UN COMPLEXE DE GROUPES ABELIENS ASSOCIE A UNE EXTENSION ABELIENNE FINIE D'EXPOSANT 2 DE CORPS COMMUTATIFS.

TIGNOL JEAN-PIERRE

Rapport n° 89 - November 1979
Seminaire de mathématique pure

INTRODUCTION

Ce travail a pour objet de compléter certains résultats de [17] où l'on a introduit, au chapitre 1, un complexe fini de groupes abéliens associé à une extension abélienne finie d'exposant 2 de corps commutatifs, dans le but d'étudier l'homomorphisme "symbole quaternionien", du groupe k_2 F de J. Milnor dans le sous-groupe Br_2 (F) du groupe de Brauer d'un corps F. Les principaux résultats obtenus à l'aide de ce complexe sont les suivants : tout élément de Br_2 (F) neutralisé par une extension abélienne élémentaire de rang 8 de F est la classe d'un produit tensoriel d'algèbres de quaternions [17, cor.3.22] et il existe des corps à involution de première espèce, de degré 8, qui ne se décomposent pas en produit tensoriel d'algèbres de quaternions [17, cor.2.21]. L'existence de tels corps a été démontrée par S.A. Amitsur, L.H. Rowen et l'auteur [1].

On montre ici que le complexe défini dans [17, ch.1] peut être prolongé de telle sorte que le complexe prolongé associé à une extension abélienne élémentaire de rang 4 est acyclique. Cette propriété permet de retrouver, sous une forme plus commode et plus directe, plusieurs résultats du chapitre 3 de [17] et d'expliquer certaines limitations qui y étaient ressenties [17,p.92]. De plus, les résultats ainsi obtenus permettent de résoudre une question qui n'avait pu être entièrement éclaircie précédemment (voir corollaire 6).

Dans le dernier paragraphe, on indique certaines relations entre le complexe défini au paragraphe 1 et un autre complexe de groupes abéliens, qui intervient dans la théorie des formes quadratiques. Celui-ci a été introduit par R. Elman, T.Y. Lam et A.R. Wadsworth, dans un article ([6]) qui m'a suggéré le présent travail.

Dans ce dernier paragraphe, on montre que l'exemple utilisé par S.A. Amitsur, L.H. Rowen et l'auteur [1] pour construire un corps à involution de première espèce qui ne se décompose pas en produit tensoriel de corps de quaternions permet d'apporter une réponse négative à une question posée par R. Elman, T.Y. Lam et A.R. Wadsworth [4, quest.6.3] ; cet exemple indique aussi que dans certains cas, le complexe introduit par R. Elman, T.Y. Lam et A.R. Wadsworth n'est pas acyclique. Ce fait a également été remarqué par A.R. Wadsworth, qui m'en a communiqué une démonstration différente de celle qui est donnée ici [18].

§0 : Conventions et Notations

Tous les corps considérés dans ce travail sont supposés de caractéristique différente de 2 et les algèbres simples sont supposées de dimension finie sur leur centre.

Si F est un corps commutatif, on note $F^{\times}$ le groupe multiplicatif des éléments non nuls de F et $\hat{F}$ le groupe quotient de $F^{\times}$ par $F^{\times 2}$. La classe dans $\hat{F}$ d'un élément a de $F^{\times}$ est notée $\hat{a}$.

Deux algèbres simples A, B de même centre F sont dites *semblables* s'il y a des algèbres de matrices M, M' sur F telles que $A \otimes_F M$ et $B \otimes_F M'$ soient isomorphes par un isomorphisme qui fixe F. La relation de similitude est notée $\sim$ et la classe de similitude d'une algèbre simple A est notée [A]. Le produit tensoriel sur F induit une loi de groupe sur l'ensemble des classes de similitude d'algèbres simples de centre F. Ce groupe est appelé *groupe de Brauer* de F ; on le note : Br(F).

Le noyau de l'endomorphisme de Br(F) qui envoie tout élément sur son carré est désigné par $Br_2(F)$. Si K est une extension du corps F, l'homomorphisme d'extension des scalaires, de Br(F) dans Br(K), est noté $ext_{K/F}$ et son noyau est noté Br (K/F).

Soient a, b des éléments non nuls d'un corps F. On désigne par (a, b/F) l'élément de Br_2 (F) qui est la classe de l'algèbre sur F dont une base est (1, i, j, k), avec les relations 1 est l'unité, $i^2 = a$, $j^2 = b$, $ij = -ji = k$.
Une telle algèbre est appelée *algèbre de quaternions* sur F.

Pour tout $a \in F^{\times}$, on définit un sous-groupe de $F^{\times}$ par :

$$N_F(a) = \{x \in F^{\times} \mid (a, x / F) = 1\} .$$

Les classes dans $\hat{F}$ des éléments de $N_F(a)$ forment un sous-groupe de $\hat{F}$, que l'on note $\hat{N}_F(a)$. Puisque les groupes $N_F(a)$ et $\hat{N}_F(a)$ ne dépendent que de la classe de a dans $\hat{F}$, on peut aussi poser :

$$N_F(\hat{a}) = N_F(a) \quad ; \quad \hat{N}_F(\hat{a}) = \hat{N}_F(a).$$

Deux formes quadratiques q et q'non dégénérées sur un corps F sont dites *semblables*, ce que l'on note : $q \sim q'$, s'il y a des formes hyperboliques h et h' sur F telles que les sommes orthogonales $q + h$ et $q' + h'$ soient isométriques. L'anneau des classes de similitude de formes quadratiques non dégénérées est noté WF ; c'est *l'anneau de Witt* de F. La classe de similitude d'une forme non dégénérée q est notée $\tilde{q}$ ou $q \sim$.
La forme quadratique dont une diagonalisation est

$$a_1 X_1^2 + a_2 X_2^2 + \dots + a_n X_n^2$$

est désignée par $< a_1, a_2, \dots, a_n >$.

L'ensemble des classes dans WF des formes dont la dimension est paire est un idéal que l'on note IF.
Pour tout entier strictement positif n, on désigne par $I^n F$ la n-ème puissance de IF. On pose aussi $I^{\circ}F = WF$.
On définit le *discriminant* d'une forme quadratique $<a_1, a_2, \dots, a_n>$ par :

$$d_{\pm}(< a_1, a_2, \dots, a_n>) = (-\hat{1})^{\varepsilon(n)} . \prod_{i=1}^{n} \hat{a}_i \text{, où } \varepsilon(n) = n(n-1)/2.$$

Il est facile de vérifier que le discriminant induit un isomorphisme du groupe (additif) quotient de IF par I^2F sur $\hat{F}$.(voir

[7,p.38]). Comme les classes des formes $<1,-a,-b,ab>$ engendrent (additivement) I^2F, l'application qui envoie $<1,-a,-b,ab>^{\sim}$ sur $(a,b/F)$ se prolonge de manière unique en un homomorphisme c_F du groupe additif I^2F dans $Br_2(F)$. Cet homomorphisme est appelé *invariant de Witt.*

Soit K une extension finie d'un corps F et s une application F- linéaire non nulle de K sur F. Toute forme bilinéaire sur un espace vectoriel E sur K donne naissance, par composition avec s, à une forme bilinéaire sur E considéré comme espace vectoriel sur F. On en déduit un homomorphisme du groupe additif WK dans WF, appelé *transfert* et noté s_* (voir [7,ch.7]). Le cas particulier suivant sera utilisé au §3 : soit K une extension quadratique d'un corps F et soit ξ un élément de K-F tel que $\xi^2 \in F$. On définit une application F- linéaire de K sur F par les conditions : $s(1) = 0$; $s(\xi) = 1$. Alors, pour $x \in K^\times$, on a :

$$s_* (<x>^{\sim}) = <s(x)>^{\sim} . <1, -N_{K/F} (x)>^{\sim}$$

si $s(x) \neq 0$ (c'est-à-dire si $x \in K - F$)

et $s_* (<x>^{\sim}) = 0$ si $s(x) = 0$ (c'est-à-dire si $x \in F$).

§1 : Un complexe de groupes abéliens associé à une extension abélienne finie d'exposant 2.

Dans ce paragraphe, F désigne un corps (commutatif, de caractéristique différente de 2) et M une extension abélienne d'exposant 2 de F, de rang fini non inférieur à 2. Soit $\mathcal{S}(M/F)$ l'ensemble des sous-corps de M contenant F, de codimension 2 dans M et soit $(M)_F$ le noyau de l'homomorphisme naturel de $\hat{F}$ dans $\hat{M}$. Comme $(M)_F$ et $\hat{F}$ sont des espaces vectoriels sur le corps à deux éléments, on peut former leur produit tensoriel $(M)_F \otimes \hat{F}$.

Soit C(M/F) la suite de groupes abéliens :

$$\bigoplus_{m\in(M)_F} \hat{N}_F(m) \xrightarrow{\varphi} (M)_F \otimes \hat{F} \xrightarrow{\psi} Br_2(F) \xrightarrow{ext} Br_2(M) \xrightarrow{\oplus\, Cor} \bigoplus_{X\in\mathcal{S}(M/F)} Br_2(X)$$

où φ est l'homomorphisme qui envoie $(x_m)_{m\in(M)_F}$ sur $\sum_m m \otimes x_m$, où ψ envoie $\sum_m m \otimes x_m$ sur $\otimes(m, x_m/F)$ et où $\oplus$ Cor est la somme des homomorphismes $Cor_{M/X}$ de corestriction, de Br(M) dans Br(X). Il est facile de vérifier que cette suite est un complexe, c'est-à-dire que le composé de deux homomorphismes successifs est l'homomorphisme trivial. Les groupes d'homologie de ce complexe C (M/F) en $(M)_F \otimes \hat{F}$, $Br_2(F)$ et $Br_2(M)$ sont notés respectivement :

$$N_1\ (M/F),\quad N_2\ (M/F)\quad \text{et}\quad N_3\ (M/F).$$

Soient $i \in \{1,2,3\}$ et n un entier strictement positif. On dit que le corps F *possède la propriété* P_i (n) si, pour toute extension abélienne M de F, d'exposant 2, telle que $1 < [M : F] \leq 2^n$, le groupe N_i (M/F) est réduit à l'élément neutre ; on dit que le corps F *possède la propriété* P_i s'il possède la propriété P_i (n) pour tout entier n strictement positif.

Par exemple, tout corps quasi algébriquement clos (c'est-à-dire : satisfaisant la condition C_1 [11, ch.10, §7]) possède évidemment la propriété P_i pour $i = 1,2,3$. En particulier, les corps algébriquement clos, les corps finis, les extensions de degré de transcendance 1 d'un corps algébriquement clos possèdent ces propriétés. Dans [17,pp. 28 et 30], on montre que les corps locaux (c'est-à-dire les corps complets pour une valuation discrète dont le corps résiduel est fini) possèdent les propriétés P_1 et P_2 pour tout entier strictement positif n. Il résulte du corrollaire 13 ci-dessous que ces corps possèdent également la propriété P_3. Ce même corollaire indique que les corps globaux possèdent les propriétés P_2 et P_3. Je ne sais pas s'ils possèdent également la propriété P_1.
Il est démontré dans [1, Th. 5.1] (voir aussi [17, ch.4, §3]) qu'un corps de fractions rationnelles en une indéterminée sur le corps des nombres rationnels ne possède pas la propriété P_2 (3) et, dans [17, ch. 4, §1], on montre que le corps des fractions rationnelles en deux indéterminées sur le corps des nombres rationnels ne possède pas la propriété P_1 (3).

Par ailleurs, il est clair que tout corps possède les propriétés P_1 (1) et P_2 (1). J.K. Arason [2, Cor. 4.6] a prouvé que tout corps possède la propriété P_3 (1). D'après un théorème de C. Riehm [8, n° 5.5] et W. Scharlau [10], une algèbre simple A dont le centre K est une extension quadratique d'un corps F possède une involution de seconde espèce qui fixe F si et seulement si $\mathrm{Cor}_{K/F}([A]) = 1$ dans $\mathrm{Br}_2(F)$. L'énoncé : "tout corps possède la propriété P_3 (1)" est donc équivalent au suivant : "pour toute algèbre simple A dont le centre K est une extension quadratique d'un corps F, possédant une involution de première espèce et une involution de seconde espèce qui fixe F, il y a une algèbre simple B de centre F, à involution de première espèce, telle que $A \sim B \otimes_F K$". Sous cette forme, la propriété P_3 (1) a également été établie, pour tout corps commutatif, dans [14, Prop. 2.3]. L.H. Rowen en a également donné une démonstration [9, Th. 3.4].

Il est bien connu que tout corps possède la propriété P_1 (2). (voir par exemple : [7, ch. 3, exerc. 12] , [12, p. 267], [2, Lemma 1.7] [1, Lemma 6.3]. [17, Prop. 1.5]).

Cela signifie que si a_1, a_2, b_1, b_2 sont des éléments non nuls d'un corps F, tels que $(a_1, b_1/F) = (a_2, b_2/F)$, alors il y a un élément x de $F^\times$ tel que :

$(a_1, b_1 / F) = (a_1, x / F) = (a_2, x / F) = (a_2, b_2 / F)$.

Il est démontré dans [16, Th.1] [17, Prop. 2.13], que tout corps possède la propriété P_2 (2). Enfin, les résultats du paragraphe suivant montrent que tout corps possède la propriété P_3 (2) (voir corollaire 4). D'après le théorème de C. Riehm et W. Scharlau indiqué ci-dessus, cela signifie que si une algèbre simple A, dont le centre L est une extension abélienne élémentaire de rang 4 d'un corps F, possède une involution de première espèce et, pour chaque extension quadratique K de F contenue dans L, une involution de seconde espèce qui fixe K, alors il y a une algèbre simple B de centre F, à involution de première espèce, telle que $A \sim B \otimes_F L$. Comme tout corps possède la propriété P_1 (3), on peut en déduire aussi que si une algèbre simple A à involution de première espèce, dont le centre L est une extension abélienne élémentaire de rang 4 d'un corps F, est telle que pour toute extension quadratique K de F contenue dans L il y a une algèbre simple B_K à involution de première espèce, de centre K, telle que $A \sim B_K \otimes_K L$, alors il y a une algèbre simple B à involution de première espèce, de centre F, telle que $A \sim B \otimes_F L$.

§2. Une suite exacte associée à une tour d'extensions

Soit M une extension abélienne d'exposant 2 de F, de rang fini non inférieur à 2 et soit K un corps, autre que F, compris entre M et F.

L'objet de cette section est de donner une suite exacte qui relie les groupes $\mathcal{N}_i$ (K/F) et $\mathcal{N}_i$ (M/F), pour i = 1, 2, 3. Soit $\mathcal{S}$ (M/F) l'ensemble des sous-corps de M contenant F et de codimension 2 dans M. On définit de manière analogue les ensembles $\mathcal{S}$ (M/K) et $\mathcal{S}$ (K/F).

Si Y est un sous-corps de M, contenant F mais non K et de codimension 2 dans M, (c'est-à-dire : $Y \in \mathcal{S}(M/F) - \mathcal{S}(M/K)$) alors le corps $Y \cap K$ contient F et est de codimension 2 dans K (c'est-à-dire : $Y \cap K \in \mathcal{S}(K/F)$).

Soit s l'application de $\mathcal{S}$ (M/F) - $\mathcal{S}$ (M/K) sur $\mathcal{S}$ (K/F) ainsi définie :

On a donc : $s\,Y = Y \cap K$. Il est aisé de vérifier que cette application est surjective et qu'elle envoie tout élément de $\mathcal{S}$ (M/F) - $\mathcal{S}$ (M/K) sur l'unique élément de $\mathcal{S}$ (K/F) qu'il contient.

Soit α (ou $\alpha_{M/K/F}$) l'homomorphisme de $\bigoplus_{X \in \mathcal{S}(K/F)} Br_2(X)$ dans $\bigoplus_{Y \in \mathcal{S}(M/F)} Br_2(Y)$ défini de la manière suivante :

$$\alpha(x_X)_{X \in \mathcal{S}(K/F)} = (y_Y)_{Y \in \mathcal{S}(M/F)}$$

avec $y_Y = ext_{Y/sY}(x_{sY})$ pour $Y \in \mathcal{S}(M/F) - \mathcal{S}(M/K)$

et $y_Y = 1$ pour $Y \in \mathcal{S}(M/K)$.

Si $Y \in \mathcal{S}(M/F) - \mathcal{S}(M/K)$ et $X = s\,Y$, il est bien connu que le diagramme suivant est commutatif : (voir [3, n° 32.3]) :

$$\begin{tikzcd} Br_2(K) \arrow[r, "ext"] \arrow[d, "Cor"'] & Br_2(M) \arrow[d, "Cor"] \\ Br_2(X) \arrow[r, "ext"'] & Br_2(Y) \end{tikzcd}$$

D'autre part, si $Y \in \mathcal{S}(M/K)$, alors l'homomorphisme $Cor_{M/Y}.ext_{M/K}$ de Br(K) dans Br (Y) est l'homothétie de rapport 2 ; l'image de Br_2 (K) dans Br_2 (Y) par cet homomorphisme est donc triviale.

Ces observations montrent que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} & & Br_2(F) \arrow[r, equal] \arrow[d, "ext"'] & Br_2(F) \arrow[d, "ext"] \\ 1 \arrow[r] & Br_2(M/K) \arrow[r] \arrow[d, "\oplus Cor"'] & Br_2(K) \arrow[r, "ext"] \arrow[d, "\oplus Cor"'] & Br_2(M) \arrow[d, "\oplus Cor"] \\ 1 \arrow[r] & \ker\alpha \arrow[r] & \bigoplus_{X\in \mathcal{S}(K/F)} Br_2(X) \arrow[r, "\alpha"] & \bigoplus_{Y\in \mathcal{S}(M/F)} Br_2(Y) \end{tikzcd} \qquad (*).$$

Soit N_3 (M/K/F) le groupe d'homologie en Br_2 (M/K) de la suite:

$$Br_2(M/F) \xrightarrow{ext} Br_2(M/K) \xrightarrow{\oplus Cor} \bigoplus_{X\in \mathcal{S}(K/F)} Br_2(X)$$

(On peut évidemment remplacer le dernier terme par ker α).

La commutativité du diagramme (*) entraîne la conclusion suivante :

1. <u>LEMME</u> : *Le noyau de l'homomorphisme de* N_3 (K/F) *dans* N_3(M/F) *induit par* $ext_{M/K}$ *est* N_3 (M/K/F).

Remarques : 1) On a : $\ker \alpha = \bigoplus_{X \in S(K/F)} \left(\bigcap_{Y \in s^{-1}X} Br_2\,(Y/X)\right).$

2) Dans le cas où M est une extension quadratique de K, l'image de Br_2 (K) dans Br_2 (M) par l'homomorphisme $ext_{M/K}$ est le noyau de l'homomorphisme $Cor_{M/K}$, car le corps K possède la propriété P_3 (1) ; cette image contient donc le noyau de $\bigoplus_{Y \in S(M/F)} Cor_{M/Y}$. Le diagramme (*) donne une suite exacte :

$$N_3\,(K/F) \to N_3\,(M/F) \to \operatorname{coker}\,(\oplus\, Cor : Br_2(M/K) \to \ker \alpha).$$

Soit $\mathcal{D}\acute{e}c$ (M/F) l'image de $(M)_F \otimes \hat{F}$ dans Br_2 (F) par l'homomorphisme ψ défini dans le complexe C (M/F). Le groupe N_2 (M/F) est donc le quotient de Br_2 (M/F) par $\mathcal{D}\acute{e}c$ (M/F).

2. <u>LEMME</u> : *Avec les notations ci-dessus, il y a une suite exacte :*

$$N_2\,(K/F) \to N_2\,(M/F) \to H_2\,(M/K/F) \to N_3\,(M/K/F) \to 1$$

où H_2 (M/K/F) *est le groupe d'homologie en* Br_2 (M/K) *de la suite :*

$$\mathcal{D}\acute{e}c\,(M/F) \xrightarrow{ext} Br_2\,(M/K) \xrightarrow{\oplus\, Cor} \bigoplus_{X \in S(K/F)} Br_2\,(X)$$

et où les homomorhismes sont naturels.

En effet, le diagramme suivant est commutatif et peut être considéré comme une suite exacte de complexes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 \to & \mathcal{D}\acute{e}c\,(M/F) & \to & Br_2\,(M/F) & \to & N_2\,(M/F) & \to 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & Br_2(M/K) & = & Br_2\,(M/K) & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & \bigoplus_{X \in S(K/F)} Br_2\,(X) & = & \bigoplus_{X \in S(K/F)} Br_2\,(X) & & &
\end{array}$$

On en déduit la suite exacte d'homologie :

$$1 \to \mathcal{D}\acute{e}c\ (M/F) \cap Br_2\ (K/F) \to Br_2\ (K/F) \to N_2\ (M/F) \to$$
$$\to H_2\ (M/K/F) \to N_3\ (M/K/F) \to 1,$$

d'où le lemme.

Soit C (M/K/F) le complexe de groupes abéliens :

$$\bigoplus_{m \in (M)_F - (K)_F} \hat{N}_F(m) \xrightarrow{\overline{\varphi}} (M)_K \otimes \hat{F} \xrightarrow{\overline{\psi}} Br_2(M/K) \xrightarrow{\oplus\, \mathrm{Cor}} \ker \alpha_{M/K/F}$$

où les homomorphismes $\overline{\varphi}$ et $\overline{\psi}$ sont définis de la manière suivante : (voir [17, ch. 1, § 3B])

$$\overline{\varphi}\ (x_m)_{m \in (M)_F - (K)_F} = \sum_m p\ (m) \otimes x_m$$

(l'application p étant l'épimorphisme canonique de $(M)_F$ sur $(M)_K$)

$$\overline{\psi}\ (\sum_m m \otimes x_m) = \bigotimes_m\ (m,\ x_m\ /\ K).$$

On désigne par H_0 (M/K/F) le noyau de $\overline{\varphi}$ et par H_1 (M/K/F), H_2 (M/K/F), les groupes d'homologie du complexe C (M/K/F) en $(M)_K \otimes \hat{F}$ et Br_2 (M/K) respectivement. (Il est immédiat que cette définition du groupe H_2 (M/K/F) est équivalente à celle donnée plus haut). Les résultats précédents permettent de modifier les derniers termes de la suite exacte associée à une tour d'extensions ([17, Prop. 1.9]).

3. PROPOSITION : *Soit* M *une extension abélienne d'exposant 2 d'un corps* F, *de rang fini non inférieur à 2 et soit* K *un corps autre que* F, *compris entre* M *et* F. *Il y a une suite exacte :*

$$H_0\ (M/K/F) \to N_1(K/F) \to N_1(M/F) \to H_1(M/K/F) \to$$
$$\to N_2(K/F) \to N_2(M/F) \to H_2(M/K/F) \to$$
$$\to N_3(K/F) \to N_3(M/F)$$

où les homomorphismes sont naturels.

Cela résulte immédiatement des deux lemmes précédents et de la proposition 1.9 de [17].

Dans le cas où M est une extension quadratique de K, on peut ajouter un terme à la suite exacte ci-dessus, d'après la deuxième remarque qui suit le lemme 1.

4. <u>COROLLAIRE</u> : *Tout corps commutatif possède la propriété* $P_3(2)$.

Soit M une extension abélienne élémentaire de rang 4 d'un corps F et soit K une extension quadratique de F contenue dans M. Comme F possède la propriété $P_3(1)$, on a N_3 (K/F) = 1. Compte tenu de la proposition 3 (ou du lemme 1) et des remarques qui suivent le lemme 1, il suffit, pour démontrer le corollaire, de prouver que l'homomorhisme $Cor_{K/F}$ de Br_2 (M/K) dans $\bigcap_{X \in S(M/F)-\{K\}} Br_2$ (X/F) est surjectif.

Soit $\{K', K''\} = S\ (M/F) - \{K\}$ et soit $Br_2\ (K', K'' / F) = Br_2\ (K' / F) \cap Br_2\ (K'' / F)$.

Soient encore a, a' des éléments de F^X tels que $(K)_F = \{\hat{1}, \hat{a}\}$ et $(K')_F = \{\hat{1}, \hat{a}'\}$. On a donc $(K'')_F = \{\hat{1}, \hat{a}\,\hat{a}'\}$.

Pour montrer que l'homomorphisme $Cor_{K/F}$ de Br_2 (M/K) dans Br_2 (K', K"/F) est surjectif, il faut prouver que tout élément de Br_2 (K', K"/F) peut s'écrire sous la forme :
$(a', N_{K/F}\ (x) / F)$, avec $x \in K^X$.
Cela résulte immédiatement du corollaire 1.10 de [17].

En voici une démonstration directe : tout élément de Br_2 (K',K"/F) peut s'écrire (a',u/F), avec $u \in F^X$, et aussi

$(a\,a', v/F)$, avec $v \in F^\times$. De l'égalité : $(a', u/F) = (aa', v/F)$ et du fait que F possède la propriété $P_1(2)$, on déduit l'existence d'un élément ω de $F^\times$, tel que :

$(a', u/F) = (a', \omega/F) = (aa', \omega/F) = (aa', v/F)$.

Ces égalités montrent que $\omega \in N_F(a)$; il y a donc un élément x de $K^\times$ tel que $\omega = N_{K/F}(x)$ et la démonstration est achevée.

5. COROLLAIRE : *Soit* M *une extension abélienne d'exposant 2 d'un corps* F*, de rang fini non inférieur à 2 et soit* K *une extension de* F *contenue dans* M*, de rang* $[K : F] = 2$ *ou* 4.
L'homomorphisme d'extension des scalaires de F *à* K*, induit un isomorphisme de* $N_2(M/F)$ *sur* $H_2(M/K/F)$.

Cela résulte immédiatement de la proposition 1.3 et du fait que tout corps possède les propriétés $P_2(2)$ et $P_3(2)$.
D'après le théroème de Riehm et Scharlau mentionné plus haut, le groupe $H_2(M/K/F)$ est le groupe noté $\dfrac{Br_2(M/K)\ J\ (F)}{\mathcal{D}\mathcal{D}\ (M/K/F)}$ dans [17], lorsque K est de rang 2 sur F. On retrouve donc le corollaire 3.5 de [17] . Lorsque M est de rang 8 et K de rang 4 sur F, le corollaire précédent donne la même conclusion que la proposition 4.2 de [14].

La proposition 1.3 permet également de répondre à une question qui n'avait pu être résolue dans [17, p. 39] : Pour tout entier positif n, un corps complet pour une valuation discrète possède la propriété $P_2(n)$ si et seulement si son corps résiduel (que l'on suppose de caractéristique différente de 2) la possède. Il ne restait en fait qu'à démontrer le résultat suivant :

6. <u>COROLLAIRE</u> : *Soit* F *un corps complet pour une valuation discrète, de corps résiduel* $\underline{F}$ *de caractéristique différente de 2 et soit* M *une extension abélienne finie d'exposant 2 de* F *de corps résiduel* $\underline{M}$. *Si l'extension* M/F *est ramifiée, alors l'homomorphisme naturel de* N_2 $(\underline{M}/\underline{F})$ *dans* N_2 (M/F) *est un isomorphisme.*

Comme l'extension M/F est abélienne d'exposant 2, son indice de ramification est 2. Soit K/F la sous-extension non ramifiée maximale de M/F.

D'après la proposition 1.12 de [17], il y a un isomorphisme naturel de N_2 $(\underline{M}/\underline{F})$ sur N_2 (K/F), et, d'après la proposition 1.13 de [17], l'homomorphisme naturel de N_2 (K/F) dans N_2(M/F) est injectif. Il suffit donc de prouver que ce monomorphisme naturel est surjectif.

On peut évidemment supposer K ≠ F. D'après la proposition 3 (ou le lemme 2), il suffit de démontrer que H_2 (M/K/F) = 1, c'est-à-dire que la suite :

$$\mathcal{D}\acute{e}c\ (M/F) \xrightarrow{\text{ext}} Br_2\ (M/K) \xrightarrow{\oplus\ \text{Cor}} \bigoplus_{X \in S(K/F)} Br_2\ (X)$$

est exacte.

On commence par introduire quelques notations :

Soit π un élément de $F^{\times}$ tel que $\hat{\pi} \in (M)_F - (K)_F$. Comme M est une extension quadratique de K, le seul élément non trivial de $(M)_K$ est la classe de π.

Tout élément de Br_2 (M/K) peut s'écrire sous la forme :

$$u = (\pi,\ x/K), \text{ avec } x \in K^{\times}.$$

quitte à remplacer x par $-\pi x$, on peut supposer que $\hat{x}$ est dans l'image canonique de $\hat{\underline{K}}$ dans $\hat{K}$. (Voir [7, ch. 6, cor. 1.3]).

Si cet élément u est dans le noyau de $\oplus$ Cor, alors on a :

$(\pi, N_{K/X}(x) / X) = 1$ pour tout $X \in \mathcal{S}(K/F)$, donc $N_{K/X}(x) \in N_X(\pi)$ pour tout $X \in \mathcal{S}(K/F)$.

Comme $\hat{\pi} \in \hat{X} - \hat{\underline{X}}$, on a $\hat{N}_X(\pi) = \{\hat{1}, -\hat{\pi}\}$. ([17, prop. 1.11] ; [13, ch. 2. prop. 3.4]).

D'autre part, comme $\hat{x}$ est dans l'image de $\hat{\underline{K}}$ dans $\hat{K}$, la classe de $N_{K/X}(x)$ dans $\hat{X}$ est dans l'image de $\hat{\underline{X}}$ (voir par exemple [11, ch. 5, p.88]) ; par conséquent $N_{K/X}(x)$ est un carré dans X, pour tout $X \in \mathcal{S}(K/F)$. D'après un théorème de R. Elman, T.Y. Lam et A.R. Wadsworth [6, Th. 2.1], cela implique que $\hat{x}$ appartient à l'image de $\hat{F}$ dans $\hat{K}$. Il est alors évident que $(\pi, x/K)$ est dans l'image de $\mathcal{D}\acute{e}c$ (M/F) par $ext_{K/F}$ et la démonstration est achevée.

§3 : Relations avec la théorie des formes quadratiques

Dans ce paragraphe, F désigne un corps (commutatif, de caractéristique différente de 2) et M est une extension abélienne finie d'exposant 2 de F.

On désigne par $W(M/F)$ le noyau de l'homomorphisme naturel (d'extension des scalaires) de WF dans WM et par $WD(M/F)$ le sous-groupe de $W(M/F)$ défini par :

$$WD(M/F) = \sum_{K \in \mathcal{Q}(M/F)} W(K/F),$$

où $\mathcal{Q}(M/F)$ est l'ensemble des extensions quadratiques de F contenues dans M.

Soit $\mathcal{S}(M/F)$ l'ensemble des sous-corps de M contenant F et de codimension 2 dans M.
Pour chaque $X \in \mathcal{S}(M/F)$, on choisit un élément ξ dans $M-X$, tel que $\xi^2 \in X$, et on définit un transfert s_* de WM dans WX à l'aide de l'application X- linéaire qui envoie 1 sur 0 et ξ sur 1.

Dans [4] et [6] , (voir aussi [5]), R. Elman, T.Y. Lam et A.R. Wadsworth ont défini les notions de 1- docilité et de 1- docilité forte : on dit que le corps F est 1- *docile* ("1- amenable") si, pour toute extension abélienne finie M de F, d'exposant 2, on a $W(M/F) = WD(M/F)$; le corps F est *fortement* 1- *docile* ("strongly 1- amenable") si, pour toute extension abélienne finie M de F, d'exposant 2, la suite de groupes abéliens :

$$0 \to WD\,(M/F) \to WF \to WM \xrightarrow{\oplus s_*} \bigoplus_{X \in \mathcal{S}(M/F)} WX,$$

que l'on note $W_{M/F}$, est exacte.

L'objet de ce paragraphe est d'étudier les relations entre les complexes $W_{M/F}$ et $C(M/F)$.

Pour alléger les notations, on pose, pour tout entier positif n,

$I^n\,(M/F) = W(M/F) \cap I^n F$

$I^n\,D(M/F) = WD(M/F) \cap I^n F$

$\bar{I}^n\,(M/F) = \dfrac{I^n(M/F)}{I^{n+1}(M/F)}$ et $\bar{I}^n\,D(M/F) = \dfrac{I^nD(M/F)}{I^{n+1}D(M/F)}$

(Par convention, $I^\circ\,(M/F) = W(M/F)$ et $I^\circ D(M/F) = WD(M/F)$).

Les groupes $I^1\,D(M/F)$ et $I^2D(M/F)$ sont caractérisés par le lemme suivant :

7. <u>LEMME</u> : *On a :* $I^1D(M/F) = WD(M/F) = \sum\limits_{K\in \mathcal{Q}(M/F)} I^1(K/F)$

$$\textit{et}\quad I^2D(M/F) = \sum_{K\in \mathcal{Q}(M/F)} I^2(K/F).$$

Les deux premières égalités sont immédiates, car toute forme sur F qui devient hyperbolique sur une extension de F est évidemment de dimension paire.

On a donc $W(M/F) = I^1(M/F)$ et $W(K/F) = I^1(K/F)$, pour $K \in \mathcal{Q}(M/F)$.

Pour établir la dernière égalité, il suffit de montrer que $I^2\,D(M/F)$ est inclus dans $\sum\limits_{K\in \mathcal{Q}(M/F)} I^2(K/F)$, car l'inclusion réciproque est évidente.

Soit $(m_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'éléments de $F^\times$ telle que $(\bar{m}_\alpha)_{\alpha\in A}$ soit une base de $(M)_F$. En utilisant [7, ch.7, thm 3.2], il n'est pas difficile de voir que

$$WD(M/F) = \sum_{\alpha \in A} WF. <1, -m_\alpha>^{\sim}$$

(C'est ainsi que R. Elman, T.Y. Lam et A.R. Wadsworth définissent WD(M/F) : voir [4]).

Tout élément q de WD(M/F) peut donc s'écrire comme une somme :

$$q = \sum_{\alpha \in A} q_\alpha . <1, -m_\alpha>^{\sim}.$$

Pour achever la démonstration, il suffit de prouver que si $q \in I^2 F$, alors $q_\alpha \in IF$ pour tout $\alpha \in A$. Soit $B = \{\alpha \in A \mid q_\alpha \notin IF\}$. En appliquant l'homomorphisme "discriminant" $d_\pm$ aux deux membres de l'équation ci-dessus, on trouve, si $q \in I^2 F$:

$$1 = \prod_{\alpha \in A} d_\pm (q_\alpha . <1, -m_\alpha>^{\sim}).$$

Tous calculs faits, le membre de droite est égal à

$$\prod_{\alpha \in B} \hat{m}_\alpha .$$

Comme la famille $(\hat{m}_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une base de $(M)_F$, l'égalité :

$$1 = \prod_{\alpha \in B} \hat{m}_\alpha .$$

implique que B est vide, ce qui termine la démonstration.

8. <u>COROLLAIRE</u> : *On a* $\bar{I}^{\circ}$ D(M/F) = 0. *L'isomorphisme "discriminant"* $d_\pm$ *induit un isomorphisme de* $\bar{I}^1$ D(M/F) *sur* $(M)_F$ *et l'invariant de Witt induit un épimorphisme de* I^2 D(M/F) *sur* *Déc* (M/F).

Cela résulte immédiatement du lemme précédent et de la commutativité des diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} \bar{I}^1 F & \xrightarrow{d\pm} & \hat{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{I}^1 K & \xrightarrow[d\pm]{} & \hat{K} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} I^2 F & \xrightarrow{c_F} & Br_2(F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ I^2 K & \xrightarrow[c_K]{} & Br_2(K) \end{array}$$

pour $K \in \mathcal{Q}(M/F)$.

D'après Arason [2. Satz 3.3] pour $X \in \mathcal{S}(M/F)$ et pour tout entier positif n, l'image par s_* de $I^n M$ est incluse dans $I^n X$.

On peut donc considérer pour tout entier positif n, le complexe de groupes abéliens :

$$0 \to I^n D(M/F) \to I^n F \to I^n M \xrightarrow{\oplus s_*} \bigoplus_{X \in \mathcal{S}(M/F)} I^n X.$$

que l'on note $I^n_{M/F}$.

La suite $I^2_{M/F}$ est plus facile à comparer au complexe $C(M/F)$, car l'invariant de Witt définit un homomorphisme de $I^2 F$ dans $Br_2(F)$. On commence par prouver, par deux réductions successives, que l'homologie de la suite $W_{M/F}$ est la même que celle de la suite $I^2_{M/F}$.

9. LEMME : *L'homologie du complexe $W_{M/F}$ est naturellement isomorphe à celle du complexe $I^1_{M/F}$.*

Pour tout entier positif n, on désigne par $\bar{I}^n_{M/F}$ le complexe suivant de groupes abéliens :

$$0 \to \bar{I}^n D(M/F) \to \bar{I}^n F \to \bar{I}^n M \xrightarrow{\oplus s_*} \bigoplus_{X \in \mathcal{S}(M/F)} \bar{I}^n X.$$

C'est le conoyau du monomorphisme canonique du complexe $I^{n+1}_{M/F}$ vers le complexe $I^n_{M/F}$.

Comme le complexe $\bar{I}^\circ_{M/F}$ est acyclique, la suite exacte d'homologie associée à la suite exacte de complexes :

$$0 \to I^1_{M/F} \to W_{M/F} \to \bar{I}^{\circ}_{M/F} \to 0$$

donne les isomorphismes cherchés.

10. PROPOSITION : *L'homologie du complexe $W_{M/F}$ est naturellement isomorphe à celle du complexe $I^2_{M/F}$.*

D'après le lemme, il suffit de démontrer que l'homologie du complexe $I^1_{M/F}$ est naturellement isomorphe à celle du complexe $I^2_{M/F}$. La démonstration est semblable à celle du lemme. Il suffit de prouver que le complexe $\bar{I}^1_{M/F}$ est acyclique. Pour cela, on utilise l'isomorphisme $d_{\pm}$ ("discriminant") de $\bar{I}^1$ F sur $\hat{F}$: Cet isomorphisme transforme la suite $\bar{I}^1_{M/F}$ en :

$$1 \to (M)_F \to \hat{F} \to \hat{M} \xrightarrow{\oplus N} \bigoplus_{X \in S(M/F)} \hat{X}$$

où $\oplus$ N est la somme des homomorphismes de $\hat{M}$ dans $\hat{X}$ induits par les homomorphismes "norme" $N_{M/X}$ de $M^{\times}$ dans $X^{\times}$. Cette dernière suite est exacte, d'après un théorème de R. Elman, T.Y. Lam et A.R. Wadworth. [6, Th. 2-1]. La proposition en découle.

11. PROPOSITION : *L'invariant de Witt induit des homomorphismes des groupes d'homologie du complexe $I^2_{M/F}$ en I^2 F et I^2 M dans les groupes N_2 (M/F) et N_3 (M/F), respectivement.*

Le corollaire 8 indique que l'image de I^2 D(M/F) par l'invariant de Witt c_F est le groupe *Déc* (M/F). En utilisant un théorème de J.K. Arason [2, Satz 4.18], on peut vérifier que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to I^2 D(M/F) & \to & I^2 F & \to & I^2 M & \xrightarrow{\oplus s_*} & \bigoplus_{X \in S(M/F)} I^2 X \\
\downarrow c_F & & \downarrow c_F & & \downarrow c_M & & \downarrow \oplus c_X \\
1 \to \mathcal{D\acute{e}c}\,(M/F) & \to & Br_2(F) & \to & Br_2(M) & \xrightarrow{\oplus \mathrm{Cor}} & \bigoplus_{X \in S(M/F)} Br_2(X)
\end{array}$$

d'où la proposition.

12. <u>COROLLAIRE</u> : *Soit* M *une extension abélienne élémentaire d'un corps* F*, de rang* 8. *L'invariant de Witt induit un épimorphisme du quotient de* W(M/F) *par* WD(M/F) *sur* $N_2(M/F)$.

Cela résulte des propositions 10 et 11, et du fait que tout élément de $Br_2(M/F)$ est dans l'image de l'invariant de Witt c_F. ([15], [16, Th.2]).

Comme d'après [1, Th. 5.1], [17, ch. 4, §3], le corps $\mathbb{Q}(t)$ des fractions rationnelles en une indéterminée t sur le corps des nombres rationnels possède une extension M abélienne élémentaire de rang 8 telle que $N_2(M/\mathbb{Q}(t))$ n'est pas réduit à l'élément neutre, ce corollaire montre que le corps $\mathbb{Q}(t)$ n'est pas 1- docile.
(Le corps M est obtenu en adjoignant à $\mathbb{Q}(t)$ des racines carrées de t, de -1 et de $t^2 + 1$).

D'après une proposition de R. Elman, T.Y. Lam et A.R. Wadsworth, [5, Prop. 3.4], les extensions de rang 4 de $\mathbb{Q}(t)$ contenues dans M ne sont pas excellentes, (voir [4, § 2]). Cette observation permet de répondre négativement à la question 6.3 de [4].

A.R. Wadsworth m'a communiqué une autre démonstration, utilisant également l'exemple de [1], du fait que le corps $\mathbb{Q}(t)$ n'est pas 1- docile. Il démontre en fait le résultat suivant

[18]:

pour qu'une extension L/F *abélienne élémentaire de rang* 4 *soit excellente, il faut et il suffit que, pour toute extension* M/F, *abélienne élémentaire de rang* 8, *contenant* L, *le groupe* $N_2(M/F)$ *soit réduit à l'élément neutre.* En particulier, un corps possède la propriété $P_2(3)$ si et seulement si toute extension abélienne élémentaire de rang 4 est excellente.

Par ailleurs, la proposition 11 permet de donner des exemples de corps possédant les propriétés P_2 et P_3, à l'aide des exemples de corps fortement 1- dociles indiqués dans l'article de R. Elman, T.Y. Lam et A.R. Wadsworth déjà cité [6].

13. <u>COROLLAIRE</u> : *Si un corps* F *est fortement 1- docile et que, pour toute extension abélienne finie* M *d'exposant 2, tout élément de* $Br_2(M)$ *est la classe d'une algèbre de quaternions, alors* F *possède les propriétés* P_2 *et* P_3.

En conséquence, les corps locaux (c'est-à-dire les corps complets pour une valuation discrète, dont le corps résiduel est fini), dyadiques ou non, les corps globaux, les extensions de degré de transcendance 1 du corps des nombres réels possèdent les propriétés P_2 et P_3 ([6, Cor. 3.5, Prop. 3.6, Th. 3.7]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.A. AMITSUR, L.H. ROWEN, J.P. TIGNOL
Division algebras of degree 4 and 8 with involution. A paraître dans *Israel J. math.*

[2] J.K. ARASON : Cohomologische Invarianten Quadratischer Formen. *J. Algebra 36* (1975) 448-491

[3] A. BABAKHANIAN : *Cohomological methods in Group Theory,* Marcel Dekker, New York, 1972.

[4] R. ELMAN, T.Y. LAM et A.R. WADSWORTH :
Amenable Fields and Pfister Extensions. *Proc. of Quadratic Form Conference* (G. Orzech, ed) Queen's Papers in Pure and applied math. vol. 46, pp 445-492. Kingston, Ontario, 1976.

[5] R. ELMAN, T.Y. LAM et A.R. WADSWORTH :
Function Fields of Pfister Forms. *Invent. math. 51* (1979) 61-75.

[6] R. ELMAN, T.Y. LAM et A.R. WADSWORTH :
Quadratic Formsunder multiquadratic Extensions, à paraître dans : *Indag. math.*

[7] T.Y. LAM : *The algebraic Theory of Quadratic Forms,* Benjamin,Reading, 1973.

[8] C. RIEHM : The Corestriction of Algebraic Structures. *Invent. math. 11* (1970) 73-98

[9] L.H. ROWEN : Central Simple Algebras viewed through centralizers, à paraître.

[10] W.SCHARLAU : Zur Existenz von Involutionen auf einfachen Algebren. *Math. Z. 145* (1975) 29-32.

[11] J.P. SERRE : *Corps locaux,* Act. Sc. et Ind. Hermann, Paris, 2ème éd. 1968

[12] J. TATE : Relations between K_2 and Galois Cohomology. *Invent. Math. 36* (1976) 257-274.

[13] J.P. TIGNOL : Applications de la descente quadratique des algèbres simples à l'étude de la structure des corps à involution, *Rapport sém. math. Pure UCL 69* (1977).

[14] J.P. TIGNOL : Décomposition et descente de produits tensoriels d'algèbres de quaternions, *Rapport sém. math. Pure UCL 76* (1978)

[15] J.P. TIGNOL : Sur les classes de similitude de corps à involution de degré 8, *C.R. Acad. Sc. Paris . Série A, 286* (1978) 875-876.

[16] J.P. TIGNOL : Central simple algebras with involution, in : *Ring Theory, Proc. of the 1978 Antwerp Conference* (F. Van Oystaeyen, éd.), pp 279-285, Marcel Dekker, New York 1979.

[17] J.P. TIGNOL : *Corps à involution de rang fini sur leur centre et de caractéristique différente de 2,* Dissertation doctorale, Louvain la Neuve 1979.

[18] A.R. WADSWORTH : Example of a nonexcellent biquadratic extension and a non 1- amenable field, manuscrit non publié.