DECOMPOSITION ET DESCENTE DE PRODUITS
TENSORIELS D'ALGEBRES DE QUATERNIONS

Jean-Pierre TIGNOL

Rapport n° 76 — juin 1978
Séminaire de Mathématique Pure

INTRODUCTION

Ce rapport est la suite d'un travail antérieur [5], où ont été introduites les notions de descente et de décomposition adaptées à un sous-corps, pour les produits tensoriels d'algèbres de quaternions. Ces notions, ainsi que les définitions et propriétés principales, sont rappelées au §1.

Le but du rapport est de préciser certains résultats et d'en montrer plusieurs interprétations. En particulier, on montre l'isomorphisme des quotients de certains sous-groupes des groupes de Brauer d'un corps commutatif et d'une extension galoisienne d'exposant 2. Ces isomorphismes sont décrits au §4.

Le §2 concerne les extensions quadratiques d'algèbres. Certaines propositions de nature assez technique y sont démontrées en vue de leur utilisation dans les paragraphes suivants. Il s'agit de résultats probablement connus, pour lesquels je ne connais pas de référence satisfaisante. Le §3 complète les résultats obtenus précédemment sur la descente quadratique des algèbres de quaternions. Le cas des extensions transcendantes pures de corps commutatifs est abordé au §5. Il présente un exemple de corps qui ne possède pas la propriété P décrite dans le travail précédent.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur J. Tits pour les précieux conseils qu'il m'a prodigués au cours de ce travail et remercie vivement Monsieur le Professeur P. Van Praag, ainsi que mon collègue et ami Monsieur J.P. Van Deuren, qui m'ont constamment encouragé par de nombreuses conversations enrichissantes.

§1 : CONVENTIONS, NOTATIONS ET GENERALITES SUR LES ALGEBRES SIMPLES A INVOLUTION.

Les théorèmes classiques de la théorie des algèbres simples sont utilisés sans référence explicite. On peut les trouver par exemple dans [2]. Tous les corps sont supposés de caractéristique différente de 2; de plus, les algèbres simples sont supposées de rang fini sur leur centre. Le rang d'une algèbre simple sur son centre est le carré d'un nombre entier positif, que l'on appelle *degré* de l'algèbre.

L'algèbre des matrices carrées $n \times n$ sur le corps F est notée $M_n(F)$.

Si A et B sont des algèbres simples de centre F, on dit que A et B sont *semblables* et on note $A \sim B$ s'il existe des entiers n et m tels que $M_n(F) \otimes_F A \simeq M_m(F) \otimes_F B$.

L'ensemble des classes de similitude d'algèbres simples de centre F, muni de la loi de composition déduite du produit tensoriel sur F, est un groupe appelé *groupe de Brauer* de F et noté Br(F).

Pour exprimer qu'une algèbre simple A de centre F est isomorphe à une algèbre de matrices sur F, on note $A \sim 1$.

Soient F un corps commutatif et a,b des éléments de $F^* = F - \{0\}$. Il y a une algèbre (associative) simple de rang 4 (= degré 2) sur son centre F, dont une base est $\{1,i,j,k\}$ avec les règles de multiplication suivantes : 1 est l'unité et omis dans les produits, $i^2 = a$, $j^2 = b$, $ij = -ji = k$. Cette algèbre est notée (a,b/F). Les algèbres construites de cette manière sont appelées *algèbres de quaternions*.

Algèbres à involution

Soit A une algèbre simple de centre K. On appelle *involution* de A tout anti-automorphisme de A dont le carré est l'identité. On dit qu'une involution de A est *de première espèce* si sa restriction à K est l'identité; elle est appelée *involution de seconde espèce* dans le cas contraire. Si F est le sous-corps de K fixé par une involution de seconde espèce, alors K est une extension quadratique de F.

Les algèbres qui possèdent une involution sont appelées *algèbres à involution.* La transposition est une involution de première espèce des algèbres de matrices. Les algèbres de quaternions possèdent une involution de première espèce, qui envoie i,j,k sur $-i$, $-j$, $-k$, respectivement.

Le produit tensoriel sur K de deux algèbres simples à involution de première espèce, de centre K, est une algèbre simple à involution de première espèce, de centre K; de plus, si une algèbre simple possède une involution, toute algèbre semblable possède une involution de même espèce [1, p. 156].

A.A. Albert [1, p. 161] a prouvé que les classes de similitude d'algèbres simples à involution de première espèce, de centre K, sont les éléments d'ordre 2 dans Br(K).

Les seuls exemples d'algèbres simples à involution de première espèce que l'on possède actuellement sont des produits tensoriels d'algèbres de matrices et d'algèbres de quaternions.

Soit σ une involution de première espèce d'une algèbre A, de centre K. On désigne par S_σ l'ensemble des éléments de A qui sont fixes par σ. On peut montrer que S_σ est un espace vectoriel sur K, de dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$ ou $\frac{1}{2}n(n-1)$, si n est le degré de A. L'involution est dite *de type* (+ 1) dans le premier cas, *de type* (- 1) dans le second.

Si σ et σ' sont des involutions de première espèce de l'algèbre A, de types (ε) et (ε') respectivement, alors on peut trouver dans A un élément x inversible tel que $\sigma' = \sigma.\,\mathrm{Int}(x)$ et $x^\sigma = \varepsilon\varepsilon' x$, où Int(x) est l'automorphisme de A défini par $y^{\mathrm{Int}(x)} = x^{-1} y\, x$. Pour les involutions de seconde espèce, on a une proposition analogue : si τ et τ' sont des involutions de seconde espèce de l'algèbre A, qui fixent le même sous-corps du centre de A, alors on peut trouver dans A un élément x inversible tel que $\tau' = \tau.\mathrm{Int}(x)$ et $x^\tau = x$.

Décomposition adaptée

Soit A un produit tensoriel de n algèbres de quaternions de centre F et M un sous-corps de A d'exposant 2 et de rang 2^n.

Soit $M = F(\sqrt{a_1}) \otimes_F F(\sqrt{a_2}) \otimes_F \ldots \otimes_F F(\sqrt{a_n})$ une décomposition de M en produit tensoriel d'extensions quadratiques de F. On dit que A *possède une décomposition* (en produit tensoriel d'algèbres de quaternions) *adaptée* à M s'il y a des éléments $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dans F tels que

$$A \simeq (a_1, b_1/F) \otimes_F (a_2, b_2/F) \otimes_F \ldots \otimes_F (a_n, b_n/F).$$

On peut vérifier que cette condition ne dépend pas des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ choisis pour décomposer M en produit tensoriel d'extensions quadratiques de F.

Il est facile de voir qu'une algèbre de quaternions se décompose de manière adaptée à toute extension quadratique du centre. On a prouvé dans le travail précédent [5, p. 13] qu'un produit tensoriel de deux algèbres de quaternions se décompose de manière adaptée à tout sous-corps qui est une extension galoisienne du centre, d'exposant 2 et de rang 4.

A la fin du présent travail, on montre que les produits tensoriels de trois algèbres de quaternions ne se décomposent en général pas de manière adaptée à tout sous-corps qui est une extension galoisienne du centre, d'exposant 2 et de rang 8.

Descente adaptée à un sous-corps

Soit A une algèbre de centre K, contenant un sous-corps commutatif M, extension de K.

On suppose que K est une extension d'un corps F et qu'il y a un sous-corps M' de M tel que $M \simeq M' \otimes_F K$.

On dit que A *admet une descente sur* F *adaptée à* M' si A provient, par extension des scalaires, d'une algèbre B de centre F, contenant M'.

En particulier, soit A une algèbre de quaternions sur K et M une extension galoisienne de F, d'exposant 2 et de rang $2\,[K : F]$. Si M_1 et M_2 sont deux sous-corps de M tels que

$$M \simeq M_1 \otimes_F K \simeq M_2 \otimes_F K$$

et si l'algèbre A provient, par extension des scalaires, d'une algèbre B_1 de centre F contenant M_1, alors elle provient aussi d'une algèbre B_2 de centre F contenant M_2. On dira alors simplement que l'algèbre A admet une descente sur F adaptée à M.

On peut raisonner de manière analogue si le corps K est une extension quadratique de F et que A est un produit tensoriel de deux algèbres de quaternions de centre K qui possède une involution de seconde espèce qui fixe F. Dans ce cas, si M est une extension galoisienne de F, d'exposant 2 et de rang 8 et si M_1 et M_2 sont deux sous-corps de M tels que

$$M \simeq M_1 \otimes_F K \simeq M_2 \otimes_F K,$$

alors l'algèbre A admet une descente sur F adaptée à M_1 si et seulement si elle admet une descente sur F adaptée à M_2. Il suffira donc de dire que l'algèbre A admet une descente sur F adaptée à M.

$G_F(\hat{a}_1, \hat{a}_2; \hat{a}_3)$

Soient F un corps commutatif et a un élément de F^*. On désigne par $N_F(a)$ le sous-groupe de F^* défini par :

$$N_F(a) = \{b \in F^* \mid (a,b/F) \sim 1\}.$$

Ce sous-groupe est l'ensemble des éléments de F* qui sont représentés par la forme quadratique $X^2 - a\,Y^2$; c'est aussi, dans le cas où a n'est pas un carré dans F, l'image de $F(\sqrt{a})^*$ par le morphisme "norme" $N_{F(\sqrt{a})/F}$ de $F(\sqrt{a})$ dans F.

Soit $\hat{F} = \frac{F^*}{F^{*2}}$. Si a est un élément de F*, on désigne par $\hat{a}$ la classe de a dans $\hat{F}$.

Comme, pour tout a dans F*, le groupe $N_F(a)$ contient F^{*2}, on peut définir, avec un abus de notations, $N_F(\hat{a}) = \frac{N_F(a)}{F^{*2}}$.

On retrouve ainsi la définition de [5,p.18].

Si $\hat{a}_1$ et $\hat{a}_2$ sont dans $\hat{F}$, il est très simple de voir que

$$N_F(\hat{a}_1) \cap N_F(\hat{a}_2) = N_F(\hat{a}_1) \cap N_F(\hat{a}_2) \cap N_F(\hat{a}_1\,\hat{a}_2).$$

Comme le groupe $\hat{F}$ est d'exposant 2, on peut le considérer comme espace vectoriel sur le corps à deux éléments. Soient $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$ des éléments de $\hat{F}$. Pour que l'algèbre commutative M obtenue en ajoutant à F des racines carrées de a_1, a_2 et a_3 soit un corps, il faut et il suffit que $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ et $\hat{a}_3$ soient linéairement indépendants dans $\hat{F}$. Dans ce cas, on a montré dans le travail précédent [5,p.18] qu'il est possible de classer les produits tensoriels de deux algèbres de quaternions sur $F(\sqrt{a_3})$, qui sont neutralisés par M et qui possèdent une involution de seconde espèce qui fixe F, par rapport à ceux qui admettent une descente sur F adaptée à M, à l'aide du groupe $G_F(\hat{a}_1, \hat{a}_2; \hat{a}_3)$

défini par :

$$G_F(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3) = \frac{N_F(\hat{a}_1\,\hat{a}_2) \cap [N_F(\hat{a}_1).N_F(\hat{a}_3)] \cap [N_F(\hat{a}_2).N_F(\hat{a}_3)]}{N_F(\hat{a}_1\,\hat{a}_2) \cap \{[N_F(\hat{a}_1) \cap N_F(\hat{a}_2)]\,.N_F(\hat{a}_3)\}}.$$

Ce groupe est isomorphe à :

$$\frac{[N_F(\hat{a}_1).N_F(\hat{a}_3)] \cap [N_F(\hat{a}_2).N_F(\hat{a}_3)] \cap [N_F(\hat{a}_1\,\hat{a}_2).N_F(\hat{a}_3)]}{[N_F(\hat{a}_1) \cap N_F(\hat{a}_2) \cap N_F(\hat{a}_1\,\hat{a}_2)]\,.N_F(\hat{a}_3)}$$

et aux groupes obtenus à partir des quotients précédents, en supprimant tous les ^.

§2 : EXTENSIONS QUADRATIQUES D'ALGEBRES

Soient A une algèbre simple de centre K, α un automorphisme de A tel qu'il existe un élément inversible a de A qui vérifie les conditions suivantes :

$$a^{\alpha} = a$$

pour tout x dans A, $x^{\alpha^2} = a^{-1}\ x\ a = x^{\mathrm{Int}(a)}$.

Soit B un A-module à droite, ayant une base de deux éléments : (1,u). On définit sur B une multiplication associative en convenant que 1 est l'élément unité (que l'on identifie avec l'unité de A), que $u^2 = a$ et que $xu = ux^{\alpha}$ pour tout x dans A.

De manière explicite, on pose :

$(x + uy)(x' + uy') = xx' + a\ y^{\alpha}\ y' + u(yx' + x^{\alpha}\ y')$.

On vérifie immédiatement que B est ainsi muni d'une structure d'anneau. On dit que B est une *extension quadratique de* A et on note $B = (A,\alpha,a)$.

Suivant que α fixe ou non le centre K de A, on dit que B est une extension quadratique *interne* ou *externe* de A. Cette définition, qui s'écarte de la définition analogue pour les extensions quadratiques de corps [3] provient de ce qu'un automorphisme qui fixe le centre d'une algèbre simple de rang fini est interne, par le théorème de Skolem-Noether. Dans la suite, on s'intéresse uniquement aux extensions externes.

Proposition 2.1. : *Soit* $B = (A,\alpha,a)$ *une extension quadratique externe d'une algèbre simple* A *de centre* K. *Soit* F *le sous-corps de* K *fixé par* α.
Alors B *est une algèbre simple de centre* F. *On a* $[B : F] = 4\,[A : K]$ *et le commutant* $C_B K$ *de* K *dans* B *est l'algèbre* A.

Comme α^2 est un automorphisme interne, sa restriction à K est l'identité et par conséquent K est une extension quadratique de F. Soit $K = F(k)$, où k est un élément de K − F dont le carré est dans F. On a $k^{\alpha} = -k$. Soit I un idéal bilatère non nul de B. On va montrer que $I \cap A$ est un idéal non nul de A. Comme A est simple, cela implique que $1 \cap A = A$, donc que l'élément 1 est dans I et par conséquent que I = B.

Soient x,y des éléments de A tels que $x + uy$ soit dans I. On peut supposer que x est non nul, car si uy est un élément non nul de I, alors $u.uy = ay$ est un élément non nul de $A \cap I$.

Comme I est un idéal, il faut que $(x + uy)k + k(x + uy)$ soit dans I. Or,

$(x + uy)k + k(x + uy) = xk + uyk + kx + u\ k^{\alpha}\ y = 2kx$, car k est dans le centre de A. Comme x est non nul, on voit que $A \cap I$ n'est pas réduit à $\{0\}$. On a ainsi démontré que B est une algèbre simple.

Un calcul sans difficulté suffit pour prouver que le centre de B est F et que $C_B K = A$. Comme K est une sous-algèbre simple de B, on a la relation :

$[B : F] = [C_B K : F].[K : F]$, qui montre que $[B : F] = 4\,[A : K]$.

Cela termine la démonstration.

Dans les paragraphes suivants, on considère des extensions quadratiques externes d'algèbres à involution. La proposition suivante donne une condition pour que l'involution puisse se prolonger à l'extension quadratique.

Proposition 2.2. : *On reprend les notations de la propositon 2.1 et on suppose de plus que* A *possède une involution* σ. *S'il y a un élément inversible* b *de* A *qui répond aux conditions suivantes :*

$$\sigma\alpha = \alpha\sigma\ \mathrm{Int}(b)$$

$$b^{\sigma} = b$$

$$b\, b^{\alpha} = a^{\sigma}\, a$$

alors on peut prolonger σ *en involution de* B *en posant*

$$u^{\sigma} = ub^{\alpha}\, a^{-1}.$$

La démonstration est une suite de vérifications qu'il n'est pas utile de reproduire ici.

Proposition 2.3. : *Soit* A *une algèbre simple de centre* K. *On suppose que* K *est une extension quadratique d'un corps* F. *Si* A *possède une involution de première espèce* σ *et une involution de seconde espèce* τ *qui fixe* F *alors on peut trouver une extension quadratique externe de* A, *de centre* F, *qui possède une involution de première espèce.*

Comme $\sigma\tau\sigma$ est une involution de seconde espèce de A qui fixe F, on doit avoir $\sigma\tau\sigma = \tau\ \mathrm{Int}(x)$ pour un certain x inversible dans A, tel que $x^{\tau} = x$.

On a aussi $\tau\sigma\tau = \sigma\tau\ \mathrm{Int}(x)\tau = \sigma\ \mathrm{Int}(x^{-1})$ et comme $\tau\sigma\tau$ est une involution de première espèce de même type que σ, il faut que $x^{\sigma} = x$.

Soit $\alpha = \tau\sigma$. L'application α est un automorphisme de A qui fixe F. Comme x est fixe par σ et par τ, il est fixe par α. L'extension quadratique $B = (A,\alpha,x)$ est externe, de centre F. Pour voir que l'on peut prolonger à B l'involution σ de A, il suffit d'appliquer la proposition 2.2 : l'élément x de A est inversible et remplit les conditions suivantes :

$$\sigma\alpha = \alpha\sigma \, \mathrm{Int}(x)$$

$$x^{\sigma} = x$$

$$x \, x^{\alpha} = x^{\sigma} \, x$$

En effet, $\sigma\alpha = \sigma\tau\sigma$ et $\alpha\sigma = \tau$; d'autre part $x \, x^{\alpha} = x^{\sigma}x = x^2$.

§3 : LA DESCENTE QUADRATIQUE DES ALGEBRES DE QUATERNIONS

Soit F un corps commutatif et L une extension galoisienne de F, de rang 4 et d'exposant 2.

Soit $L = F(\sqrt{a_1}) \otimes_F F(\sqrt{a_2})$ une décomposition de L en produit tensoriel d'extensions quadratiques de F. On pose $K = F(\sqrt{a_2})$. Dans le premier travail, on a donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'une algèbre de quaternions de centre K, neutralisée par L, admette une descente sur F adaptée à L. Cette condition s'énonce comme suit [5,p.9] : l'algèbre $(a_1, b/K)$ admet une descente sur F adaptée à L si et seulement si $(a_1, N_{K/F}(b)/F) \sim 1$.

Cette condition est d'ailleurs équivalente à l'existence d'une involution de seconde espèce de $(a_1, b/K)$ qui fixe F [1,p.160], [5,p.13], ce qui montre que si une algèbre de quaternions sur K admet une descente sur F, la descente peut être adaptée à tout sous-corps commutatif d'exposant 2 et de rang 4 sur F.

On désigne par $Br(F;F(\sqrt{a_1}))$ le groupe des classes de similitude d'algèbres simples de centre F qui sont neutralisées par $F(\sqrt{a_1})$. Comme elles sont neutralisées par une extension quadratique du centre, ces algèbres sont semblables à des algèbres de quaternions sur F, contenant $F(\sqrt{a_1})$. On définit de manière analogue $Br(K;L)$. Soit $\otimes_F K$ le morphisme d'extension des scalaires, de $Br(F)$ dans $Br(K)$, qui associe à toute algèbre A de centre F l'algèbre $A \otimes_F K$, de centre K.

On définit un morphisme n de $Br(K;L)$ dans $Br(F;F(\sqrt{a_1}))$: si $(a_1,b/K)$ est une algèbre de quaternions sur K neutralisée par L, l'image par n de la classe de $(a_1,b/K)$ est la classe de $(a_1,N_{K/F}(b)/F)$.

La condition nécessaire et suffisante de descente sur F adaptée à L s'exprime simplement comme ceci : l'image de $Br(F;F(\sqrt{a_1}))$ par $\otimes_F K$ est le noyau de n. Par ailleurs, le noyau de $\otimes_F K$ est l'ensemble $Br(F;K)$ des classes de similitude d'algèbres simples de centre F qui sont neutralisées par K. En désignant par $Br(F;F(\sqrt{a_1}),K)$ l'intersection de $Br(F;F(\sqrt{a_1}))$ et de $Br(F;K)$, et par H le quotient de $Br(F;F(\sqrt{a_1}))$ par $n(Br(K;L))$, on a une suite exacte :

$$1 \to Br(F;F(\sqrt{a_1}),K) \xrightarrow{i} Br(F;F(\sqrt{a_1})) \xrightarrow{\otimes_F K} Br(K;L) \xrightarrow{n} Br(F;F(\sqrt{a_1})) \xrightarrow{e} H \to 1 \qquad (3.1)$$

où i et e sont des morphismes canoniques.

Le groupe $Br(F;F(\sqrt{a_1}))$ est isomorphe à $\frac{F^*}{N_F(a_1)}$, par l'application qui fait correspondre à l'algèbre $(a_1,b/F)$ la classe de b dans F^* modulo $N_F(a_1)$.

De même, $Br(K;L)$ est isomorphe à $\frac{K^*}{N_K(a_1)}$ et le morphisme $\otimes_F K$ correspond au morphisme

$\hat{\imath}$ de $\frac{F^*}{N_F(a_1)}$ dans $\frac{K^*}{N_K(a_1)}$, qui provient de l'inclusion de F^* dans K^*. On voit aussi que le morphisme n correspond au morphisme $\hat{N}_{K/F}$ de $\frac{K^*}{N_K(a_1)}$ dans $\frac{F^*}{N_F(a_1)}$, qui provient du morphisme $N_{K/F}$ de K^* dans F^*. (L'image par $N_{K/F}$ d'un élément de $N_K(a_1)$ est dans $N_F(a_1)$, car une algèbre de matrices de centre K possède toujours une descente sur F adaptée à L.)

Soit $A = (a_1,b/F)$ une algèbre de quaternions sur F. Si la classe de A est dans l'image de $Br(K;L)$ par n, alors il y a un élément c de K^* tel que $(a_1,b/F) \simeq (a_1,N_{K/F}(c)/F)$, c'est-à-dire que $b \in N_F(a_1).N_F(a_2)$. On voit ainsi que H est isomorphe à $\frac{F^*}{N_F(a_1).N_F(a_2)}$.

<u>Proposition 3.1</u> : *Soit* $H(F)$ *une algèbre de quaternions sur* F *neutralisée par* $F(\sqrt{a_1})$ *et par* $K = F(\sqrt{a_2})$.

On a $H(F) \simeq (a_1,b/F)$ *pour un certain* $b \in N_F(a_1\ a_2)$.

L'hypothèse indique qu'il y a dans F^* des éléments c et d tels que $H(F) \simeq (a_1,c/F) \simeq (a_2,d/F)$. Par le lemme 2.2.2 [5,p.16], il y a un élément b de F^* tel que $b \in N_F(a_1\ a_2)$ et $(a_1,c/F) \simeq (a_1,b/F)$, ce qui démontre la proposition.

Cette proposition prouve que l'isomorphisme qui envoie $Br(F;F(\sqrt{a_1}))$ sur $\frac{F^*}{N_F(a_1)}$ fait correspondre à $Br(F;F(\sqrt{a_1}),K)$ le groupe $\frac{N_F(a_1).N_F(a_1\ a_2)}{N_F(a_1)}$.

La suite (3.1) donne une nouvelle suite exacte :

$$1 \to \frac{N_F(a_1).N_F(a_1\ a_2)}{N_F(a_1)} \to \frac{F^*}{N_F(a_1)} \xrightarrow{\hat{\imath}} \frac{K^*}{N_K(a_1)} \xrightarrow{\hat{N}_{K/F}} \frac{F^*}{N_F(a_1)} \to \frac{F^*}{N_F(a_1).N_F(a_2)} \to 1 \quad (3.2)$$

que l'on peut contracter :

$$1 \to \frac{F^*}{N_F(a_1).N_F(a_1\ a_2)} \xrightarrow{\hat{\imath}} \frac{F^*}{N_K(a_1)} \xrightarrow{\hat{N}_{K/F}} \frac{N_F(a_1).N_F(a_2)}{N_F(a_1)} \to 1 \qquad (3.3)$$

On peut en déduire deux propositions qui seront utilisées dans le paragraphe suivant.

L'exactitude en $\frac{K^*}{N_K(a_1)}$ de la suite (3.2) donne :

<u>Proposition 3.2</u> : $N_{K/F}^{-1}\ (N_F(a_1)) = F^*.N_K(a_1)$.

D'autre part, l'exactitude en $\frac{F^*}{N_F(a_1)}$ de la suite (3.2) donne :

Proposition 3.3 : *Soit* $(a_1,b/F)$ *une algèbre de quaternions sur* F. *Si* $H(F)$ *est une algèbre de quaternions sur* F *telle que* $H(F) \otimes_F K \simeq (a_1,b/K)$, *alors* $H(F) \simeq (a_1,bu/F)$ *pour un certain* $u \in N_F(a_1\ a_2)$.

§4 : DECOMPOSITION ET DESCENTE ADAPTEES

Soient F un corps commutatif et M une extension galoisienne de F, de rang 8 et d'exposant 2. Soit $M = F(\sqrt{a_1}) \otimes_F F(\sqrt{a_2}) \otimes_F F(\sqrt{a_3})$ une décomposition de M en produit tensoriel d'extensions quadratiques de F. On pose $K = F(\sqrt{a_3})$ et on introduit les notations suivantes :

$Br_2(F;M)$ désigne le groupe des classes de similitude d'algèbres simples à involution de première espèce, de centre F, qui sont neutralisées par M.

$\mathcal{QD}\acute{e}c(F;M)$ est le groupe des classes de similitude des algèbres simples de centre F qui contiennent M et se décomposent en produit tensoriel de trois algèbres de quaternions de manière adaptée à M (voir §1).

$\mathcal{QJ}(K/F;M)$ est le groupe qui est noté $\mathcal{QJ}(a_1,a_2,K/F)$ dans [5,p.17]. On rappelle qu'il s'agit du groupe des classes de similitude des produits tensoriels de deux algèbres de quaternions sur K qui contiennent M et qui possèdent une involution de seconde espèce qui fixe F.

$\mathcal{QJD}(K/F;M)$ est noté $\mathcal{QJD}(a_1,a_2,K/F)$ dans [5]. Il s'agit du groupe des classes de similitude des produits tensoriels de deux algèbres de quaternions sur K qui contiennent M, qui possèdent une involution de seconde espèce qui fixe F et admettent une descente sur F adaptée à M.

<u>Proposition 4.1</u> : $\dfrac{Br_2(F;M)}{\mathcal{QD}\acute{e}c(F;M)} \simeq \dfrac{\mathcal{QJ}(K/F;M)}{\mathcal{QJD}(K/F;M)}$

On considère le morphisme $\otimes_F K$ de $Br(F)$ dans $Br(K)$ qui, à toute algèbre A de centre F, fait correspondre $A \otimes_F K$. Si une algèbre A de centre F possède une involution σ de première espèce, alors l'algèbre $A \otimes_F K$ possède des involutions de première et de seconde espèce. En effet, si α est l'automorphisme non identique de K sur F, alors $\sigma \otimes 1$ et $\sigma \otimes \alpha$ sont respectivement des involutions de première et et de seconde espèce de $A \otimes_F K$.

Si une algèbre A de centre F est neutralisée par M, alors elle est semblable à une algèbre de degré 8 sur F, contenant M comme sous-corps commutatif maximal et $A \otimes_F K$ est semblable à une algèbre de degré 4 sur K, contenant M comme sous-corps commutatif maximal.

Comme toute algèbre à involution de première espèce de degré 4 sur son centre se décompose en produit tensoriel de deux algèbres de quaternions, on voit que l'image de $Br_2(F;M)$ par le morphisme $\otimes_F K$ est dans $\mathcal{QJ}(K/F;M)$.

On va prouver que cette image est précisément $\mathcal{QJ}(K/F;M)$. Soit A un produit tensoriel de deux algèbres de quaternions de centre K, contenant M et possédant une involution de seconde espèce qui fixe F. La proposition 2.3 indique qu'il y a une extension quadratique externe B de A, de centre F, qui possède une involution de première espèce. Comme B contient A, il est clair que B contient M et, comme B est de degré 8 sur F, M neutralise B. La classe de similitude de B est donc dans $Br_2(F;M)$. Par ailleurs, $B \otimes_F K \sim C_B K \simeq A$, ce qui montre que l'image de la classe de similitude de B est la classe de A.

Pour achever la démonstration, il reste à prouver que l'image d'un élément de $Br_2(F;M)$ est dans $\mathcal{QJD}(K/F;M)$ si et seulement si cet élément est dans $\mathcal{QD}\acute{e}c(F;M)$. Il est clair que l'image d'un élément de $\mathcal{QD}\acute{e}c(F;M)$ est dans $\mathcal{QJD}(K/F;M)$.
Soit A une algèbre à involution de centre F, neutralisée par M. Si l'image de sa classe est dans $\mathcal{QJD}(K/F;M)$, alors on peut trouver b_1, b_2 dans F^* tels que

$$A \otimes_F K \sim (a_1,b_1/F) \otimes_F (a_2,b_2/F) \otimes_F K.$$

Alors le produit tensoriel $A \otimes_F (a_1,b_1/F) \otimes_F (a_2,b_2/F)$ est neutralisé par K. Comme K est une extension quadratique de F, ce produit tensoriel est semblable à une algèbre de quaternions $(a_3,b_3/F)$ neutralisée par K et alors

$$A \sim (a_1,b_1/F) \otimes_F (a_2,b_2/F) \otimes_F (a_3,b_3/F);$$

ce qui montre que la classe de A est dans $\mathcal{QD}\acute{e}c(F;M)$ et achève la démonstration.

On pose $K' = F(\sqrt{a_2})$, $K'' = F(\sqrt{a_2\ a_3})$, $L = K \otimes_F K'$ et on introduit les notations suivantes :

$\mathcal{QD}(L/K,K',K'';M)$ est le groupe des classes de similitude des algèbres de quaternions de centre L qui contiennent M et qui admettent des descentes sur K, K' et K" (adaptées à M).

$\mathcal{QD}(L/F;M)$ est le groupe des classes de similitude des algèbres de quaternions de centre L, qui contiennent M et qui admettent une descente sur F adaptée à M.

<u>Proposition 4.2</u> : $\dfrac{\mathcal{QJ}(K/F;M)}{\mathcal{QJD}(K/F;M)} \simeq \dfrac{\mathcal{QD}(L/K,K',K'';M)}{\mathcal{QD}(L/F;M)}$

On considère le morphisme $\otimes_K L$ de Br(K) dans Br(L) qui, à toute algèbre A de centre

K, fait correspondre l'algèbre $A \otimes_K L$ de centre L.

Soit $A = (a_1, b_1/K) \otimes_K (a_2, b_2/K)$.

On a $A \otimes_K L \sim C_A L \simeq (a_1, b_1/K) \otimes_K L$. Il est évident que $C_A L$ est une algèbre de quaternions de centre L, qui admet une descente sur K (adaptée à M). Si A possède une involution de seconde espèce qui fixe F, on peut trouver des involutions τ_1, τ_2 de A, de seconde espèce, telles que $\tau_1(a_2) = a_2$ et $\tau_2(a_2) = -a_2$. Comme ces involutions conservent L, elles conservent $C_A L$ et induisent sur cette algèbre de quaternions des involutions de seconde espèce qui fixent respectivement K' et K". L'algèbre $C_A L$ admet donc des descentes sur K' et sur K", que l'on peut choisir adaptées à M.

Cela montre que l'image de $\mathcal{QJ}(K/F;M)$ par le morphisme $\otimes_K L$ est dans $\mathcal{QD}(L/K,K',K'';M)$. On va prouver maintenant que cette image est précisément $\mathcal{QD}(L/K,K',K'';M)$.

Soit A une algèbre de quaternions de centre L, qui contient M et admet des descentes sur K,K' et K". On peut trouver b_1 dans K tel que

$$A \simeq (a_1, b_1/K) \otimes_K L \simeq (a_1, b_1/L).$$

Comme A admet une descente sur K', le corollaire 1.4.2 [5,p.9] montre que $(a_1, N_{L/K'}(b_1)/K') \sim 1$. Or, b_1 est dans K, donc $N_{L/K'}(b_1) = N_{K/F}(b_1)$ et la relation précédente peut s'écrire $(a_1, N_{K/F}(b_1)/F) \otimes_F K' \sim 1$, ce qui montre que $(a_1, N_{K/F}(b_1)/F)$ contient K'. De même, comme A admet une descente sur K", on voit que $(a_1, N_{K/F}(b_1)/F)$ contient K". La proposition 3.1 permet de conclure qu'il y a un élément b_2 dans K^* tel que

$$(a_1, N_{K/F}(b_1)/F) \otimes_F (a_2, N_{K/F}(b_2)/F) \sim 1.$$

D'après le théorème 10.16 de [1,p.159] (lemme 2.2.1 [5,p.16]) cette relation prouve que l'algèbre

$$B = (a_1, b_1/K) \otimes_K (a_2, b_2/K)$$

possède une involution de seconde espèce et il est clair que la classe de A est l'image de celle de B par le morphisme $\otimes_K L$. Pour achever la démonstration, il reste à prouver que l'image d'un élément de $\mathcal{QJ}(K/F;M)$ est dans $\mathcal{QD}(L/F;M)$ si et seulement si cet élément est dans $\mathcal{QJD}(K/F;M)$.

Il est clair que l'image d'un élément de $\mathcal{QJD}(K/F;M)$ est dans $\mathcal{QD}(L/F;M)$.

Réciproquement, soit A une algèbre de centre K neutralisée par M, telle que $A \otimes_K L$ soit semblable à une algèbre de quaternions sur L qui admet une descente sur F adaptée à M. Soit $A \otimes_K L \sim (a_1,b_1/F) \otimes_F L$.

On voit que le produit $A \otimes_K (a_1,b_1/K)$ est neutralisé par L et est donc semblable à une algèbre de quaternions sur K contenant L.

Soit $A \otimes_K (a_1,b_1/K) \sim (a_2,b_2/K)$.

On a $A \sim (a_1,b_1/K) \otimes_K (a_2,b_2/K)$. Si A possède une involution de seconde espèce qui fixe F, alors, d'après le théorème 10.16 de [1,p.159] (lemme 2.2.1 [5,p.16]),

$$(a_1,N_{K/F}(b_1)/F) \otimes_F (a_2,N_{K/F}(b_2)/F) \sim 1.$$

Or, b_1 est dans F, donc $N_{K/F}(b_1) = b_1^2$ et $(a_1,N_{K/F}(b_1)) \sim 1$. La relation ci-dessus donne $(a_2,N_{K/F}(b_2)/F) \sim 1$, ce qui prouve, par le corollaire 1.4.2 [5,p.9], que l'algèbre $(a_2,b_2/K)$ admet une descente sur F. Cela montre que la classe de A est dans $\mathcal{QJD}(K/F;M)$ et achève la démonstration.

La proposition 4.1 montre que le groupe $G_F(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)$ introduit dans le travail précédent (voir §1) est isomorphe au quotient $\dfrac{Br_2(F;M)}{\mathcal{QD}\acute{e}c(F;M)}$ et ne dépend donc pas explicitement de $\hat{a}_1,\hat{a}_2,\hat{a}_3$ mais seulement de l'extension M/F, galoisienne d'exposant 2. On pose alors $\mathcal{N}(M/F) = G_F(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)$. La proposition 4.2 montre que

$$\mathcal{N}(M/F) \simeq \frac{\mathcal{QD}(L/K,K',K'';M)}{\mathcal{QD}(L/F;M)} .$$

En voici une démonstration directe :

<u>Proposition 4.3</u> $$\frac{\mathcal{QD}(L/K,K',K'';M)}{\mathcal{QD}(L/F;M)} \simeq \frac{N_F(a_3) \cap [\,N_F(a_1).N_F(a_1\ a_2)\,] \cap [\,N_F(a_1).N_F(a_1\ a_2\ a_3)\,]}{N_F(a_3) \cap \{N_F(a_1).\,[\,N_F(a_1\ a_2) \cap N_F(a_1\ a_2\ a_3)]\,\}}$$

Soit $H(L)$ une algèbre de quaternions sur L neutralisée par M, admettant une descente sur K. On peut trouver un élément x de K* tel que $H(L) \simeq (a_1,x/K) \otimes_K L$.

Pour que $H(L)$ admette une descente sur K', il faut et il suffit d'après le corollaire 1.4.2 [5,p.9], que $(a_1,N_{L/K'}(x)/K') \sim 1$. Or, $x \in K$, donc $N_{L/K'}(x) = N_{K/F}(x)$ et la condition précédente est équivalente à celle-ci : $(a_1,N_{K/F}(x)/F)$ est neutralisée par

K'. D'après la proposition 3.1, cette condition est remplie si et seulement si $N_{K/F}(x) \in N_F(a_1).N_F(a_1\ a_2)$. De même, pour que H(L) admette une descente sur K", il faut et il suffit que $N_{K/F}(x) \in N_F(a_1).N_F(a_1\ a_2\ a_3)$.

Comme $N_{K/F}(x)$ est évidemment dans $N_F(a_3)$, on a :

$$N_{K/F}(x) \in N_F(a_3) \cap [\, N_F(a_1).N_F(a_1\ a_2)\,] \cap [\, N_F(a_1).N_F(a_1\ a_2\ a_3)\,]$$

si et seulement si H(L) admet des descentes sur K, K' et K". Pour que H(L) admette une descente sur F adaptée à M, il faut et il suffit que H(L) provienne, par extension des scalaires, d'une algèbre de quaternions H'(K) sur K qui contienne $K(\sqrt{a_1})$ et qui admette une descente sur F. D'après la proposition 3.3, on doit alors avoir $H'(K) \simeq (a_1, ux/K)$ pour un certain $u \in N_K(a_1\ a_2)$ et pour que H'(K) admette une descente sur F, il faut et il suffit, d'après le corollaire 1.4.2 [5,p.9], que $N_{K/F}(ux) \in N_F(a_1)$.

La condition nécessaire et suffisante pour que H(L) admette une descente sur F adaptée à M est donc que

$$N_{K/F}(x) \in N_{K/F}\,(N_K(a_1\ a_2)).N_F(a_1).$$

Comme $F^{*2} \subset N_F(a_1)$, on a :

$$\begin{aligned} N_{K/F}(N_K(a_1\ a_2)).N_F(a_1) &= N_{K/F}(F^*.N_K(a_1\ a_2)).N_F(a_1) \\ &= N_{K/F}(N^{-1}_{K/F}(N_F(a_1\ a_2))).N_F(a_1), \text{ par la proposition 3.2} \\ &= [\, N_F(a_1\ a_2) \cap N_{K/F}(K^*)\,].N_F(a_1) \\ &= [\, N_F(a_1\ a_2) \cap N_F(a_3)\,].N_F(a_1). \end{aligned}$$

Comme $N_F(a_1\ a_2) \cap N_F(a_3) = N_F(a_1\ a_2) \cap N_F(a_3) \cap N_F(a_1\ a_2\ a_3) = N_F(a_1\ a_2) \cap N_F(a_1\ a_2\ a_3)$,

on a aussi : $N_{K/F}(N_K(a_1\ a_2)).N_F(a_1) = [\, N_F(a_1\ a_2) \cap N_F(a_1\ a_2\ a_3)\,].N_F(a_1)$

et on voit que H(L) admet une descente sur F adaptée à M si et seulement si

$$N_{K/F}(x) \in N_F(a_3) \cap \{N_F(a_1).[\, N_F(a_1\ a_2) \cap N_F(a_1\ a_2\ a_3)\,]\}.$$

Il est très simple de vérifier que l'on a ainsi défini un isomorphisme de

$$\frac{\mathcal{QD}(L/K,K',K'';M)}{\mathcal{QD}(L/F;M)} \text{ dans } \frac{N_F(a_3) \cap [\, N_F(a_1).N_F(a_1\ a_2)\ ] \cap [\ N_F(a_1).N_F(a_1\ a_2\ a_3)\ ]}{N_F(a_3) \cap \{N_F(a_1).\ [\, N_F(a_1\ a_2) \cap N_F(a_1\ a_2\ a_3)\ ]\}}$$

Pour terminer ce paragraphe, on va prouver, par une méthode analogue à celle de [6], que toute classe de $Br_2(F;M)$ modulo $\mathcal{QD}\acute{e}c(F;M)$ peut être représentée par une algèbre de quaternions.

Proposition 4.4 : *Soit* A *une algèbre simple de centre* F, *possédant une involution de première espèce. Si* A *est neutralisée par* $M = F(\sqrt{a_1}) \otimes_F F(\sqrt{a_2}) \otimes_F F(\sqrt{a_3})$, *alors on peut trouver une algèbre de quaternions* H(F) *neutralisée par* M *et des éléments* b_1, b_2, b_3 *dans* F^* *tels que*

$$A \sim (a_1,b_1/F) \otimes_F (a_2, b_2/F) \otimes_F (a_3,b_3/F) \otimes_F H(F).$$

Soit $K = F(\sqrt{a_3})$. Comme dans la démonstration de la proposition 4.1, l'algèbre $A \otimes_F K$ est semblable à un produit tensoriel de deux algèbres de quaternions sur K, possédant une involution de seconde espèce qui fixe F. Soit $A \otimes_F K \sim (a_1,c_1/K) \otimes_K (a_2,c_2/K)$. D'après le théorème 10.16 [1,p.159] (lemme 2.2.1 [5,p.16]), le fait que $A \otimes_F K$ possède une involution de seconde espèce qui fixe F entraîne que $(a_1, N_{K/F}(c_1)/F) \otimes_F (a_2, N_{K/F}(c_2)/F) \sim 1$. Le lemme 2.2.2 [5,p.16] indique qu'il y a un élément x de F^* qui vérifie les conditions suivantes :

$$(x, N_{K/F}(c_1\ c_2)/F) \sim 1$$

$$(xa_i,N_{K/F}(c_i)/F) \sim 1 \quad (i = 1,2).$$

Ces conditions impliquent, en vertu du corollaire 1.4.2 [5,p.9], que les algèbres $(x,c_1c_2/K)$, $(xa_i,c_i/K)$ $(i = 1,2)$ admettent une descente sur F.

Soient : $(xa_i,c_i/K) \simeq (xa_i,b_i/F) \otimes_F K$

$$(x,c_1c_2/K) \simeq (x,d/F) \otimes_F K.$$

On a : $A \otimes_F K \sim (xa_1,c_1/K) \otimes_K (xa_2,c_2/K) \otimes_K (x,c_1c_2/K)$

d'où $A \otimes_F K \sim (xa_1,b_1/F) \otimes_F (xa_2,b_2/F) \otimes_F (x,d/F) \otimes_F K$

et $A \otimes_F K \sim (a_1,b_1/F) \otimes_F (a_2,b_2/F) \otimes_F (x,b_1b_2d/F) \otimes_F K$.

On pose $H(F) = (x,b_1b_2d/F)$. La relation précédente montre que le produit tensoriel $A \otimes_F (a_1,b_1/F) \otimes_F (a_2,b_2/F) \otimes_F H(F)$ est neutralisé par K. Il est donc semblable à une algèbre de quaternions $(a_3,b_3/F)$ et

$$A \sim (a_1,b_1/F) \otimes_F (a_2,b_2/F) \otimes_F (a_3,b_3/F) \otimes_F H(F).$$

§5 : EXTENSIONS TRANSCENDANTES PURES

Conformément à la définition donnée dans le premier travail [5,p.21] on dit qu'un corps commutatif F possède la propriété P si pour toute extension galoisienne M de F, de rang 8 et d'exposant 2, on a $\mathcal{N}(M/F) \simeq 1$.

On a montré que si F est le centre d'au plus un corps de quaternions (à isomorphisme près), alors F possède la propriété P. Cela suffit pour établir que les corps finis, les corps locaux et les corps réel-clos possèdent la propriété P.

On a prouvé aussi que les corps globaux possèdent la propriété P et qu'un corps valué complet à valuation (non archimédienne) discrète possède la propriété P si et seulement si son corps résiduel la possède. Ainsi, les corps de séries formelles sur un corps qui possède la propriété P possèdent également cette propriété.

On va considérer à présent le cas des extensions transcendantes pures et montrer un exemple de corps commutatif qui ne possède pas la propriété P.

Soient F un corps commutatif et X une indéterminée sur F. On désigne par E le corps F(X) des fractions rationnelles en l'indéterminée X sur F. Tout élément de $\hat{E} = \frac{E^*}{E^{*2}}$ est représenté par un polynôme $a\,\pi_1\,\pi_2 \dots \pi_n$ où $a \in F^*$ et $\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_n$ sont des polynômes unitaires irréductibles distincts.

Le lemme suivant est un cas particulier du théorème X.2.9 de [4,p.289].

Lemme 5.1 : *Soient* $a,b \in F^*$ et $\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_n \in F[X]$ *des polynômes unitaires irréductibles distincts* $\hat{a}\,\hat{\pi}_1\,\hat{\pi}_2\dots\hat{\pi}_n \in N_E(\hat{b})$ *si et seulement si* $\hat{a} \in N_F(\hat{b})$ *et, pour* $i = 1,2,\dots,n$, $\hat{\pi}_i \in N_E(\hat{b})$.

Soit encore $c \in F^*$. Il résulte du lemme que $\hat{a}\,\hat{\pi}_1\,\hat{\pi}_2\dots\hat{\pi}_n \in N_E(\hat{b}).N_E(\hat{c})$ si et seulement si $\hat{a} \in N_F(\hat{b}).N_F(\hat{c})$ et, pour $i = 1,2,\dots, n$, $\hat{\pi}_i$ est dans $N_E(\hat{b})$ ou $N_E(\hat{c})$.

Proposition 5.2 : *Soient* F *un corps commutatif et* M *une extension galoisienne de* F, *de rang 8 et d'exposant 2. Si* X *est une indéterminée sur* M *alors*

$$\mathcal{N}(M(X)/F(X)) \simeq \mathcal{N}(M/F)$$

Soit $M \simeq F(\sqrt{a_1}) \otimes_F F(\sqrt{a_2}) \otimes_F F(\sqrt{a_3})$. Pour alléger les notations, on pose momentanément :

$n_F(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3) = [N_F(\hat{a}_1).N_F(\hat{a}_3)] \cap [N_F(\hat{a}_2).N_F(\hat{a}_3)] \cap [N_F(\hat{a}_1\,\hat{a}_2).N_F(\hat{a}_3)]$ et

$d_F(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3) = [\,N_F(\hat{a}_1) \cap N_F(\hat{a}_2) \cap N_F(\hat{a}_1\ \hat{a}_2)\,].N_F(\hat{a}_3)$.

Les définitions de $n_E(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)$ et de $d_E(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)$ sont semblables. On a

$$N(M/F) = \frac{n_F(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)}{d_F(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)} \quad \text{et} \quad N(M(x)/F(x)) = \frac{n_E(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)}{d_E(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)} .$$

D'après le lemme, un élément $\hat{a}.\hat{\pi}_1\ \hat{\pi}_2\ldots\hat{\pi}_n$ de $\hat{E}$ est dans $n_E(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)$ si et seulement si $\hat{a} \in n_F(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)$ et, pour $i = 1,2,\ldots,n, \hat{\pi}_i$ est dans $N_E(\hat{a}_1) \cap N_E(\hat{a}_2) \cap N_E(\hat{a}_1\ \hat{a}_2)$ ou dans $N_E(\hat{a}_3)$. Donc, si $\hat{a}\ \hat{\pi}_1\ \hat{\pi}_2\ldots\hat{\pi}_n$ est dans $n_E(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)$, alors $\hat{\pi}_1\ \hat{\pi}_2\ldots\hat{\pi}_n$ est dans $d_E(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)$.

On définit un morphisme ψ de $n_E(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)$ dans $n_F(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)$ par : $\psi(\hat{a}.\hat{\pi}_1\ \hat{\pi}_2\ldots\hat{\pi}_n) = \hat{a}$.

Ce morphisme est évidemment surjectif. Pour démontrer la proposition, il suffit de prouver que l'image d'un élément de $n_E(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)$ est dans $d_F(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)$ si et seulement si cet élément est dans $d_E(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)$.

Il est clair que l'image d'un élément de $d_E(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)$ est dans $d_F(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)$.

Réciproquement, soit $\hat{a}\ \hat{\pi}_1\ \hat{\pi}_2\ldots\hat{\pi}_n$ un élément de $n_E(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)$ tel que $\hat{a} \in d_F(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)$. Comme $\hat{\pi}_1\ \hat{\pi}_2\ldots\hat{\pi}_n$ et $\hat{a}$ sont dans $d_E(\hat{a}_1,\hat{a}_2;\hat{a}_3)$, leur produit y est aussi, et la proposition est démontrée.

On va montrer à présent que le corps $F = \mathbb{Q}(x)$ des fractions rationnelles en une indéterminée sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels ne possède pas la propriété P. De manière précise, on pose $a_1 = X$, $a_2 = -1$, $a_3 = -(1 + X^2)X^{-1}$ et on va démontrer que X est dans $[\,N_F(a_1).N_F(a_3)\,] \cap [\,N_F(a_2).N_F(a_3)\,] \cap N_F(a_1\ a_2)$ mais pas dans $[\,N_F(a_1) \cap N_F(a_2)\,].N_F(a_3)$.

Les relations suivantes :

$$X(1 - a_3) = X + 1 + X^2 = (1 + X)^2 - X \in N(a_1) \tag{5.1}$$

$$X(-a_3) = 1 + X^2 \in N(a_2) \tag{5.2}$$

$$X = -(-X) \in N(a_1\ a_2) \tag{5.3}$$

prouvent la première affirmation.

Pour prouver la seconde, il faut montrer qu'il est impossible de trouver des éléments R,S dans F tels que

$$X(R^2 + (1 + X^2)X^{-1} S^2) \in N_F(a_1) \cap N_F(a_2).$$

On suppose avoir trouvé des éléments R,S,T,U,V,W non tous nuls dans F tels que

$$S^2 + X R^2 + X^2 S^2 = T^2 + U^2 \qquad (5.4)$$

$$S^2 + X R^2 + X^2 S^2 = V^2 - X W^2 \qquad (5.5)$$

En chassant tous les dénominateurs, on peut supposer que R,S,T,U,V,W sont dans $\mathbf{Z}[X]$. De plus, on peut supposer que ces éléments ne sont pas tous divisibles par 2.

En réduisant (5.4) modulo 2, on trouve :

$$(S + XS)^2 + XR^2 \equiv (T + U)^2 \qquad \text{mod.}2$$

d'où $$XR^2 \equiv (S + XS + T + U)^2 \qquad \text{mod.}2$$

et comme X n'est pas un carré dans $\mathbf{F}_2(X)$, on en déduit

que $$R \equiv 0 \qquad \text{mod.}2 \qquad (5.6)$$

et $$S + XS \equiv T + U \qquad \text{mod.}2 \qquad (5.7)$$

De même, en réduisant (5.5) modulo 2 et en tenant compte de (5.6), on trouve :

$$W \equiv 0 \qquad \text{mod.}2 \qquad (5.8)$$

et $$S + XS \equiv V \qquad \text{mod.}2 \qquad (5.9)$$

On peut trouver des polynômes R_1, W_1, V_1 dans $\mathbf{Z}[X]$ tels que $R = 2 R_1$, $W = 2 W_1$ et $V = S + XS + 2 V_1$.

L'égalité (5.5) devient :

$$S^2 + 4 X R_1^2 + X^2 S^2 = S^2 + 2 X S^2 + X^2 S^2 + 4 V_1(S + XS) + 4 V_1^2 - 4 X W_1^2$$

d'où $$2 X R_1^2 = X S^2 + 2 V_1(S + XS) + 2 V_1^2 - 2 X W_1^2$$

et $$S \equiv 0 \qquad \text{mod.}2.$$

En vertu de (5.7) et (5.9), on a aussi :

$$T \equiv U \qquad \text{mod.}2$$

et $$V \equiv 0 \qquad \text{mod.}2.$$

On peut trouver des polynômes S_1, T_1 dans $\mathbf{Z}[X]$ tels que $S = 2\,S_1$ et $T = U + 2\,T_1$.
L'égalité (5.4) devient :

$$4\,S_1^2 + 4\,X\,R_1^2 + 4\,X^2\,S_1^2 = U^2 + 4\,UT_1 + 4\,T_1^2 + U^2$$

d'où $$2\,S_1^2 + 2\,X\,R_1^2 + 2\,X^2\,S_1^2 = U^2 + 2\,UT_1 + 2\,T_1^2$$

et $$U \equiv 0 \qquad \text{mod.}2.$$

On a donc $R \equiv S \equiv T \equiv U \equiv V \equiv W \equiv 0$ mod.2, contrairement à l'hypothèse que ces éléments ne sont pas tous divisibles par 2.

Soit $M = F(\sqrt{a_1}) \otimes_F F(\sqrt{a_2}) \otimes_F F(\sqrt{a_3})$ avec, comme précédemment, $F = \mathbb{Q}(X)$, $a_1 = X$, $a_2 = -1$, $a_3 = -(1 + X^2)X^{-1}$. On pose $K = F(\sqrt{a_3})$. Comme $N(M/F) \neq 1$, on peut donner des exemples de produits tensoriels de deux algèbres de quaternions de centre K, qui sont neutralisés par M et qui possèdent une involution de seconde espèce qui fixe F, mais qui n'admettent pas de descente sur F adaptée à M. Il suffit pour cela de trouver des éléments b_1, b_2 de K^*, tels que X corresponde à l'algèbre $(a_1, b_1/K) \otimes_K (a_2, b_2/K)$, au sens que l'on a précisé dans la proposition 2.2.4 [5,p.18], c'est-à-dire que $(a_i, X.N_{K/F}(b_i)/F) \sim 1$ pour $i = 1,2$.
D'après les relations (5.1 et 2), il suffit de trouver b_1, b_2 dans K^* tels que $N_{K/F}(b_1) = 1 - a_3$ et $N_{K/F}(b_2) = - a_3$. On peut par exemple prendre $b_1 = -(1 + \sqrt{a_3})$, $b_2 = - \sqrt{a_3}$ et on arrive à la conclusion que l'algèbre

$$A = (a_1, -(1 + \sqrt{a_3})/K) \otimes_K (a_2, -\sqrt{a_3}/K)$$

possède une involution de seconde espèce qui fixe F, mais n'admet pas de descente sur F adaptée à $M \simeq K(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2})$.
Par ailleurs, A n'est pas un corps, car on peut trouver dans $(a_2, -\sqrt{a_3}/K)$ un élément dont le carré est $-(1 + \sqrt{a_3})$. Donc, A est semblable à un corps de quaternions sur K, qui possède une involution de seconde espèce qui fixe F et qui, par conséquent, admet une descente sur F.

L'algèbre A admet donc une descente sur F. Par extension quadratique, comme dans la proposition 4.1, on obtient un produit tensoriel de trois algèbres de quaternions qui contient M mais ne se décompose pas de manière adaptée à M.

En utilisant la proposition 5.2, on peut établir que l'algèbre

$$B = (a_1, -(1+\sqrt{a_3})Y/K(Y,Z)) \otimes_{K(Y,Z)} (a_2, -\sqrt{a_3}\, Z/K(Y,Z)),$$

où K, a_1, a_2, a_3 ont la même signification que précédemment et Y, Z sont des indéterminées sur K, possède une involution de seconde espèce qui fixe $F(Y,Z)$ mais pas de descente sur $F(Y,Z)$ adaptée à $M(Y,Z)$.

Par ailleurs, on peut démontrer que B est un corps. Je ne sais pas si ce corps admet une descente sur $F(Y,Z)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.A. ALBERT, *Structure of Algebras*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub. XXIV, Providence, 1939.

[2] A. BLANCHARD, *Les Corps non Commutatifs*, Presses Univ. France, Coll. SUP, 1972.

[3] J. DIEUDONNE, Les Extensions Quadratiques des Corps non Commutatifs et leurs Applications, *Acta Math* 87, (1952), 175-242.

[4] T.Y. LAM, *The Algebraic Theory of Quadratic Forms*, Benjamin, 1973.

[5] J.-P. TIGNOL, *Applications de la Descente Quadratique des Algèbres Simples à l'Etude de la Structure des Corps à Involution*, Rapport Sém. Math. Pure 69, Louvain, 1977.

[6] J.-P. TIGNOL, Sur les Classes de Similitude de Corps à Involution de Degré 8, *C.R. Acad. Sc. Paris Sér. A*, à paraître.