vander
LOUVAIN

APPLICATIONS DE LA DESCENTE QUADRATIQUE DES ALGEBRES SIMPLES A L'ETUDE DE LA STRUCTURE DES CORPS A INVOLUTION

J.P. TIGNOL

Rapport n° 69, Août 1977.
Séminaires de Mathématique Pure.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUE PURE ET APPLIQUÉE
UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Bâtiment Sc. I, Chemin du Cyclotron 2, 1348 Louvain - La - Neuve

INTRODUCTION

Ce rapport est basé sur un séminaire d'algèbre, qui eut lieu à Louvain-la-Neuve entre le 20 avril et le 18 mai 1977. L'objet du séminaire était la structure des corps à involution de rang fini sur leur centre, de caractéristique différente de 2.

La structure de ces corps fut étudiée pour la première fois entre 1930 et 1940 par A.A. Albert, dont le livre "Structure of Algebras" [4] (*) - en particulier le chapitre 10 - reste la principale référence. Le but que poursuivait A.A. Albert était de déterminer la structure des algèbres des multiplications des matrices de Riemann. Il parvint à résoudre ce problème en 1934 [3], après avoir précisé la structure des corps à involution dont le centre est un corps de nombres, c'est-à-dire une extension finie du corps des nombres rationnels.

A cette occasion, il démontra que tout corps non commutatif à involution de première espèce (i.e. dans lequel l'involution fixe le centre), de rang fini sur un corps de nombres, est un corps de quaternions. Incidemment, il démontra aussi [2] que tout corps à involution de première espèce, de degré 4 (= de rang 16) sur son centre (arbitraire), est isomorphe à un produit tensoriel de deux corps de quaternions.

La question suivante se pose naturellement : tout corps à involution de première espèce, de rang fini sur son centre, peut-il se décomposer en produit tensoriel de corps de quaternions ?

Cette question n'a encore été résolue que pour les degrés 2 et 4, où la réponse est affirmative.

Le résultat principal, exposé au séminaire, est la définition d'une propriété P, de caractère arithmétique, telle que si le centre d'un corps à involution de première espèce, de degré 8, de caractéristique différente de 2, possède la propriété P, alors le corps à involution se décompose en produit tensoriel de trois corps de quaternions. Ce résultat se trouve au §2 du chapitre 2.

Le dernier paragraphe présente quelques exemples de corps commutatifs possédant la propriété P. On y démontre que si un corps commutatif est le centre d'au plus un corps de quaternions (à isomorphisme près), alors il possède la propriété P.

(*) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie.

Le résultat principal établit que, dans ce cas, le corps F n'est le centre d'aucun corps à involution de première espèce de degré 8. On montre aussi que les corps globaux possèdent la propriété P et qu'un corps valué complet à valuation non archimédienne discrète dont le corps résiduel est de caractéristique différente de 2 possède la propriété P si et seulement si son corps résiduel la possède.

On voit ainsi que, si F est un corps local, ou réel-clos, ou le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, alors le corps de séries de Laurent formelles $F((X))$ possède la propriété P et, par induction, le corps $F((X_1))((X_2))\dots((X_n))$ possède la propriété P.

Ce rapport reprend, en le développant et en modifiant légèrement certains énoncés, un article publié dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. [17].

Qu'il me soit permis d'exprimer ma respectueuse reconnaissance à Monsieur le Professeur J. Tits, pour les nombreuses suggestions et les précieux conseils sans lesquels ce travail n'aurait pu être réalisé.

Monsieur le Professeur P. Van Praag m'a constamment encouragé par de nombreuses conversations enrichissantes. Je le prie de trouver ici l'expression de ma vive gratitude.

CONVENTIONS ET NOTATIONS

Sauf mention explicite, tous les corps sont supposés de caractéristique différente de 2; de plus, les corps non commutatifs et les algèbres simples sont supposés de rang fini sur leur centre.

L'algèbre des matrices carrées $n \times n$ sur le corps F est notée $M_n(F)$.

Si A et B sont des algèbres simples de centre F, on dit que A et B sont semblables et on note $A \sim B$ s'il existe des entiers n et m tels que $M_n(F) \otimes_F A \cong M_m(F) \otimes_F B$.

Pour exprimer qu'une algèbre simple A de centre F est isomorphe à une algèbre de matrices, on note $A \sim 1$. Soient F un corps et α, β des éléments de $F^* = F - \{0\}$. Il y a une algèbre (associative) simple de rang 4 sur son centre F, dont une base est $\{1, i, j, k\}$ avec les règles de multiplication : $i^2 = \alpha$; $j^2 = \beta$; $ij = -ji = k$. Cette algèbre est notée $\left(\frac{\alpha \quad \beta}{F}\right)$.

Les algèbres construites de cette manière sont appelées algèbres de quaternions.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1 : LA DESCENTE QUADRATIQUE

§1. Définitions et remarques générales

Soit K un corps commutatif, extension quadratique d'un corps F. Soient A une algèbre simple de centre K et B une algèbre simple de centre F.

On dit que A *provient de* B (par extension des scalaires) si $A \cong B \otimes_F K$; dans ce cas, on dit aussi que A admet une *descente* sur F.

Proposition 1.1. : *Pour que l'algèbre* A *admette une descente sur* F, *il faut et il suffit que l'automorphisme involutif non identique de* K *sur* F *se prolonge en automorphisme involutif de* A.

Si $A \cong B \otimes_F K$, alors on définit

$$(\Sigma\, b_i \otimes k_i)^{\alpha} = \Sigma\, b_i \otimes k_i^{U}$$

où U est l'automorphisme non identique de K qui fixe F. Comme K est une extension quadratique de F, l'automorphisme U est involutif et α est un automorphisme involutif de A qui prolonge U.

Réciproquement, si α est un automorphisme involutif de A qui prolonge l'automorphisme non identique de K sur F, on définit $B = \{x \in A \mid x^{\alpha} = x\}$. Si $K = F(\sqrt{\phi})$, alors $B.\sqrt{\phi} = \{x \in A \mid x^{\alpha} = -x\}$ et $A \cong B \oplus B.\sqrt{\phi}$, car pour tout x dans A,

$$x = \frac{1}{2}(x + x^{\alpha}) + \frac{1}{2}(x - x^{\alpha}).$$

Il est facile de vérifier que B est une algèbre de centre F et que $A \cong B \otimes_F K$.

Il est important de remarquer que si deux algèbres simples A et B de centre K sont semblables, alors le fait que A admette une descente sur F *n'entraîne pas* que B admette une descente sur F. Par exemple, soit F un corps de nombres p-adiques et K l'extension quadratique non ramifiée de F. Soit H(K) le corps de quaternions de centre K. Ce corps n'admet pas de descente sur F, car le corps de quaternions de centre F est neutralisé par K. [14]. Cependant, $M_2(K) \otimes_K H(K)$ admet une descente sur F. En effet, soit A(F) un corps d'exposant 4 de centre F. Comme le corps A(F) contient K, on a $A(F) \otimes_F K \cong M_2(K) \otimes_K H(K)$.

La descente sur F n'est donc pas une propriété de classes de similitude d'algèbres simples sur K. Certaines notions voisines ne présentent pas cet inconvénient.

Une algèbre simple A de centre K est dite *normale sur* F si tout automorphisme de K sur F se prolonge en un automorphisme de A. Si une algèbre est normale sur F, toute algèbre semblable l'est aussi. L'ensemble des classes de similitude d'algèbres normales sur F forme un sous-groupe du groupe de Brauer Br(K). Comme K est une extension quadratique de F, la théorie du cocycle de Teichmüller [7] permet de prouver que ce sous-groupe est l'image du morphisme canonique de Br(F) dans Br(K).

Soit A une algèbre simple de centre K, qui provient d'une algèbre simple B de centre F. Le but des propositions suivantes est d'éclairer les relations entre l'exposant de A et l'exposant de B.

<u>Proposition 1.2.</u> : *Si l'exposant de* A *est* n, *alors l'exposant de* B *est* n *ou* 2n.

Par hypothèse, $A \cong B \otimes_F K$, d'où $A^m \cong B^m \otimes_F K$ pour tout entier m. Si $B^m \sim 1$, alors $A^m \sim 1$, ce qui montre que l'exposant de B est un multiple de l'exposant de A. Pour m = n, on a $B^n \otimes_F K \sim 1$ et B^n est donc neutralisé par K. Comme K est une extension quadratique de F, il n'y a que deux possibilités : $B^n \sim 1$ ou $B^n \sim H(F)$, où H(F) est un corps de quaternions de centre F contenant K. Si $B^n \sim H(F)$, alors $B^{2n} \sim 1$, car $H(F)^2 \sim 1$ et la proposition est démontrée.

Soit $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et $\mathbb{H}$ le corps de quaternions usuel de centre $\mathbb{R}$. L'exposant de l'algèbre de matrices $M_2(\mathbb{C})$ est bien sûr 1, celui de $\mathbb{H}$ est 2. On a $M_2(\mathbb{C}) \cong M_2(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, ce qui montre qu'une algèbre simple A de centre K peut provenir de deux algèbres de centre F, d'exposants différents. Les propositions suivantes montrent que cette situation ne peut pas se présenter si l'exposant de A est pair ou si A est un corps.

<u>Proposition 1.3.</u> : *Soit* A *une algèbre simple de centre* K, *d'exposant pair* n = 2m. *Si* A *provient de deux algèbres* B_1 *et* B_2 *de centre* F, *alors l'exposant de* B_1 *est égal à celui de* B_2.

Par hypothèse, $A \cong B_1 \otimes_F K \cong B_2 \otimes_F K$ et A est d'exposant n. Alors

$$A^n \cong (B_1^{n-1} \otimes_F B_2) \otimes_F K \sim 1$$

L'algèbre $B_1^{n-1} \otimes_F B_2$ est neutralisée par K, extension quadratique de F,

donc $(B_1^{n-1} \otimes_F B_2)^2 \sim B_1^{2n-2} \otimes_F B_2^2$.

Comme $B_1^{2n} \sim 1$, la relation précédente donne $B_1^2 \sim B_2^2$.
Alors $B_1^n = (B_1^2)^m \sim (B_2^2)^m = B_2^n$.

Si B_1 est d'exposant n, alors B_2 l'est aussi. Si par contre B_1 est d'exposant 2n, alors $B_1^n \not\sim 1$ et donc $B_2^n \not\sim 1$. La proposition précédente indique alors que $B_2^{2n} \sim 1$.

Proposition 1.4. : *Soit* D *un corps de centre* K, *d'exposant* n *impair. Si* D *provient d'un corps* D' *de centre* F, *alors l'exposant de* D' *est* n.

Si l'exposant de D' est 2n, alors D' se décompose en produit tensoriel

$$D' \cong D_1' \otimes_F D_2'$$

où D_1' est un corps d'exposant 2 et D_2' un corps d'exposant n, car n est impair [8]. Comme l'exposant de D est n, K neutralise D'^n; mais, comme n est impair, $D'^n \sim D_1'$. Ainsi, K neutralise D_1'. Mais alors $D \cong D' \otimes_F K$ n'est pas un corps, contrairement à l'hypothèse.

§2. La descente quadratique des corps à involution

Soit K un corps commutatif, extension quadratique d'un corps F. D'après un théorème de A.A. Albert [4], un corps possède une involution de première espèce si et seulement s'il est d'exposant 2. Si un corps à involution de première espèce de centre K admet une descente sur F, alors tous les corps dont il provient sont d'exposant 2 ou ils sont tous d'exposant 4. L'objet de ce paragraphe est d'établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un corps à involution de première espèce de centre K qui admet une descente sur F provienne d'un corps d'exposant 2 de centre F, c'est-à-dire d'un corps à involution de première espèce.

Proposition 2.1. : *Soit* D *un corps de centre* K. *On suppose que* D *possède une involution* σ *de première espèce et une involution* τ *de seconde espèce, qui fixe* F. *Si* σ *et* τ *commutent, alors* D *provient d'un corps à involution de première espèce de centre* F.

Soit $\alpha = \tau\sigma$. L'application α est un automorphisme de D qui prolonge l'automorphisme non identique de K sur F. De plus, comme σ et τ commutent, α est involutif. Soit D' l'ensemble des éléments de D fixés par α. Comme dans la proposition 1.1., D' est un sous-corps de D, de centre F, et $D \cong D' \otimes_F K$. Il faut prouver que D' possède une involution de première espèce. Soit x un élément de D'. On a $x^\alpha = x^{\tau\sigma} = x$, d'où $x^\sigma = x^\tau$. De plus, $x^{\tau\alpha} = x^\sigma = x^\tau$. Cela montre que l'involution τ conserve D' et par conséquent la restriction de τ à D' est une involution de première espèce.

Lemme 2.2. : *Soit* D *un corps de centre* K. *On suppose que* D *possède une involution* σ *de première espèce et une involution* τ *de seconde espèce, qui fixe* F. *Tout élément de* D *peut s'écrire sous la forme* $z_1 z_2^\tau$, *où* $z_1^\tau = z_1$ *et* $z_2^\sigma = \pm z_2$.

Soient $S_\sigma = \{x \in D \mid x^\sigma = x\}$ et $T_\sigma = \{x \in D \mid x^\sigma = - x\}$. Les ensembles S_τ et T_τ sont définis de manière analogue. Il est clair que S_σ et T_σ sont des espaces vectoriels sur K et que S_τ et T_τ sont des espaces vectoriels sur F.

Si le rang de D sur K est n^2, alors $\dim_K S_\sigma = \frac{1}{2} n (n + 1)$ ou $\frac{1}{2} n (n - 1)$. [6]. L'involution σ est dite de type (+1) dans le premier cas, de type (-1) dans le second. La dimension de T_{σ_2} est $\frac{1}{2} n (n - 1)$ ou $\frac{1}{2} n (n + 1)$, respectivement. De plus, $\dim_F S_\tau = \dim_F T_\tau = n^2$.

Soit x un élément non nul de D. Si l'involution σ est de type (+1), on considère l'ensemble $S_\sigma^\tau x^{-1} = \{y^\tau x^{-1} \mid y \in S_\sigma\}$. C'est un sous-espace vectoriel de D, dont la dimension sur K est $\frac{1}{2}$ n (n + 1). Sa dimension sur F est donc n(n + 1). Comme la dimension de S_τ sur F est n^2, l'intersection de $S_\sigma^\tau x^{-1}$ et de S_τ ne peut pas être réduite à $\{0\}$. Soit y un élément non nul de l'intersection. Il y a un élément z_2 de S_σ tel que $y = z_2^\tau x^{-1}$, d'où $x = y^{-1} z_2^\tau$. En posant $z_1 = y^{-1}$, on voit que la thèse est démontrée.

Si l'involution σ est de type (-1), on considère $T_\sigma^\tau x^{-1}$ au lieu de $S_\sigma^\tau x^{-1}$.

Proposition 2.3. : *Soit* D *un corps de centre* K. *On suppose que* D *possède une involution* σ *de première espèce et une involution* τ *de seconde espèce, qui fixe* F. *Si* D *admet une descente sur* F, *alors il provient d'un corps à involution de centre* F.

Par hypothèse, $D \cong D' \otimes_F K$, où D' est un corps de centre F. Il faut prouver que D' possède une involution de première espèce. Soient α l'automorphisme involutif de D qui fixe D' et qui prolonge l'automorphisme non identique de K sur F, et $\beta = \tau\sigma$. L'automorphisme $\beta\alpha$ fixe le centre K de D. Le théorème de Skolem-Noether [8] montre que $\beta\alpha$ est un automorphisme intérieur de D. Soit x un élément non nul de D, tel que $\beta\alpha = \mathrm{Int}(x)$. L'automorphisme intérieur Int(x) est défini par $y^{\mathrm{Int}(x)} = x^{-1}yx$. On a $\alpha = \mathrm{Int}(x^{-1})\beta$.

En vertu du lemme précédent, on peut trouver z_1 et z_2 dans D, tels que $x^{-1} = z_1 z_2^\tau$, $z_1^\tau = z_1$ et $z_2^\sigma = \pm z_2$. On pose $\tau' = \mathrm{Int}(z_1)\tau$ et $\sigma' = \mathrm{Int}(z_2^{-1})\sigma$. Un calcul montre que σ' et τ' sont des involutions de D, de première et de seconde espèce respectivement, et que ces involutions commutent. On a $\alpha = \tau'\sigma'$. Par le même raisonnement que dans la proposition 2.1, il est facile de voir que D' est stable par τ' et donc que la restriction de τ' à D' est une involution de première espèce.

Réciproque 2.4. : *Si* D *est un corps de centre* K *qui provient d'un corps à involution de première espèce de centre* F, *alors* D *possède une involution* σ *de première espèce et une involution* τ *de seconde espèce, qui fixe* F.

Soient σ' une involution de première espèce du corps dont D provient et U l'automorphisme non identique de K sur F. On définit sur D des involutions σ et τ par $\sigma = \sigma' \otimes 1$ et $\tau = \sigma' \otimes U$.

§3. La descente quadratique de certains produits croisés.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la situation suivante : L est un corps commutatif, extension galoisienne d'un sous-corps F. On suppose que le groupe de Galois G de L sur F est d'exposant 2. Soit G' un sous-groupe d'indice 2 de G et $H = \{1,U\}$ un sous-groupe d'ordre 2 de G tel que $G \cong G' \times H$. On désigne par L' le sous-corps de L fixé par H et le sous-corps fixé par G' est noté K. Le corps K est une extension quadratique de F.

Soit $A = (L,G',f)$ un produit croisé de L par le groupe G'. C'est une algèbre simple de centre K. Le système de facteurs f est supposé normalisé par la condition : $f(1,X) = f(X,1) = 1$ pour tout X dans G'.

Proposition 3.1. : *Pour que* A *possède un automorphisme involutif qui conserve* L *et dont la restriction à* L *soit l'automorphisme* U, *il faut et il suffit que, pour tout* X *dans* G', *il existe un élément* N_X *de* $L^* = L - \{0\}$, *tel que*

$$N_X\, N_X^U = f(X,X)\ f^U(X,X) \qquad (a,1)$$

et pour X,Y *dans* G',

$$N_X^Y\, N_Y\, N_{XY}^{-1} = f^U(X,Y)\ f^{XY}(Y,X) \qquad (a,2)$$

Soit $A = \bigoplus_{X\in G} u_X.L$, avec les règles usuelles :

$$m\, u_X = u_X\, m^X \text{ pour tout } m \in L$$

$$u_X\, u_Y = u_{XY}\, f(X,Y)$$

Pour que l'automorphisme U de L se prolonge à l'algèbre A, il faut et il suffit que le système de facteurs f^U soit dans la même classe de cocycles que le système f, donc que pour tout X dans G', il y ait un élément M_X de L^* tel que, pour X,Y dans G',

$$f^U(X,Y) = f(X,Y)\ M_X^Y\, M_Y\, M_{XY}^{-1} \qquad (b,1)$$

Alors l'automorphisme U de L se prolonge en un automorphisme α de A, tel que $u_X^\alpha = u_X\, M_X$. Pour que α soit involutif, il faut et il suffit que :

$$M_X M_X^U = 1 \qquad (b,2)$$

En posant $N_X = M_X f(X,X)$, un simple calcul permet d'établir que les relations (a,1 et 2) sont équivalentes aux relations (b,1 et 2).

Cette proposition donne une condition suffisante pour que l'algèbre A, de centre K, admette une descente sur F. D'après la proposition 1.1, si l'algèbre A possède un automorphisme involutif α qui prolonge l'automorphisme U de L sur L' (qui, lui-même, prolonge l'automorphisme non identique de K sur F), alors elle provient du sous-anneau B fixé par α et ce sous-anneau contient le corps L'. Pour exprimer ce fait, on définit la notion de descente adaptée à un sous-corps.

Soit A une algèbre dont le centre K est extension quadratique d'un sous-corps F et L un sous-corps commutatif de A contenant K. On suppose que L provient d'une extension L' de F, c'est-à-dire que $L \cong L' \otimes_F K$. On dit que A admet une *descente sur* F *adaptée à* L' si A provient d'une algèbre B de centre F, contenant L'.

D'après la proposition 1.1, l'algèbre A admet une descente sur F adaptée à L' si et seulement si l'automorphisme non identique de K sur F se prolonge en automorphisme involutif de A qui fixe L'. La proposition 3.1 donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'algèbre A = (L,G',f) admette une descente sur F adaptée à L'.

§4. La descente quadratique des algèbres de quaternions.

Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & & \beta \\ & K & \end{pmatrix}$ une algèbre de quaternions sur le corps K, extension quadratique d'un sous-corps F. On pose $K = F(\sqrt{\phi})$. La base canonique de A est $\{1,i,j,k\}$. On suppose que α est dans F et que la sous-algèbre engendrée par i sur K est un corps, ce que l'on exprime de manière abrégée par : K(i) est un corps ou, avec un abus de notations, $K(\sqrt{\alpha})$ est un corps. Sous ces conditions, on se propose d'appliquer la proposition 3.1 en vue d'obtenir une condition commode pour que l'algèbre A admette une descente sur F, adaptée à F(i).

Proposition 4.1. : *L'algèbre* A *décrite ci-dessus admet une descente sur* F *adaptée à* F(i) *si et seulement si*

$$\begin{pmatrix} \alpha\phi & & N_{K/F}(\beta) \\ & F & \end{pmatrix} \sim 1$$

Soit $L = K(i) \cong F(i) \otimes_F K$. Soit G' le groupe de Galois de L sur K, $G' = \{1,S\}$ où $i^S = -i$. Soit U l'automorphisme de L qui envoie $\sqrt{\phi}$ sur $-\sqrt{\phi}$ et qui fixe i.

L'algèbre A est un produit croisé de L par G' : $A = (L,G',f)$. Le système de facteurs (normalisé) est décrit par

$$f(1,1) = f(1,S) = f(S,1) = 1 \; ; \; f(S,S) = \beta.$$

La proposition 3.1 indique que A admet une descente sur F adaptée à F(i) si et seulement si on peut trouver pour tout X dans G' un élément N_X de L^* tel que

$$N_X \, N_X^U = f(X,X) \; f^U(X,X) \qquad (a,1)$$

et, pour X,Y dans G',

$$N_X^Y \, N_Y \, N_{XY}^{-1} = f^U(X,Y) \; f^{XY}(Y,X) \qquad (a,2)$$

En appliquant la relation (a,2) au cas où $X = Y = 1$, il vient $N_1 = 1$. Il reste donc à trouver N_S tel que

$$N_S \, N_S^U = \beta\beta^U \qquad (a',1)$$

$$N_S^S \, N_S = \beta\beta^U \qquad (a',2)$$

Ces conditions sont équivalentes à :

$$N_S^{SU} = N_S \quad \text{et} \quad N_S\, N_S^U = \beta\beta^U = N_{K/F}(\beta)$$

c'est-à-dire que N_S est un élément de $F(i.\sqrt{\phi}) = F(\sqrt{\alpha\phi})$ dont la norme est $N_{K/F}(\beta)$. Pour qu'un tel élément existe, il faut et il suffit que l'algèbre de quaternions $\left(\frac{\alpha\phi \quad N_{K/F}(\beta)}{F}\right)$ soit isomorphe à une algèbre de matrices, ce qui démontre la proposition.

<u>Corollaire 4.2.</u> : *L'algèbre* A *décrite ci-dessus admet une descente sur* F, *adaptée à* F(i) *si et seulement si*

$$\left(\frac{\alpha \quad N_{K/F}(\beta)}{F}\right) \sim 1$$

Il suffit de remarquer que

$$\left(\frac{\alpha\phi \quad N_{K/F}(\beta)}{F}\right) \sim \left(\frac{\alpha \quad N_{K/F}(\beta)}{F}\right) \otimes_F \left(\frac{\phi \quad N_{K/F}(\beta)}{F}\right)$$

et que $\left(\frac{\phi \quad N_{K/F}(\beta)}{F}\right) \sim 1$

car $N_{K/F}(\beta)$ est la norme d'un élément de $F(\sqrt{\phi}) = K$.

Ce corollaire permet de donner de nouvelles démonstrations de certains théorèmes dus à C.M. Cordes.

Soit F un corps commutatif. I. Kaplansky [9] définit le *radical* de F de la manière suivante :

$$\text{rad } F = \{\alpha \in F^* \mid \text{pour tout } \beta \text{ dans } F^*, \left(\frac{\alpha \quad \beta}{F}\right) \sim 1\}$$

Dans [5], C.M. Cordes démontre les théorèmes suivants :

Théorème a : *Si* K *est une extension quadratique d'un corps* F, *alors* rad F $\subset$ rad K.

Théorème b : *Si* K *est une extension quadratique d'un corps* F *et si* $x \in$ rad K, *alors* $N_{K/F}(x) \in$ rad F.

Les démonstrations de C.M.Cordes n'utilisent que la théorie des formes quadratiques.

Démonstration du théorème a.

Soient $K = F(\sqrt{\phi})$ et $\alpha \in \text{rad } F$. Si $\alpha \in F^{*2}$ ou si $\alpha \in \phi.F^{*2}$, alors $\alpha \in K^{*2} \subset \text{rad } K$. On peut donc supposer que $K(\sqrt{\alpha})$ est un corps. Soit $\beta \in K^{*}$. Comme $\alpha \in \text{rad } F$, le corollaire 4.2 montre que l'algèbre $\left(\frac{\alpha \quad \beta}{K}\right)$ possède une descente sur F, adaptée à $F(i) = F(\sqrt{\alpha})$. On a donc

$$\left(\frac{\alpha \quad \beta}{K}\right) \cong \left(\frac{\alpha \quad \gamma}{F}\right) \otimes_F K$$

pour un certain $\gamma \in F^{*}$. Comme $\alpha \in \text{rad } F$, on voit que $\left(\frac{\alpha \quad \beta}{K}\right) \sim 1$, donc $\alpha \in \text{rad } K$.

Démonstration du théorème b.

Soient $K = F(\sqrt{\phi})$ et $x \in \text{rad } K$. Soit $\alpha \in F^{*} - (F^{*2} \cup \phi.F^{*2})$, de sorte que $K(\sqrt{\alpha})$ soit un corps. Comme $x \in \text{rad } K$, l'algèbre $\left(\frac{\alpha \quad x}{K}\right)$ est isomorphe à une algèbre de matrices. Elle possède donc une descente adaptée à $F(\sqrt{\alpha})$ et, en vertu du corollaire 4.2,

$$\left(\frac{\alpha \quad N_{K/F}(x)}{F}\right) \sim 1$$

Par ailleurs, si $\alpha \in F^{*2} \cup \phi.F^{*2}$, il est évident que l'on a la même relation. Par conséquent, $N_{K/F}(x) \in \text{rad } F$. Cette démonstration n'utilise pas totalement l'hypothèse que $x \in \text{rad } K$. Elle reste valable si l'on suppose seulement que pour tout α dans F^{*}, $\left(\frac{\alpha \quad x}{K}\right) \sim 1$.

§5. La descente quadratique des produits tensoriels de deux algèbres de quaternions.

Soit $A = A_1 \otimes_K A_2 = \left(\frac{\alpha_1 \quad \beta_1}{K}\right) \otimes_K \left(\frac{\alpha_2 \quad \beta_2}{K}\right)$ le produit tensoriel de deux algèbres de quaternions sur un corps K, extension quadratique d'un sous-corps F. On pose $K = F(\sqrt{\phi})$. La base canonique de A_r est $\{1, i_r, j_r, k_r\}$ $(r = 1,2)$. On suppose que α_1 et α_2 sont dans F et que la sous-algèbre engendrée par i_1 et i_2 sur K est un corps, ce que l'on exprime par : $K(i_1, i_2)$ est un corps ou, avec un abus de notations, $K(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2})$ est un corps.

Proposition 5.1. : *L'algèbre* A *décrite ci-dessus admet une descente sur* F, *adaptée à* $F(i_1,i_2)$ *si et seulement s'il existe* ζ *dans* F^* *tel que :*

$$\left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \phi \quad \zeta}{F}\right) \sim 1 \qquad (c,1)$$

et

$$\left(\frac{\alpha_r \phi \quad \zeta N_{K/F}(\beta_r)}{F}\right) \sim 1 \qquad (r = 1,2) \quad (c,2)$$

Pour abréger, $N_{K/F}(\beta_r)$ sera noté b_r.

Soit $L = K(i_1,i_2) \cong F(i_1,i_2) \otimes_F K$. Soit G' le groupe de Galois de L sur K, $G' = \{1, S_1, S_2, S_1S_2\}$ où $i_r^{S_r} = -i_r$, $i_s^{S_r} = i_s$, $\{r,s\} = \{1,2\}$. Soit U l'automorphisme de L qui envoie $\sqrt{\phi}$ sur $-\sqrt{\phi}$ et qui fixe i_1 et i_2.

L'algèbre A est un produit croisé de L par G' : $A = (L,G',f)$. Le système de facteurs (normalisé) f est décrit par : $f(1,X) = f(X,1) = 1$ pour tout X dans G'.

$$f(S_1,S_2) = f(S_2,S_1) = 1, \quad f(S_r,S_r) = \beta_r \qquad (r = 1,2)$$

et les relations qui s'en déduisent.

La proposition 3.1 montre que A admet une descente sur F adaptée à $F(i_1,i_2)$ si et seulement si on peut trouver N_1, N_2 dans L^* tels que :

$$N_r N_r^U = \beta_r \beta_r^U \ ; \ N_r N_r^{S_r} = \beta_r \beta_r^U \qquad (r = 1,2) \quad \text{et } N_1^{S_2} N_2 = N_1 N_2^{S_1}.$$

Ces relations sont évidemment équivalentes aux suivantes :
$N_r N_r^{S_r} = b_r$, $N_r^{S_r U} = N_r$ $(r = 1,2)$ et $N_1^{S_2} N_2 = N_1 N_2^{S_1}$ (d). Il suffit de prouver que

l'existence de N_r vérifiant les conditions (d) est liée à celle d'un élément ζ de F^* répondant aux conditions (c,1 et 2).

Si les N_r existent, on pose $q = N_1(N_1^{-1})^{S_2} = N_2(N_2^{-1})^{S_1}$. On voit que $q^{S_1} = q^{S_2} = q^U = q^{-1}$. Donc q est un élément de norme 1 de $F(\sqrt{\alpha_1\ \alpha_2\ \phi})^*$. Soit ξ un élément de $F(\sqrt{\alpha_1\ \alpha_2\ \phi})^*$ tel que $q = \xi^U\ \xi^{-1}$. L'existence d'un tel ξ est assurée par le théorème 90 de Hilbert. On pose $\zeta = \xi\ \xi^U$. On a alors bien sûr $\zeta \in F^*$ et $\left(\frac{\alpha_1\ \alpha_2\ \phi\ ,\ \zeta}{F}\right) \sim 1$, puisque ζ est la norme de $\xi \in F(\sqrt{\alpha_1\ \alpha_2\ \phi})$.

Soit $X_r = N_r\xi$. On a $X_r^{S_r} = X_r^U$, car N_r et ξ sont fixes par S_r U. Pour $r \neq s$, on a aussi $X_r^{S_s} = X_r$, car $X_r^{S_s} = N_r^{S_s}\ \xi^{S_s} = N_r^{S_r}\ \xi^U = N_r\ \xi$, par la définition de ξ. Donc, $X_r \in F(\sqrt{\alpha_r\ \phi})$ et un simple calcul montre que la norme de X_r est ζb_r, ce qui établit que $\left(\frac{\alpha_r\phi\ ,\ \zeta b_r}{F}\right) \sim 1$ pour $r = 1,2$.

Réciproquement, soit ζ un élément de F^* qui vérifie les conditions (c,1 et 2). La relation (c,1) montre qu'il existe un élément ξ de $F(\sqrt{\alpha_1\ \alpha_2\ \phi})^*$ dont la norme $\xi\xi^U = \zeta$. De plus, les relations (c,2) établissent l'existence d'éléments X_r de $F(\sqrt{\alpha_r\ \phi})^*$ tels que $\zeta\ b_r = X_r\ X_r^{S_r}$. On pose alors $N_r = X_r\ \xi^{-1}$ et de simples calculs permettent de vérifier que ces N_r satisfont les relations (d).

CHAPITRE 2 : APPLICATIONS A LA STRUCTURE DES CORPS A INVOLUTION

§1. Les corps à involution de degré 4

Le but de ce paragraphe est de montrer comment les résultats du premier chapitre peuvent être utilisés pour démontrer un théorème de A.A. Albert [2] : tout corps à involution de première espèce de degré 4 est un produit tensoriel de deux corps de quaternions. La démonstration est, à peu de chose près, celle de M.L. Racine [12].

Lemme 1.1. : *Soit* A *l'algèbre de quaternions décrite au chapitre I, §4. Pour que* A *possède une involution de seconde espèce qui fixe* F, *il faut et il suffit que*

$$\left(\frac{\alpha \quad N_{K/F}(\beta)}{F}\right) \sim 1$$

C'est un cas particulier d'un théorème très général de A.A. Albert ([4] , théorème 10.16).

Proposition 1.2. : *Soit* A *une algèbre simple, à involution de première espèce, de rand 16 sur son centre* F. *Si* A *contient un sous-corps commutatif* L *galoisien de rang 4 sur* F, *de groupe de Galois d'exposant 2, alors* A *se décompose en produit tensoriel de deux algèbres de quaternions. De plus, si* $L \cong F(\sqrt{\alpha}) \otimes_F F(\sqrt{\phi})$, *alors on peut trouver des éléments* β, ψ *de* F^* *tels que*

$$A \cong \left(\frac{\alpha \quad \beta}{F}\right) \otimes_F \left(\frac{\phi \quad \psi}{F}\right)$$

Soient i_1, i_2 des éléments de L dont les carrés sont respectivement α et ϕ. En s'inspirant du théorème 10.15 de [4], il est très simple de prouver que A possède une involution de première espèce σ telle que $i_2^\sigma = - i_2$. Soit A' le commutant $C_A F(i_2)$. Le centre de A' est $F(i_2) \cong F(\sqrt{\phi})$, que l'on notera K. Pour des raisons de dimensions, A' est une algèbre de quaternions sur K. Comme A' contient l'élément i_1, il y a un élément δ de K^* tel que

$$A' \cong \left(\frac{\alpha \quad \delta}{K}\right)$$

La restriction de l'involution σ à A' est une involution de seconde espèce. D'après le lemme 1.1 et le corollaire 4.2 du chapitre 1, A' admet une descente sur F, adaptée à $F(i_1)$. Alors il existe β dans F^* tel que

$$A' \cong \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha \quad \beta}{F}\right) \otimes_F K$$

Alors

$$A \cong \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha \quad \beta}{F}\right) \otimes_F C_A\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha \quad \beta}{F}\right)$$

Pour des raisons de dimensions, le commutant qui apparaît au second membre est une algèbre de quaternions sur F. Comme cette algèbre de quaternions contient $F(i_2) \cong F(\sqrt{\phi})$, il existe ψ dans F^* tel que

$$C_A\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha \quad \beta}{F}\right) \cong \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\phi \quad \psi}{F}\right)$$

ce qui achève la démonstration.

Soit A une algèbre de centre F, produit tensoriel de n algèbres de quaternions sur F. On suppose que A contient un sous-corps L galoisien d'exposant 2 et de rang 2^n sur F. On dit que A admet une décomposition en produit tensoriel d'algèbres de quaternions *adaptée* à L si, étant donné $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ dans F^* tels que

$$L \cong F(\sqrt{\alpha_1}) \otimes_F F(\sqrt{\alpha_2}) \otimes_F \dots \otimes_F F(\sqrt{\alpha_n})$$

On peut trouver $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ dans F^* tels que

$$A \cong \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha_1 \quad \beta_1}{F}\right) \otimes_F \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha_2 \quad \beta_2}{F}\right) \otimes_F \dots \otimes_F \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha_n \quad \beta_n}{F}\right)$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que cette propriété ne dépend pas des éléments $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ choisis pour décomposer L en produit tensoriel d'extensions quadratiques de F.

<u>Corollaire 1.3.</u> : *Le produit tensoriel de deux algèbres de quaternions de centre* F

admet une décomposition adaptée à tout sous-corps commutatif galoisien d'exposant 2 et de rang 4 sur F.

Je ne sais pas si pour $n > 2$, le produit tensoriel de n algèbres de quaternions de centre F admet une décomposition adaptée à n'importe quel sous-corps commutatif galoisien d'exposant 2 et de rang 2^n sur F.

A.A. Albert [1] a prouvé que tout corps de degré 4 (= de rang 16) sur son centre F contient un sous-corps commutatif maximal galoisien d'exposant 2 sur F.

Corollaire 1.4. : *Tout corps à involution de première espèce, de degré 4 sur son centre, se décompose en produit tensoriel de deux corps de quaternions. De plus, la décomposition peut être adaptée à n'importe quel sous-corps commutatif maximal galoisien d'exposant 2 sur le centre.*

§2. Les corps à involution de degré 8.

Pour généraliser la méthode utilisée au paragraphe précédent, il faut étudier les relations entre involution de seconde espèce et descente adaptée dans un produit tensoriel de deux algèbres de quaternions.

Soit $A = A_1 \otimes_K A_2 = \left(\frac{\alpha_1 \quad \beta_1}{K}\right) \otimes_K \left(\frac{\alpha_2 \quad \beta_2}{K}\right)$ le produit tensoriel de deux algèbres de quaternions sur un corps K, extension quadratique d'un sous-corps F. On pose $K = F(\sqrt{\phi})$ et on reprend les hypothèses du §5 du chapitre 1 : on suppose que α_1 et α_2 sont dans F^* et que $K(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2})$ est un corps.

Lemme 2.1. : *Pour que l'algèbre A décrite ci-dessus possède une involution de seconde espèce qui fixe F, il faut et il suffit que*

$$\left(\frac{\alpha_1 \quad N_{K/F}(\beta_1)}{F}\right) \otimes_F \left(\frac{\alpha_2 \quad N_{K/F}(\beta_2)}{F}\right) \sim 1$$

C'est un cas particulier du théorème 10.16 de [4].

Lemme 2.2. : *Soient F un corps commutatif et* a_1, a_2, b_1, b_2 *des éléments de* F^*. *On désigne par* A_r *l'algèbre de quaternions* $\left(\frac{a_r \quad b_r}{F}\right)$ $(r = 1,2)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $A_1 \otimes_F A_2 \sim 1$

(2) il existe un élément ξ *de* F^* *tel que*

$$\left(\frac{a_1 a_2 \quad \xi}{F}\right) \sim 1$$

$$\left(\frac{a_r \quad \xi b_r}{F}\right) \sim 1 \qquad (r = 1,2)$$

Il est clair que (2) implique (1). Si $A_1 \otimes_F A_2 \sim 1$, alors les algèbres A_1 et A_2 sont isomorphes. Si A_1 et A_2 sont des algèbres de matrices, l'élément $\xi = 1$ remplit les conditions (2). Pour achever la démonstration, on peut donc supposer que A_1 et A_2 sont des corps. Soit f un isomorphisme de A_1 sur A_2. On désigne par i_r un élément de A_r dont le carré est a_r $(r = 1,2)$. On peut trouver dans A_2 un élément x non nul qui anticommute avec i_2 et avec $f(i_1)$. Soit ξ le carré de x.

Cet élément vérifie les conditions (2).

Ces lemmes donnent immédiatement la proposition suivante, à comparer à la proposition 5.1 du chapitre 1 :

Proposition 2.3. : *L'algèbre* A *décrite ci-dessus possède une involution de seconde espèce qui fixe* F *si et seulement s'il existe* ξ *dans* F^* *tel que*

$$\left(\frac{\alpha_1\alpha_2 \quad \xi}{F}\right) \sim 1 \qquad (e,1)$$

et

$$\left(\frac{\alpha_r \quad \xi N_{K/F}(\beta_r)}{F}\right) \sim 1 \quad (r = 1,2) \quad (e,2)$$

Soit $\mathcal{Q}\ (\alpha_1,\alpha_2,K)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de produits tensoriels de deux algèbres de quaternions sur K neutralisés par le corps $L = K(\sqrt{\alpha_1}) \otimes_K K(\sqrt{\alpha_2})$. Le corollaire 1.3 établit que toute algèbre de $\mathcal{Q}\ (\alpha_1,\alpha_2,K)$ peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{\alpha_1 \quad \beta_1}{K}\right) \otimes_K \left(\frac{\alpha_2 \quad \beta_2}{K}\right)$$

Le produit tensoriel sur K munit cet ensemble d'une structure de groupe.

Soient $\mathcal{QJ}\ (\alpha_1,\alpha_2,K/F)$ le sous-groupe de $\mathcal{Q}\ (\alpha_1,\alpha_2,K)$ dont les éléments possèdent une involution de seconde espèce qui fixe F et $\mathcal{QD}\ (\alpha_1,\alpha_2,K/F)$ le sous-groupe de $\mathcal{Q}\ (\alpha_1,\alpha_2,K)$ dont les éléments admettent une descente sur F, adaptée à $F(\sqrt{\alpha_1}) \otimes_F F(\sqrt{\alpha_2})$. On désigne par $\mathcal{QJD}\ (\alpha_1,\alpha_2,K/F)$ l'intersection de $\mathcal{QD}\ (\alpha_1,\alpha_2,K/F)$ et $\mathcal{QJ}\ (\alpha_1,\alpha_2,K/F)$. On cherche à comparer $\mathcal{QJ}\ (\alpha_1,\alpha_2,K/F)$ et $\mathcal{QJD}\ (\alpha_1,\alpha_2,K/F)$.

Pour cela, on introduit encore quelques notations.

Soit $\hat{F} = \dfrac{F^*}{F^{*2}}$. Si α est un élément de F^*, on désigne par $\hat{\alpha}$ la classe de α dans $\hat{F}$. Il est facile de vérifier que

$$\begin{pmatrix} \alpha & & \beta \\ & F & \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \alpha' & & \beta' \\ & F & \end{pmatrix}$$

si $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'$ et $\hat{\beta} = \hat{\beta}'$. On peut donc noter $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ la classe d'isomorphisme de l'algèbre $\begin{pmatrix} \alpha & & \beta \\ & F & \end{pmatrix}$. Comme $\hat{F}$ est un groupe d'exposant 2, on peut le considérer comme espace vectoriel sur le corps à deux éléments. Pour tout $\hat{\alpha}$ dans $\hat{F}$, on définit un sous-vectoriel $N(\hat{\alpha})$ de $\hat{F}$, de la manière suivante :
$N(\hat{\alpha}) = \{\hat{\beta} \in \hat{F} \mid (\hat{\alpha},\hat{\beta}) = 1\}$. Pour $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$, $\hat{\phi}$ dans $\hat{F}$, on introduit le groupe $G(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2,\hat{\phi})$:

$$G(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2,\hat{\phi}) = \frac{N(\hat{\alpha}_1\ \hat{\alpha}_2) \cap [N(\hat{\alpha}_1).N(\hat{\phi})] \cap [N(\hat{\alpha}_2).N(\hat{\phi})]}{N(\hat{\alpha}_1\ \hat{\alpha}_2) \cap [(N(\hat{\alpha}_1) \cap N(\hat{\alpha}_2)).N(\hat{\phi})]}$$

Proposition 2.4. : *Soit $K = F(\sqrt{\phi})$ un corps commutatif, extension quadratique d'un corps F. Soient α_1 et α_2 des éléments de F^* tels que $K(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2})$ soit un corps.*

$$\frac{\mathcal{QJ}\ (\alpha_1,\alpha_2,K/F)}{\mathcal{QJD}(\alpha_1,\alpha_2,K/F)} \cong G(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2,\hat{\phi})$$

Soit A le produit tensoriel $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \beta_1 \\ & K & \end{pmatrix} \otimes_K \begin{pmatrix} \alpha_2 & & \beta_2 \\ & K & \end{pmatrix}$. Si l'algèbre A possède une involution de seconde espèce qui fixe F, alors la proposition 2.3 affirme qu'il existe un élément ξ de F^* qui vérifie les conditions (e,1 et 2). Ces conditions peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\hat{\xi} \in N(\hat{\alpha}_1\ \hat{\alpha}_2) \cap [\hat{b}_1.N(\hat{\alpha}_1)] \cap [\hat{b}_2.N(\hat{\alpha}_2)]$$

où l'on a posé $b_r = N_{K/F}(\beta_r)$ $(r = 1,2)$. Comme $\hat{b}_r$ est dans $N(\hat{\phi})$,

$$\hat{\xi} \in N(\hat{\alpha}_1\ \hat{\alpha}_2) \cap [N(\hat{\alpha}_1).N(\hat{\phi})] \cap [N(\hat{\alpha}_2).N(\hat{\phi})]$$

En général, l'élément $\hat{\xi}$ n'est pas univoquement déterminé par l'algèbre A, mais on va prouver que la classe de $\hat{\xi}$ dans $G(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2,\hat{\phi})$ est bien déterminée par la classe d'isomorphisme de A, de sorte que l'on obtient une application

$$\psi : \mathcal{QJ}\ (\alpha_1,\alpha_2,K/F) \to G(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2,\hat{\phi})$$

Pour commencer, on suppose que $A \sim 1$. D'après le lemme 2.2, on peut trouver n dans K^* tel que

$$\genfrac{(}{)}{0pt}{}{\alpha_1\alpha_2 \quad n}{K} \sim 1 \quad \text{et} \quad \genfrac{(}{)}{0pt}{}{\alpha_r \quad n\beta_r}{K} \sim 1 \qquad (r = 1,2)$$

Comme ces algèbres de quaternions sont isomorphes à des algèbres de matrices, elles admettent une descente adaptée au sous-corps $F(i)$. En appliquant le corollaire 4.2 du chapitre 1, on voit que

$$\genfrac{(}{)}{0pt}{}{\alpha_1\alpha_2 \quad N_{K/F}(n)}{F} \sim 1 \quad \text{et} \genfrac{(}{)}{0pt}{}{\alpha_r \quad N_{K/F}(n\beta_r)}{F} \sim 1 \qquad (r = 1,2)$$

d'où, en posant $\eta = N_{K/F}(n)$ et $b_r = N_{K/F}(\beta_r)$,

$$\hat{\eta} \in N(\hat{\alpha}_1\ \hat{\alpha}_2) \cap [\,\hat{b}_1.N(\hat{\alpha}_1)] \cap [\,\hat{b}_2.N(\hat{\alpha}_2)\,]$$

et, bien sûr, $\hat{\eta} \in N(\hat{\phi})$.

Soit ξ un élément quelconque de F^* tel que

$$\hat{\xi} \in N(\hat{\alpha}_1\ \hat{\alpha}_2) \cap [\,\hat{b}_1.N(\hat{\alpha}_1)\,] \cap [\,\hat{b}_2.N(\hat{\alpha}_2)\,]$$

On a
$$\hat{\xi}\hat{\eta} \in N(\hat{\alpha}_1\ \hat{\alpha}_2) \cap N(\hat{\alpha}_1) \cap N(\hat{\alpha}_2)$$

d'où
$$\hat{\xi} = (\hat{\xi}\ \hat{\eta})\ \hat{\eta} \in [\,N(\hat{\alpha}_1) \cap N(\hat{\alpha}_2)]\ .N(\hat{\phi})$$

Ainsi, si $A \sim 1$, tout élément ξ de F^* qui correspond à A par la proposition 2.3, dans le sens que

$$\hat{\xi} \in N(\hat{\alpha}_1\ \hat{\alpha}_2) \cap [\,\hat{b}_1.N(\hat{\alpha}_1)] \cap [\,\hat{b}_2.N(\hat{\alpha}_2)\,],$$

est tel que
$$\hat{\xi} \in N(\hat{\alpha}_1\ \hat{\alpha}_2) \cap [\,(N(\hat{\alpha}_1) \cap N(\hat{\alpha}_2)).N(\hat{\phi})\,].$$

On considère ensuite

$$A = \genfrac{(}{)}{0pt}{}{\alpha_1 \quad \beta_1}{K} \otimes_K \genfrac{(}{)}{0pt}{}{\alpha_2 \quad \beta_2}{K}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1' \\ & K \end{pmatrix} \boxtimes_K \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2' \\ & K \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \qquad A'' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1\beta_1' \\ & K \end{pmatrix} \boxtimes_K \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2\beta_2' \\ & K \end{pmatrix} \sim A \boxtimes_K A'$$

On suppose que A et A' - et par conséquent A'' - possèdent une involution de seconde espèce qui fixe F. Si ξ et ξ' sont des éléments de F^* qui correspondent respectivement à A et A', dans le sens qu'on vient de préciser, alors $\xi'' = \xi\xi'$ correspond à A''.

En particulier, si A et A' sont isomorphes, alors $A'' \sim 1$ et

$$\hat{\xi}'' \in N(\hat{\alpha}_1\ \hat{\alpha}_2) \cap [(N(\hat{\alpha}_1) \cap N(\hat{\alpha}_2)).N(\hat{\phi})\ ],$$

ce qui montre que les classes de $\hat{\xi}$ et de $\hat{\xi}'$ dans $G(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2,\hat{\phi})$ coïncident.

On a donc bien une application

$$\psi\ :\ \mathcal{QJ}\ (\alpha_1,\alpha_2,K/F) \to G(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2,\hat{\phi})$$

et le raisonnement précédent montre qu'il s'agit d'un morphisme.

Pour prouver que ce morphisme est surjectif, on considère ξ dans F^* tel que

$$\hat{\xi} \in N(\hat{\alpha}_1\ \hat{\alpha}_2) \cap [\ N(\hat{\alpha}_1).N(\hat{\phi})] \cap [\ N(\hat{\alpha}_2).N(\hat{\phi})\ ]$$

On peut trouver $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$ dans $N(\hat{\phi})$ et $\hat{n}_1$, $\hat{n}_2$ dans $N(\hat{\alpha}_1)$ et $N(\hat{\alpha}_2)$ respectivement, tels que $\hat{\xi} = \hat{n}_1\ \hat{b}_1 = \hat{n}_2\ \hat{b}_2$. Comme l'image de K^* par $N_{K/F}$ est $\{x \in F^* | \hat{x} \in N(\hat{\phi})\}$, on peut aussi trouver β_1,β_2 dans K^* tels que $N_{K/F}(\beta_r) = b_r$ $(r = 1,2)$. On voit que ξ correspond à l'algèbre

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ & K \end{pmatrix} \boxtimes_K \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ & K \end{pmatrix}$$

Pour terminer la démonstration, il faut prouver que

$$\ker \psi = \mathcal{QJD}(\alpha_1,\alpha_2,\ K/F)$$

Soit ξ un élément de F^* qui correspond à l'algèbre A. On pose $b_r = N_{K/F}(\beta_r)$ $(r = 1,2)$. Il faut prouver que

si $$\hat{\xi} \in N(\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2) \cap [(N(\hat{\alpha}_1) \cap N(\hat{\alpha}_2)).N(\hat{\phi})],$$

alors l'algèbre A admet une descente sur F adaptée à $F(\sqrt{\alpha_1}) \otimes_F F(\sqrt{\alpha_2})$. Comme l'élément ξ correspond à A, on a

$$\hat{\xi} \in N(\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2) \cap [\hat{b}_1.N(\hat{\alpha}_1)] \cap [\hat{b}_2.N(\hat{\alpha}_2)]$$

et, par hypothèse, $\hat{\xi} = \hat{n}.\hat{f}$ où $\hat{n} \in N(\hat{\alpha}_1) \cap N(\hat{\alpha}_2)$ et $\hat{f} \in N(\hat{\phi})$. Comme $\hat{n}$ et $\hat{\xi}$ appartiennent à $N(\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2)$, $\hat{f} \in N(\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2)$. On voit que

$$\hat{f} \in N(\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2) \cap N(\hat{\phi}) \cap [\hat{b}_1.N(\hat{\alpha}_1)] \cap [\hat{b}_2.N(\hat{\alpha}_2)]$$

par conséquent

$$\hat{f} \in N(\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2 \hat{\phi}) \cap [\hat{b}_1.N(\hat{\alpha}_1 \hat{\phi})] \cap [\hat{b}_2.N(\hat{\alpha}_2 \hat{\phi})].$$

Cela montre que A admet une descente sur F adaptée à $F(\sqrt{\alpha_1}) \otimes_F F(\sqrt{\alpha_2})$, d'après la proposition 5.1 du chapitre 1.

Corollaire 2.5. : *Soit* A *une algèbre simple, à involution de première espèce, de rang 64 sur son centre* F. *Si* A *contient un sous-corps commutatif*

$L = F(\sqrt{\alpha_1}) \otimes_F F(\sqrt{\alpha_2}) \otimes_F F(\sqrt{\phi})$ *de rang 8 sur* F *et si* $G(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\phi}) = 1$, *alors* A *se décompose en produit tensoriel de trois algèbres de quaternions et la décomposition peut être adaptée au sous-corps* L.

La démonstration est tout-à-fait semblable à celle de la proposition 1.2.

Une simple vérification montre que si α_1, α_2 et ϕ sont des éléments de F^* tels que $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ et $\hat{\phi}$ sont linéairement dépendants dans $\hat{F}$, alors $G(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\phi}) = 1$. On dit que le corps F a la propriété P si $G(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\phi}) = 1$, quels que soient les éléments

α_1, α_2, ϕ dans F^*.

<u>Corollaire 2.6.</u> : *Si le corps* F *possède la propriété* P, *alors le produit tensoriel de trois algèbres de quaternions de centre* F *admet une décomposition adaptée à tout sous-corps commutatif galoisien d'exposant 2 et de rang 8 sur* F.

<u>Corollaire 2.7.</u> : *Si le corps* F *possède la propriété* P, *alors tout corps à involution de première espèce de degré 8, de centre* F, *se décompose en produit tensoriel de corps de quaternions. De plus, la décomposition peut être adaptée à n'importe quel sous-corps commutatif maximal galoisien d'exposant 2 sur* F.

L.H. Rowen [13] a démontré que tout corps à involution de première espèce de degré 8 sur son centre, contient un sous-corps commutatif maximal galoisien d'exposant 2 sur le centre. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 2.5.

§3. Exemples

Ce paragraphe montre quelques exemples de corps qui possèdent la propriété P décrite au paragraphe précédent.

Proposition 3.1. : *Soit F un corps commutatif. Si pour tout α dans F^*, $N(\hat{\alpha})$ est d'indice 1 ou 2 dans $\hat{F}$, alors F possède la propriété P.*

Soient α_1, α_2 et ϕ des éléments de F^*. Si $N(\hat{\alpha}_1)$ ou $N(\hat{\alpha}_2) = \hat{F}$, on voit tout de suite que $G(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\phi}) = 1$. On peut donc supposer que $N(\hat{\alpha}_1)$ et $N(\hat{\alpha}_2)$ sont d'indice 2 dans $\hat{F}$. Soit $\hat{x} \in N(\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2) \cap [N(\hat{\alpha}_1).N(\hat{\phi})] \cap [N(\hat{\alpha}_2).N(\hat{\phi})]$. Si $\hat{x}$ est dans $N(\hat{\alpha}_1)$ ou $N(\hat{\alpha}_2)$, on a immédiatement

$$\hat{x} \in [N(\hat{\alpha}_1) \cap N(\hat{\alpha}_2)].N(\hat{\phi}).$$

On suppose donc que $\hat{x}$ n'est pas dans $N(\hat{\alpha}_1)$ ni dans $N(\hat{\alpha}_2)$. On peut écrire

$$\hat{x} = \hat{a}_1 \hat{f}_1 = \hat{a}_2 \hat{f}_2$$

où $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$ sont dans $N(\hat{\phi})$, $\hat{a}_1$ et $\hat{a}_2$ dans $N(\hat{\alpha}_1)$ et $N(\hat{\alpha}_2)$, respectivement. Si $\hat{a}_1 \in N(\hat{\alpha}_2)$ ou si $\hat{a}_2 \in N(\hat{\alpha}_1)$, la conclusion est immédiate. Si $\hat{a}_1 \notin N(\hat{\alpha}_2)$ et $\hat{a}_2 \notin N(\hat{\alpha}_1)$, alors $\hat{x}\,\hat{a}_1 \in N(\hat{\alpha}_2)$ et $\hat{x}\,\hat{a}_2 \in N(\hat{\alpha}_1)$, car $N(\hat{\alpha}_1)$ et $N(\hat{\alpha}_2)$ sont d'indice 2 dans $\hat{F}$. Par conséquent, $\hat{x}\,\hat{a}_1\,\hat{a}_2 \in N(\hat{\alpha}_1) \cap N(\hat{\alpha}_2)$. De plus, de $\hat{a}_1\,\hat{f}_1 = \hat{a}_2\,\hat{f}_2$, on tire $\hat{a}_1\,\hat{a}_2 = \hat{f}_1\,\hat{f}_2 \in N(\hat{\phi})$ et l'égalité

$$\hat{x} = \hat{x}\,\hat{a}_1\,\hat{a}_2.\hat{a}_1\,\hat{a}_2$$

montre que

$$\hat{x} \in [N(\hat{\alpha}_1) \cap N(\hat{\alpha}_2)].N(\hat{\phi}).$$

Proposition 3.2. : *Soit F un corps commutatif. Si F est le centre d'au plus un corps de quaternions (à isomorphisme près), alors pour tout α dans F^*, $N(\hat{\alpha})$ est d'indice 1 ou 2 dans $\hat{F}$ (et par conséquent F possède la propriété P)*

Soient α, β, γ dans F^*. Si $\hat\beta$ et $\hat\gamma \notin N(\hat\alpha)$, alors les algèbres de quaternions $\left(\frac{\alpha \quad \beta}{F}\right)$ et $\left(\frac{\alpha \quad \gamma}{F}\right)$ sont des corps. Elles sont donc isomorphes et $\hat\beta\,\hat\gamma \in N(\hat\alpha)$.

La proposition 3.2 montre, en particulier, que les corps locaux possèdent la propriété P.

Réciproque 3.3. : *Soit* F *un corps commutatif. Si pour tout* α *dans* F^*, $N(\hat\alpha)$ *est d'indice 1 ou 2 dans* $\hat F$, *alors* F *est le centre d'au plus un corps de quaternions (à isomorphisme près).*

Cette proposition est bien connue. En voici une démonstration très simple.

Soient α, β, γ, δ dans F^*. On suppose que $A = \left(\frac{\alpha \quad \beta}{F}\right)$ et $B = \left(\frac{\gamma \quad \delta}{F}\right)$ sont des corps. Il faut prouver que ces corps sont isomorphes. Comme $N(\hat\alpha)$ et $N(\hat\gamma)$ sont des sous-groupes propres de $\hat F$, il existe un élément ξ de F^* tel que $\hat\xi \notin N(\hat\alpha) \cup N(\hat\gamma)$. Alors $\hat\xi\,\hat\beta \in N(\hat\alpha)$ et $\hat\xi\,\hat\delta \in N(\hat\gamma)$ car $N(\hat\alpha)$ et $N(\hat\gamma)$ sont d'indice 2 dans $\hat F$. De plus, comme $\hat\xi \notin N(\hat\alpha)$, on a $\hat\alpha \notin N(\hat\xi)$ et, de même, $\hat\gamma \notin N(\hat\xi)$. Comme $N(\hat\xi)$ est d'indice 2 dans $\hat F$, $\hat\alpha\,\hat\gamma \in N(\hat\xi)$. Le lemme 2.2 permet alors de conclure que les corps A et B sont isomorphes.

Soit F un corps global, c'est-à-dire une extension finie du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels ou une extension de type fini d'un corps premier fini $\mathbb{F}_p$, de degré de transcendance 1 sur $\mathbb{F}_p$.

Soit V l'ensemble des places de F. Si $v \in V$, on désigne par F_v le complété de F à la place v. Si x et y sont des éléments de F_v^*, on notera $\hat x \in N_v(\hat y)$ pour : $\hat x \in N(\hat y)$ dans $\hat F_v$.

Soient α_1, α_2, ϕ, x des éléments de F^*. On suppose que

$$\hat x \in N(\hat\alpha_1\hat\alpha_2) \cap [N(\hat\alpha_1).N(\hat\phi)] \cap [N(\hat\alpha_2).N(\hat\phi)]$$

Alors, d'après le théorème de Hasse [11],

$$\hat x \in N_v(\hat\alpha_1\,\hat\alpha_2) \cap [N_v(\hat\alpha_1).N_v(\hat\phi)] \cap [N_v(\hat\alpha_2).N_v(\hat\phi)] \qquad \text{pour tout } v \in V.$$

Comme les corps F_v possèdent la propriété P,

$$\hat{x} \in [N_v(\hat{\alpha}_1) \cap N_v(\hat{\alpha}_2)].N_v(\hat{\phi}) \qquad \text{pour tout } v \in V.$$

Pour tout $v \in V$, on peut donc trouver un élément u_v de F_v^* tel que :

$$\hat{u}_v \in N_v(\hat{\alpha}_1) \cap N_v(\hat{\alpha}_2) \quad \text{et} \quad \hat{u}_v\, \hat{x} \in N_v(\hat{\phi})$$

ou, en termes de symboles de Hilbert locaux [14] :

$$(\alpha_1,u_v)_v = 1 \quad (\alpha_2,u_v)_v = 1 \quad (\phi,u_v)_v = (\phi,x)_v .$$

D'après un théorème de Tate [16], il existe $u \in F^*$ tel que pour tout $v \in V$,

$$(\alpha_1,u)_v = 1 \quad (\alpha_2,u)_v = 1 \quad (\phi,u)_v = (\phi,x)_v$$

En utilisant encore le théorème de Hasse, on voit que

$$\hat{x} \in [N(\hat{\alpha}_1) \cap N(\hat{\alpha}_2)].N(\hat{\phi}).$$

Ainsi, les corps globaux possèdent la propriété P.

Dans la suite du paragraphe, on conserve les hypothèses et notations suivantes : F est un corps valué complet à valuation non archimédienne discrète, de corps résiduel $\overline{F}$. On suppose que la caractéristique de $\overline{F}$ n'est pas 2. Soit v la valuation de F et U le groupe des inversibles de l'anneau de valuation. Soit Π une uniformisante de l'anneau de valuation : $v(\Pi) = 1$. On notera $^{-}$ l'épimorphisme canonique de l'anneau de valuation de F sur $\overline{F}$.

On utilisera les théorèmes suivants ([10] , Corollary VI.1.3 et Proposition VI.1.9)

Théorème A : *La suite* $1 \to \hat{\overline{F}} \xrightarrow{i} \hat{F} \xrightarrow{v'} \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \to 0$ *est exacte et scindée.*

Dans cette suite, i est obtenu en prenant pour chaque élément x de $\overline{F}^*$ un relèvement x' de x dans U. On définit alors $i(\hat{x}) = \hat{x}'$. L'application v' est obtenue à partir de la valuation v, par composition avec l'épimorphisme canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.

Théorème B : (1) *Si* f *est une forme quadratique sur* F *dont une diagonalisation est* *donnée par* $< u_1, u_2, \dots, u_r >$ *où* $u_i \in U$, *alors* f *est anisotrope sur* F *ssi* $\overline{f} = < \overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_r >$ *est anisotrope sur* $\overline{F}$.

(2) *Soit* $q = q_1 + < \Pi > q_2$ *où* $q_1 = < u_1, \dots, u_r >$, $q_2 = < u_{r+1}, \dots, u_n >$ $(u_i \in U)$. *Alors* q *est anisotrope sur* F *ssi* $\overline{q}_1$ *et* $\overline{q}_2$ *sont anisotropes sur* $\overline{F}$.

Ce théorème s'obtient grâce aux travaux de Springer [15].

On peut en déduire la proposition suivante :

Propositon 3.4. : *Soit* $\alpha \in F^*$.

1) *Si* $\hat{\alpha} = \hat{1}$, *alors* $N(\hat{\alpha}) = \hat{F}$.

2) *Si* $\hat{\alpha} \in \ker v' - \{\hat{1}\}$, *alors* $N(\hat{\alpha}) = i(N(i^{-1}(\hat{\alpha})))$.

3) *Si* $\hat{\alpha} \notin \ker v'$, *alors* $N(\hat{\alpha}) = \{\hat{1}, - \hat{\alpha}\}$.

Le premier point est évident.

Pour établir le deuxième point, il faut prouver d'une part que si $\hat{\beta} \in N(\hat{\alpha})$, alors $\hat{\beta} \in \ker v'$ et $i^{-1}(\hat{\beta}) \in N(i^{-1}(\hat{\alpha}))$ et d'autre part que si $\hat{\gamma} \in N(i^{-1}(\hat{\alpha}))$, alors $i(\hat{\gamma}) \in N(\hat{\alpha})$. Comme $\hat{\alpha} \in \ker v'$, on peut trouver $\alpha \in \hat{\alpha} \cap U$. Si $\hat{\beta} \notin \ker v'$, soit $u\,\Pi \in \hat{\beta}$, avec $u \in U$. Comme $\hat{\alpha} \neq \hat{1}$, les formes quadratiques $< 1, -\alpha >$ et $< -u, \alpha u >$ sont anisotropes. Le théorème B montre que la forme $< 1, -\alpha, -u\Pi, \alpha u\Pi >$ est anisotrope, par conséquent $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \neq 1$. Cela prouve que si $\hat{\beta} \in N(\hat{\alpha})$, alors $\hat{\beta} \in \ker v'$. Le fait que $i^{-1}(\hat{\beta}) \in N(i^{-1}(\hat{\alpha}))$ résulté du théorème B(1). Le même théorème montre que si $\hat{\gamma} \in N(i^{-1}(\hat{\alpha}))$, alors $i(\hat{\gamma}) \in N(\hat{\alpha})$.

Enfin, pour le troisième point, il est évident que $\hat{1} \in N(\hat{\alpha})$ et, en vertu du deuxième point, que $N(\hat{\alpha})$ ne peut pas contenir d'éléments de $\ker v' - \{\hat{1}\}$. Donc si $\hat{\beta} \in N(\hat{\alpha})$ et $\hat{\beta} \neq \hat{1}$, il faut que $\hat{\beta}$ soit dans $\hat{F} - \ker v'$. Alors $v'(\hat{\alpha}) = v'(\hat{\beta}) = 1$. Soient $u_1\,\Pi \in \hat{\alpha}$, $u_2\,\Pi \in \hat{\beta}$ avec $u_1, u_2 \in U$. Comme $\hat{\beta} \in N(\hat{\alpha})$, la forme quadratique $< 1, -u_1\Pi, -u_2\Pi, u_1u_2 >$ est isotrope sur F. D'après le théorème B, il faut que l'une des formes $< 1, u_1u_2 >$ ou $< u_1, u_2 >$ soit isotrope, ce qui revient à dire que $-u_1u_2 \in F^{*2}$ ou $-\hat{\alpha}\hat{\beta} = \hat{1}$.

Corollaire 3.5. : *Si* α_1, α_2 *et* ϕ *sont des éléments de* $\overline{F}^*$, *alors*

$$G(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2,\hat{\phi}) \cong G(i(\hat{\alpha}_1),i(\hat{\alpha}_2),i(\hat{\phi})).$$

Cela résulte simplement du point 2 de la proposition précédente et de l'injectivité de i.

Proposition 3.6. : *Le corps F possède la propriété P si et seulement si le corps résiduel $\overline{F}$ possède la propriété P.*

Le corollaire précédent montre clairement que si F a la propriété P, alors $\overline{F}$ l'a aussi. Pour prouver la réciproque, on va établir que si α_1,α_2,ϕ sont des éléments de F^* tels que $\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2$ ou $\hat{\phi}$ est dans $\hat{F}$ - ker v', alors $G(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2,\hat{\phi}) = 1$.

1) Si $\hat{\phi} \in \hat{F}$ - ker v', alors $N(\hat{\phi}) = \{\hat{1}, -\hat{\phi}\}$, d'après la proposition 3.4. Soit $\hat{x} \in N(\hat{\alpha}_1\ \hat{\alpha}_2) \cap [\, N(\hat{\alpha}_1).N(\hat{\phi})\,] \cap [\, N(\hat{\alpha}_2).N(\hat{\phi})\,]$.

On peut écrire $$\hat{x} = \hat{n}_1.\hat{f}_1 = \hat{n}_2.\hat{f}_2$$

où $\hat{f}_1,\hat{f}_2 \in N(\hat{\phi})$; $\hat{n}_r \in N(\hat{\alpha}_r)$ $(r = 1,2)$. Si $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$, alors $\hat{n}_1 = \hat{n}_2$ et et $\hat{x} \in [\, N(\hat{\alpha}_1) \cap N(\hat{\alpha}_2)\,].N(\hat{\phi})$.

Si $\hat{f}_1 \neq \hat{f}_2$, alors l'un des $\hat{f}_i$, soit $\hat{f}_1$, est égal à $\hat{1}$ et on arrive à la même conclusion.

2) Si $\hat{\alpha}_1 \in \hat{F}$ - ker v', alors $N(\hat{\alpha}_1) = \{\hat{1}, -\hat{\alpha}_1\}$. Comme on vient de voir que $\hat{\phi} \in \hat{F}$ - ker v' implique que $G(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2,\hat{\phi}) = 1$, on peut supposer que $\hat{\phi} \in$ ker v'. On peut aussi supposer que $\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2$ et $\hat{\phi}$ sont linéairement indépendants dans $\hat{F}$.

Soit $$\hat{x} \in N(\hat{\alpha}_1\ \hat{\alpha}_2) \cap [\, N(\hat{\alpha}_1).N(\hat{\phi})\,] \cap [\, N(\hat{\alpha}_2).N(\hat{\phi})\,] .$$

On peut écrire $\hat{x} = \hat{n}_1\ \hat{f}_1$ où $\hat{n}_1 \in N(\hat{\alpha}_1)$ et $\hat{f}_1 \in N(\hat{\phi})$.

Si $\hat{n}_1 = \hat{1}$, alors $\hat{x} \in N(\hat{\phi}) \subset [\, N(\hat{\alpha}_1) \cap N(\hat{\alpha}_2)\,].N(\hat{\phi})$.

Si $\hat{n}_1 \neq \hat{1}$, alors $\hat{x} = -\hat{\alpha}_1\ \hat{f}_1$. Vu l'hypothèse sur $\hat{\phi}$, $\hat{f}_1 \in$ ker v' et donc $\hat{x} \in \hat{F}$ - ker v'. Par ailleurs $\hat{x} \in N(\hat{\alpha}_1\ \hat{\alpha}_2)$, donc $\hat{\alpha}_1\ \hat{\alpha}_2 \in \hat{F}$ - ker v'. Mais comme $\hat{\alpha}_1 \in \hat{F}$ - ker v', on doit avoir $\hat{\alpha}_2 \in$ ker v' et, dès lors, $\hat{x}$ ne peut pas appartenir à $N(\hat{\alpha}_2).N(\hat{\phi})$.

3) Si $\hat{\alpha}_2 \in \hat{F}$ - ker v', le raisonnement est semblable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.A. ALBERT — A Determination of All Normal Division Algebras in Sixteen Units, *Trans. Amer. Math. Soc.* 31 (1929) 253-260.

[2] A.A. ALBERT — Normal Division Algebras of Degree Four over an Algebraic Field, *Trans. Amer. Math. Soc.* 34 (1932) 363-372.

[3] A.A. ALBERT — On the Construction of Riemann Matrices, I, *Ann. of Math.* 35 (1934) 1-28.
A Solution of the Principal Problem in the Theory of Riemann Matrices, *Ann. of Math.* 35 (1934) 500-515.
On the Construction of Riemann Matrices, II, *Ann. of Math.* 36 (1935) 376-394.

[4] A.A. ALBERT — *Structure of Algebras*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub. XXIV, Providence, 1939.

[5] C.M. CORDES — Kaplansky's Radical and Quadratic Forms over Non-Real Fields, *Acta Arithm.* 28 (1975) 253-261.

[6] J. DIEUDONNE — On the Structure of Unitary Groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 72 (1952) 367-385.

[7] S. EILENBERG - S. MacLANE — Cohomology and Galois Theory, I : Normality of Algebras and Teichmüller's Cocycle, *Trans. Amer. Math. Soc.* 64 (1948) 1-20.

[8] I.N. HERSTEIN — *Noncommutative Rings*, Carus Monog. 15, Math. Assoc. America, Buffalo, 1968.

[9] I. KAPLANSKY — Fröhlich's Local Quadratic Forms, *J. reine angew. Math.* 239-240 (1969) 74-77.

[10] T.Y. LAM — *The Algebraic Theory of Quadratic Forms*, Benjamin, 1973.

[11] S. LANG *Algebraic Number Theory*, Addison-Wesley, 1970.

[12] M.L. RACINE A Simple Proof of a Theorem of Albert, *Proc. Amer. Math. Soc.* 43 (1974) 487-488.

[13] L.H. ROWEN Central Simple Algebras with Involution, à paraître.

[14] J.P. SERRE *Corps Locaux*, Hermann, 1962.

[15] T.A. SPRINGER Quadratic Forms over a Field with a Discrete Valuation, *Indag. Math.* 17 (1955) 352-362.

[16] J. TATE Relations between K_2 and Galois Cohomology, *Invent. Math.* 36 (1976) 257-274.

[17] J.P. TIGNOL Sur les Corps à Involution de Degré 8, *C.R. Acad. Sc. Paris Sér. A* 284 (1977) 1349-1352.