants
- Calcul des k ellipsoïdes séparateurs
- Classification d'autres individus

EXEMPLES

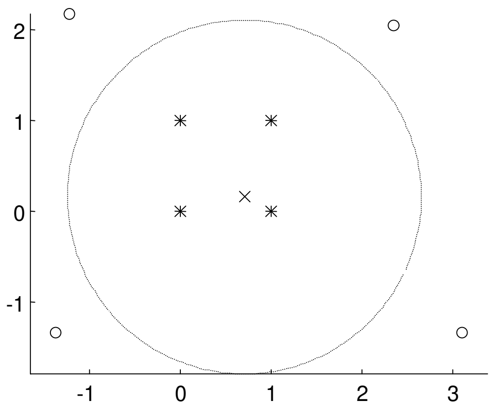
- Reconnaissance de caractères
- Prédiction du type temps (à l'aide des pressions atmosphériques en différents lieux)
- Analyse d'électrocardiogrammes (diagnostic de déficiences)

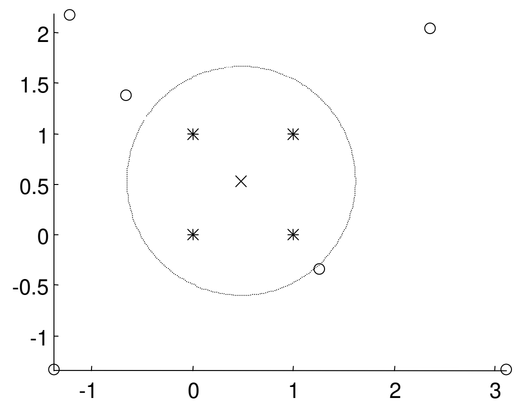
IMPLEMENTATION ET RESULTATS

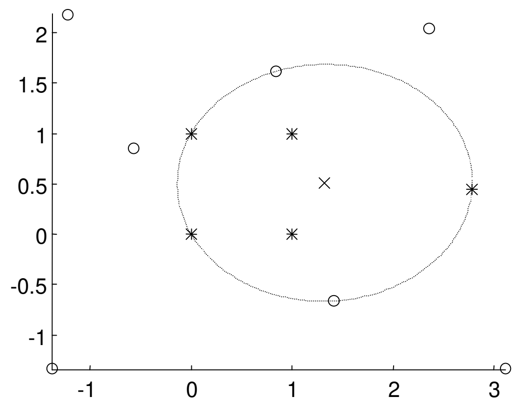
APPROCHE

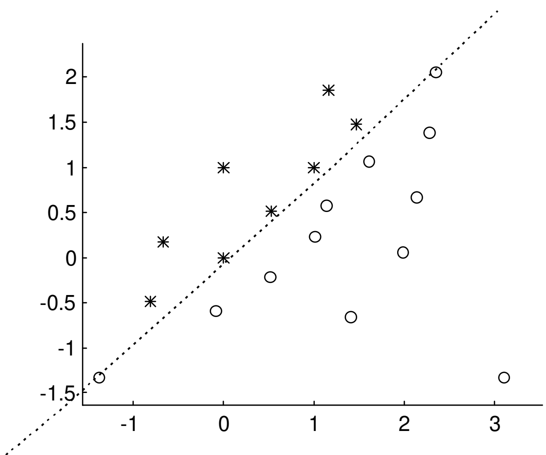
Décomposition en k sous-problèmes (un/ellipsoïde)
Formulation semidéfinie du problème de séparation
Utilisation d'une librairie existante sous Matlab

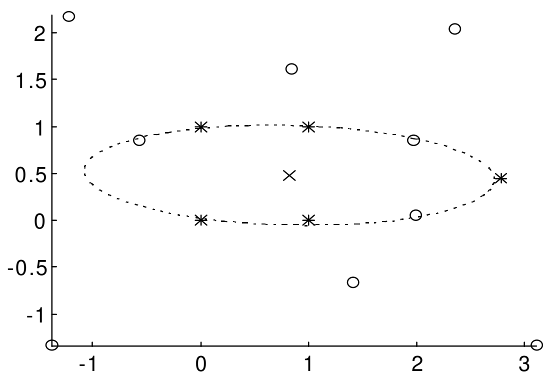
TESTS VISUELS À DEUX DIMENSIONS





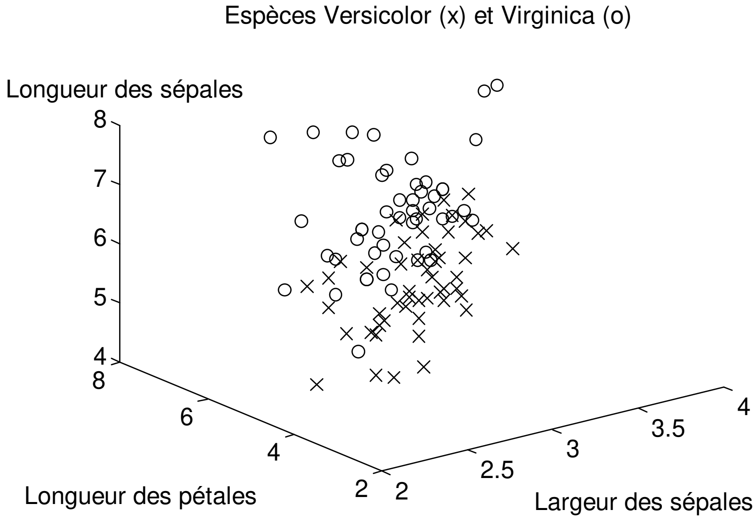






ENSEMBLE DES *IRIS DE FISHER*

- Reconnaissance d'une espèce d'iris parmi trois d'après longueur/largeur des pétales/sépales
- 3 classes, 4 caractéristiques, 50 individus/classe
- Test standard du domaine
- Méthode de *cross-validation*



Apprentissage / Validation	Reconnue comme ...	Espèce 1	Espèce 2	Espèce 3
20% / 80%	Espèce 1	**100 %**	0 %	0 %
	Espèce 2	0 %	***90 %***	27 %
	Espèce 3	0 %	7 %	**100 %**
40% / 60%	Espèce 1	**100 %**	0 %	0 %
	Espèce 2	0 %	***90 %***	6 %
	Espèce 3	0 %	6 %	***98 %***
60% / 40%	Espèce 1	**100 %**	0 %	0 %
	Espèce 2	0 %	**100 %**	10 %
	Espèce 3	0 %	5 %	***95 %***
80% / 20%	Espèce 1	**100 %**	0 %	0 %
	Espèce 2	0 %	**100 %**	0 %
	Espèce 3	0 %	0 %	**100 %**

CONCLUSIONS

PROGRAMMATION LINÉAIRE

- Atteint une certaine maturité
- Logiciels disponibles (publics et commerciaux)
- Plus efficace que l'algorithme du simplexe pour les problèmes de grande taille
- Méthode primale-duale à suivi de chemin et itéré initial quelconque, factorisation de Cholevsky

PROGRAMMATION NON-LINÉAIRE ET SEMIDÉFINIE

- Centre d'intérêt actuel
- Nombreux parallèles avec le cas linéaire
- Programmation semidéfinie très prometteuse
  - Nombreuses applications
  - Important courant de recherches
  - Implémentations efficaces disponibles

CLASSIFICATION PAR ELLIPSOÏDES

- Basée sur la programmation semidéfinie
- Utilisation d'une librairie existante
- Résultats très positifs (*Iris de Fisher*)

Conclusions