# Structures galoisiennes dans les catégories algébriques et homologiques

Marino Gran

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

*Mémoire de synthèse*

Habilitation soutenue le 29 juin 2007
au Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées J. Liouville
de l'Université du Littoral Côte d'Opale devant le jury :

Dominique Bourn, Professeur, Université du Littoral Côte d'Opale (directeur)
Francis Borceux, Professeur, Université catholique de Louvain (examinateur)
Shalom Eliahou, Professeur, Université du Littoral Côte d'Opale (examinateur)
George Janelidze, Professeur, University of Cape Town (rapporteur)
Lászlo Márki, Professeur, A. Rényi Institute of Mathematics, Budapest (rapporteur)
Manuela Sobral, Professeur, Universidade de Coimbra (rapporteur)

# Table des matières

# 1 Introduction

La théorie classique de Galois pour les extensions de corps a été généralisée plusieurs fois dans différents domaines importants, et en apparence assez eloignés, des mathématiques. Bien évidemment, nous n'allons pas tracer ici l'évolution des diverses formes de cette théorie, dont les principales étapes sont illustrées dans l'ouvrage [5] de Borceux et Janelidze. Dans cette section, notre objectif sera, avant tout, celui d'introduire les notions catégoriques de *structure galoisienne* et de *revêtement*, en indiquant leur importance dans les exemples qui sont à l'origine de l'approche axiomatique à la théorie de Galois.

Classiquement, une extension de corps $K \subseteq E$ est galoisienne quand tout élément de $E$ est racine d'un polynôme $p(X) \in K[X]$ qui se factorise dans $E[X]$ en facteurs de premier degré et dont les racines sont simples. Pour une extension galoisienne $K \subseteq E$ de dimension finie, le théorème classique de Galois dit, en particulier, que les extensions intermédiaires $K \subseteq B \subseteq E$ sont classifiées par les sous-groupes du groupe de Galois $\mathsf{Gal}[E : K]$ de l'extension.

Le théorème de classification admet une formulation très élégante, due à Grothendieck [39], où les extensions de corps sont remplaçées par des algèbres commutatives unitaires. Si $K \subseteq E$ est une extension de corps, on dit qu'une $K$-algèbre $A$ est scindée (ou séparée) sur $E$ quand chaque élément de $A$ est racine d'un polynôme $p(X) \in K[X]$ qui se factorise dans $E[X]$ en facteurs distincts de premier degré. Supposons que $K \subseteq E$ soit une extension galoisienne de dimension finie, notons $\mathsf{Split}_K(E)$ la catégorie des $K$-algèbres de dimension finie scindées sur $E$, et $\mathsf{Gal}[E : K]\text{-}\mathsf{Set}_f$ la catégorie des $\mathsf{Gal}[E : K]$-ensembles finis. La version "à la Grothendieck" de la correspondence de Galois est l'équivalence (contravariante) de catégories

$$\mathsf{Split}_K(E) \cong \mathsf{Gal}[E : K]{-}\mathsf{Set}_f \qquad (\mathbf{A})$$

induite par le foncteur $\mathsf{Hom}_K(-, E)\colon \mathsf{Split}_K(E) \to \mathsf{Gal}[E : K]\text{-}\mathsf{Set}_f$ (où l'action de $\mathsf{Gal}[E : K]$ sur $\mathsf{Hom}_K(A, E)$ est donnée par composition). Cette équivalence de catégories contient toute l'information de la correspondance classique entre les sous-groupes du groupe de Galois et les extensions galoisiennes de corps. En fait les sous-groupes de $\mathsf{Gal}[E : K]$ correspondent aux quotients du groupe de Galois dans la catégorie $\mathsf{Gal}[E : K]\text{-}\mathsf{Set}_f$, et les corps intermédiaires sont exactement les $K$-algèbres $K \subseteq B \subseteq E$ scindées sur $E$.

Cette formulation conceptuelle de la correspondence de Galois repose implicitement sur une adjonction, celle entre la catégorie $K\text{-}\mathsf{Alg}^{\mathsf{op}}$, duale de la catégorie des $K$-algèbres commutatives unitaires de dimension finie, et la catégorie $\mathsf{Set}_f$ des ensembles finis :

$$\mathsf{Set}_f \underset{H}{\overset{I}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} K\text{--}\mathsf{Alg}^{\mathsf{op}}. \qquad (\mathbf{B})$$

Ici le foncteur $I\colon K\text{-}\mathsf{Alg}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}_f$ associe à une algèbre $A$ l'ensemble fini d'idempotents minimaux non nuls $I(A)$ de $A$, et son adjoint à droite $H\colon \mathsf{Set}_f \to K\text{-}\mathsf{Alg}^{\mathsf{op}}$ associe à un ensemble fini $X$ la $K$-algèbre $H(X)$ des applications de $X$ vers $K$. Or, la notion de $K$-algèbre $A$ scindée sur une extension $E$ est en réalité une notion purement catégorique : on peut l'exprimer simplement en termes de certains produits fibrés construits canoniquement en utilisant les unités de cette adjonction. En outre, l'équivalence de catégories **A** ne dépend que des "bonnes propriétés" de l'adjonction **B**, celles d'une structure galoisienne admissible (voir la Définition 1.5), en dévenant ainsi une illustration d'un théorème beaucoup plus général de classification des extensions (Théorème 1.10).

La *théorie catégorique de Galois* de Janelidze [42], inspirée par le travail de Grothendieck et par la théorie de Galois pour les anneaux commutatifs [64], formalise le contexte approprié où il est possible d'établir un théorème de classification des extensions suivant les modèles rappelés ci-dessus. Des nombreuses constructions en algèbre et en géometrie ont été conceptualisées et développées grâce à cette théorie.

Les contributions principales à ce sujet, présentées pour cette Habilitation, concernent :

- l'étude des extensions centrales, des commutateurs et des structures internes dans les catégories algébriques, notamment dans les variétés modulaires et dans les variétés de Mal'tsev (Section 2) ;
- l'étude de la centralité et des décompositions en produits dans les catégories de Mal'tsev et dans les catégories à facteurs permutables (Section 3) ;
- l'utilisation des structures galoisiennes dans l'étude de l'homologie des catégories semi-abéliennes (Section 4) ;
- les théories de torsion dans les catégories homologiques, et la classification des revêtements pour les structures galoisiennes induites par les théories quasi-héréditaires (Section 5).

La dernière partie de l'Habilitation (Section 6) est indépendante, et concerne nos recherches sur la complétion exacte d'une catégorie, ainsi que ses applications dans l'étude de la catégorie de l'homotopie des espaces topologiques, des catégories semi-abéliennes et des localisations des variétés algébriques.

**Structures galoisiennes**
La définition générale de structure galoisienne, dont **B** sera notre premier exemple, est la suivante :

**1.1. Définition** [42, 43]
Une *structure galoisienne* est la donnée $\Gamma = (\mathbb{C}, \mathbb{F}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, F, U)$ de deux catégories $\mathbb{C}$ et $\mathbb{F}$, d'une adjonction

$$\mathbb{F} \underset{U}{\overset{F}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} \mathbb{C}, \qquad (\mathbf{C})$$

et de deux classes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{Z}$ de flèches de $\mathbb{C}$ et de $\mathbb{F}$, respectivement, telles que :

1. $F(\mathcal{E}) \subset \mathcal{Z}$ et $U(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{E}$ ;
2. $\mathbb{C}$ possède des produits fibrés le long des flèches de $\mathcal{E}$ ;
3. $\mathbb{F}$ possède des produits fibrés le long des flèches de $\mathcal{Z}$ ;
4. les classes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{Z}$ contiennent tous les isomorphismes, sont stables par composition et sont stables par produits fibrés ;
5. la counité $\epsilon$ de l'adjonction est un isomorphisme ;
6. chaque composante $\eta_A$ de l'unité $\eta$ de l'adjonction appartient à $\mathcal{E}$.

Nous allons illustrer la notion de structure galoisienne dans trois contextes différents : le cadre classique des extensions de corps, le cadre des extensions centrales de groupes qui est à l'origine de nombreux résultats présentés dans la suite, et celui des revêtements de groupes topologiques.

**1.2. Exemple.** Soit $K$ un corps, $\mathbb{C} = K\text{-}\mathsf{Alg}^{\mathsf{op}}$ la catégorie duale de la catégorie des $K$-algèbres commutatives unitaires de dimension finie. Chaque algèbre $A$ contient un système fini d'idempotents minimaux $\{e_1, \ldots, e_n\}$, qui permet de définir le foncteur $I \colon K\text{-}\mathsf{Alg}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}_f$ en posant $I(A) = \{e_1, \ldots, e_n\}$, et qui induit une décomposition en produit $A \cong \prod_{i=1}^n Ae_i$ de l'algèbre $A$, avec la propriété que chaque $Ae_i$ n'a pas d'idempotent non trivial. Dans la catégorie duale $\mathbb{C}$, il s'agit évidemment d'une décomposition en coproduit, et toute décomposition en coproduit est de cette forme (à isomorphisme près). En associant à chaque ensemble fini $X$ la $K$-algèbre $H(X)$ des applications de $X$ vers $K$, i.e. le $X$-coproduit $H(X) = \coprod_X K$ de $K$ avec lui-même dans $\mathbb{C}$, on obtient l'adjoint à droite $H \colon \mathsf{Set}_f \to K\text{-}\mathsf{Alg}^{\mathsf{op}}$. L'adjonction

$$\mathbb{F} = \mathsf{Set}_f \underset{H}{\overset{I}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} K\text{-}\mathsf{Alg}^{\mathsf{op}} = \mathbb{C}$$

induit alors une structure galoisienne

$$\Gamma_1 = (K{-}\mathsf{Alg}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set}_f, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, I, H)$$

où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{Z}$ sont, respectivement, les classes des morphismes de $K$-$\mathsf{Alg}^{\mathsf{op}}$ et de $\mathsf{Set}_f$ [5].

**1.3. Exemple.** Soit $U\colon \mathsf{Ab} \to \mathsf{Grp}$ le foncteur d'inclusion de la catégorie $\mathsf{Ab}$ des groupes abéliens dans la catégorie $\mathsf{Grp}$ des groupes, et $ab\colon \mathsf{Grp} \to \mathsf{Ab}$ le foncteur d'abélianisation :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ab} \arrow[r, shift right, "U"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Grp}. \arrow[l, shift right, "ab"'] \end{tikzcd}$$

Cette adjonction détermine une structure galoisienne

$$\Gamma_2 = (\mathsf{Grp}, \mathsf{Ab}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, ab, U)$$

où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{Z}$ sont, respectivement, les classes d'homomorphismes surjectifs dans $\mathsf{Grp}$ et dans $\mathsf{Ab}$.

**1.4. Exemple.** Soit $U\colon \mathsf{Grp(Haus)} \to \mathsf{Grp(Top)}$ le foncteur d'inclusion de la catégorie $\mathsf{Grp(Haus)}$ des groupes séparés dans la catégorie $\mathsf{Grp(Top)}$ des groupes topologiques. Ce foncteur possède un adjoint à gauche $F\colon \mathsf{Grp(Top)} \to \mathsf{Grp(Haus)}$, qui envoie un groupe topologique $G$ sur le quotient canonique $G/\overline{\{1\}}_G$, où $\overline{\{1\}}_G$ est la fermeture du sous-groupe trivial $\{1_G\}$ de $G$ :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Grp(Haus)} \arrow[r, shift right, "U"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Grp(Top)}. \arrow[l, shift right, "F"'] \end{tikzcd}$$

Cette adjonction détermine une structure galoisienne

$$\Gamma_3 = (\mathsf{Grp(Top)}, \mathsf{Grp(Haus)}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, F, U)$$

où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{Z}$ sont, respectivement, les classes des homomorphismes surjectifs ouverts de $\mathsf{Grp(Top)}$ et $\mathsf{Grp(Haus)}$.

Pour un objet $B$ de $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{E}(B)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathbb{C} \downarrow B$ déterminée par les flèches $A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{E}$. Si $p\colon E \longrightarrow B$ est une flèche de $\mathbb{C}$, on note $p^*\colon \mathcal{E}(B) \longrightarrow \mathcal{E}(E)$ le foncteur qui associe, à toute flèche $f\colon A \longrightarrow B$ de $\mathcal{E}(B)$, la flèche $p^*(f) = \pi_1\colon E \times_B A \to E$ dans le produit fibré

$$\begin{tikzcd} E \times_B A \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A \arrow[d, "f"] \\ E \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd} \qquad (\mathbf{D})$$

de $f$ le long de $p$. Pour tout objet $B$ de $\mathbb{C}$, $\mathbf{C}$ induit une adjonction

$$\mathcal{Z}(FB) \underset{U^B}{\overset{F^B}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} \mathcal{E}(B),$$

où $F^B$ est défini par $F^B(f) = F(f)$ sur les flèches $f$ de $\mathcal{E}(B)$, et $U^B$ est défini par $U^B(x) = (\eta_B)^*U(x)$ sur les flèches $x$ de $\mathcal{Z}(FB)$.

**1.5. Définition**
Une structure galoisienne $\Gamma$ est *admissible* si, pour tout objet $B$ de $\mathbb{C}$, le foncteur $U^B\colon \mathcal{Z}(FB) \to \mathcal{E}(B)$ est pleinement fidèle.

La propriété d'admissibilité est équivalente à la préservation d'une certaine classe de produits fibrés de la part de l'adjoint à gauche $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{F}$ dans l'adjonction $\mathbf{C}$ : une structure galoisienne $\Gamma$ est admissible si et seulement si $F$ préserve les produits fibrés de la forme

$$\begin{tikzcd} B \times_{UFB} UX \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & UX \arrow[d, "U(x)"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"'] & UFB, \end{tikzcd}$$

où $x$ appartient à $\mathcal{Z}$.
Les structures galoisiennes des Exemples 1.2, 1.3 et 1.4 sont admissibles [42, 5] [XV].

**1.6. Définition**
Si $\Gamma = (\mathbb{C}, \mathbb{F}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, F, U)$ est une structure galoisienne admissible, on appelle *revêtement trivial* une flèche $f\colon A \to B$ de $\mathcal{E}$ telle que le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & UFA \arrow[d, "UF(f)"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"'] & UFB \end{tikzcd}$$

induit par les unités de l'adjonction est un produit fibré.

**1.7. Exemples**

1. Un homomorphisme $\alpha\colon A \to B$ de $K$-$\mathsf{Alg}^{\mathsf{op}}$, où $B$ est indécomposable (i.e. sans aucun élément nilpotent non trivial), est un revêtement trivial pour la structure admissible $\Gamma_1 = (K\!-\!\mathsf{Alg}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set}_f, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, I, H)$ de l'Exemple 1.2 si et seulement si $A$ est un coproduit d'un nombre fini de copies de $B$ dans $\mathbb{C}$, i.e. si et seulement s'il existe un isomorphisme d'algèbres $A \cong B \times B \cdots \times B = B^n$ pour un certain entier $n$ fini.
2. Un revêtement trivial pour la structure galoisienne $\Gamma_2 = (\mathsf{Grp}, \mathsf{Ab}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, ab, U)$ de l'Exemple 1.3 est un homomorphisme surjectif $f\colon A \to B$ de groupes tel que la restriction $\hat{f}\colon [A, A] \to [B, B]$ aux sous-groupes dérivés est un isomorphisme. De manière équivalente, $f$ est tel que $\mathsf{Ker}\,(f) \cap [A, A] = \{1\}$.
3. Un revêtement trivial pour la structure galoisienne $\Gamma_3 = (\mathsf{Grp(Top)}, \mathsf{Grp(Haus)}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, F, U)$ de l'Exemple 1.4 est un homomorphisme surjectif ouvert de groupes topologiques $f\colon A \to B$ tel que la restriction $\hat{f}\colon \overline{\{1\}}_A \to \overline{\{1\}}_B$ aux fermetures des sous-groupes triviaux est un isomorphisme.

Supposons maintenant qu'un morphisme $p\colon E \to B$ de $\mathcal{E}$ soit une *extension monadique*, i.e. que le foncteur $p^* : \mathcal{E} \downarrow B \to \mathcal{E} \downarrow E$ soit monadique ($p$ est donc un morphisme de descente effective [56]).

**1.8. Définition**

Soient $f\colon A \to B$ une flèche de $\mathcal{E}$ et $p\colon E \to B$ une extension monadique. On note $(E \times_B A, \pi_1, \pi_2)$ le produit fibré $\mathbf{D}$ de $f$ le long de $p$.

1. $f\colon A \to B$ est *scindée par* $p$ si le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E \times_B A \arrow[r, "\eta_{E\times_B A}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & UF(E \times_B A) \arrow[d, "UF(\pi_1)"] \\ E \arrow[r, "\eta_E"'] & UF(E) \end{tikzcd}$$

   est un produit fibré. Cela veut dire que $p^*(f)$ est un revêtement trivial.
2. $f\colon A \to B$ est un *revêtement* s'il existe une extension monadique $p\colon E \to B$ telle que $f$ est scindée par $p$.
3. $f\colon A \to B$ est un *revêtement normal* (ou un *revêtement galoisien*) si $f$ est scindée par $f$.

L'utilisation du terme "revêtement" est expliquée par le fait que la notion classique de revêtement d'un espace topologique est un cas particulier de la définition catégorique : la structure galoisienne en question est induite par l'adjonction entre la catégorie $\mathsf{Set}$ des ensembles et la catégorie $\mathsf{LocConn}$ des espaces localement connexes

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Set} \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{LocConn} \arrow[l, bend right, "\pi_0"'] \end{tikzcd} \quad \mathsf{Set} \underset{U}{\overset{\pi_0}{\leftrightarrows}} \mathsf{LocConn}$$

(voir, par exemple, le Chapitre 6 de [3]).

**1.9. Exemples**

1. Soient $K \subseteq B \subseteq E$ des extensions de corps de dimension finie. L'inclusion $B \to E$ correspond à un morphisme de descente effective $p\colon E \to B$ dans la catégorie $\mathbb{C} = K\text{-}\mathsf{Alg}^{\mathsf{op}}$, car $E$ et $B$ sont des corps. Si $A$ est une $B$-algèbre, le morphisme de structure $\alpha\colon B \to A$ défini par $\alpha(b) \cdot a = b \cdot a$, pour tout $b \in B$ et $a \in A$, est un morphisme d'anneaux. La $B$-algèbre $A$, vue comme morphisme $\alpha\colon A \to B$ dans $\mathbb{C}$, est scindée par $p\colon E \to B$ (pour la structure galoisienne $\Gamma_1$ de l'Exemple 1.2) si et seulement si il existe un isomorphisme de $B$-algèbre

$$E \otimes_B A \cong E^n = E \times E \cdots \times E$$

(pour un certain entier $n$). En fait, le produit fibré $E \times_B A$ dans $\mathbb{C}$ correspond à la somme amalgamée dans la catégorie des algèbres commutatives unitaires. On en déduit, en particulier, que la flèche $p\colon E \to B$ est un revêtement normal (au sens de la Définition 1.8) si et seulement si $E \otimes_B E \cong E^n = E \times E \cdots \times E$ (pour un certain entier $n$). Cela signifie exactement que l'extension $B \subseteq E$ est galoisienne au sens classique de la théorie des extensions de corps.

2. Un revêtement (normal) pour la structure galoisienne $\Gamma_2$ de l'Exemple 1.3 est simplement une *extension centrale de groupes*, i. e. un homomorphisme surjectif de groupes $f\colon A \to B$ tel que $k \cdot a = a \cdot k$, pour tout $k \in \mathsf{Ker}\,(f)$ et $a \in A$ [42].

3. Un revêtement (normal) pour la structure galoisienne $\Gamma_3$ de l'Exemple 1.4 est un homomorphisme surjectif ouvert $f\colon A \to B$ de groupes topologiques tel que $\mathsf{Ker}\,(f)$ est un groupe séparé [XV].

Dans la suite nous allons étudier des nouvelles structures galoisiennes admissibles, en caractérisant les revêtements correspondants. Dans chaque situation, la catégorie $\mathsf{Split}(E,p)$ des revêtements scindés par une extension monadique $p\colon E \to B$ de $\mathcal{E}$ pourra être décrite explicitement en termes d'actions internes du groupoïde de Galois $\mathsf{Gal}(E,p)$.

Rappelons que si $p\colon E \to B$ est une extension monadique et $\Gamma = (\mathbb{C}, \mathbb{F}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, F, U)$ est une structure galoisienne admissible, le pregroupoïde de Galois $\mathsf{Gal}(E,p)$ de $p\colon E \to B$ est défini comme l'image par le foncteur $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{F}$

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Gal}(E,p)\ :\quad F(R[p]\times_E R[p]) \arrow[r, shift left=2, "F(p_1)"] \arrow[r, "F(m)" description] \arrow[r, shift right=2, "F(p_2)"'] & F(R[p]) \arrow[r, shift left=2, "F(\pi_1)"] \arrow[r, shift right=2, "F(\pi_2)"'] & F(E) \arrow[l, "F(\Delta)" description] \end{tikzcd} \qquad (\mathbf{E})$$

de la relation d'équivalence nucléaire de $p$ (=paire noyau de $p$), qui est représentée par le diagramme suivant dans $\mathbb{C}$ :

$$\begin{tikzcd} R[p]\times_E R[p] \arrow[r, shift left=2, "p_1"] \arrow[r, "m" description] \arrow[r, shift right=2, "p_2"'] & R[p] \arrow[r, shift left=2, "\pi_1"] \arrow[r, shift right=2, "\pi_2"'] & E. \arrow[l, "\Delta" description] \end{tikzcd}$$

Il est possible de montrer que le diagramme $\mathbf{E}$ est en fait un groupoïde interne, appelé le *groupoïde de Galois* $\mathsf{Gal}(E,p)$ de l'extension $p$, pourvu que la catégorie $\mathbb{C}$ ait des bonnes propriétés d'exactitude (voir [XI] et [XV]) : ce sera toujours le cas dans les exemples que nous allons considérer dans la suite. Dans cette situation, le Théorème fondamental de la théorie catégorique de Galois, qui redonne l'équivalence $\mathbf{A}$ pour la structure galoisienne $\Gamma_1$, devient :

**1.10. Théorème** [43]
*Soit* $\Gamma = (\mathbb{C}, \mathbb{F}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, F, U)$ *une structure galoisienne admissible, et* $p\colon E \to B$ *une extension monadique. On note* $\{\mathsf{Gal}(p), \mathbb{F}\}$ *la catégorie des* $\mathsf{Gal}(p)$*-actions* $(A_0, \pi, \xi)$ *internes à* $\mathbb{F}$*, où la flèche* $\pi\colon A_0 \to F(E)$ *appartient à* $\mathcal{Z}$.
*Alors il y a une équivalence de catégories*

$$\mathsf{Split}(E,p) \cong \{\mathsf{Gal}(p), \mathbb{F}\}.$$

# 2 Structures galoisiennes et catégories algébriques

## (A) Variétés modulaires

La découverte que la théorie des extensions centrales des groupes est un cas particulier de la théorie catégorique de Galois [42] a posé des nombreuses questions à propos de la relation avec d'autres notions et théories développées en algèbre universelle et en algèbre homologique. Dans [48], Janelidze et Kelly ont jeté les bases d'une théorie générale des extensions centrales, que nous allons maintenant rappeler brièvement.

Une variété d'algèbres universelles $\mathbb{V}$ est dite à congruences modulaires, ou simplement *modulaire*, lorsque chaque algèbre $X$ de $\mathbb{V}$ a la propriété que le treillis $\mathsf{Con}_X(\mathbb{V})$ des congruences sur $X$ (= relations d'équivalence $R$ sur $X$ telles que $R$ est une sous-algèbre de $X \times X$) est modulaire. Cela signifie que le treillis $\mathsf{Con}_X(\mathbb{V})$ satisfait la condition

$$\forall R, S, T \in \mathsf{Con}_X(\mathbb{V}), \quad T \subseteq R \Rightarrow R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup T.$$

Parmi les exemples les plus significatifs de variété modulaire il y a les *variétés de Mal'tsev* [73] (groupes, quasi-groupes, anneaux, algèbres de Lie, algèbres commutatives, modules croisés) et les *variétés distributives* (treillis, algèbres d'implication) ; une variété qui est à la fois de Mal'tsev et distributive est appelée *arithmétique* (algèbres de Heyting, anneaux commutatifs réguliers de von Neumann). Les variétés de Mal'tsev ont la propriété que les congruences sur une algèbre donnée $X$ "commutent" au sens de la composition des relations

$$\forall R, S \in \mathsf{Con}_X(\mathbb{V}), \quad R \circ S = S \circ R.$$

Les variétés distributives sont telles que le treillis $\mathsf{Con}_X(\mathbb{V})$ est distributif pour chaque algèbre $X$ de la variété. Toutes ces classes d'algèbres admettent aussi des descriptions syntaxiques, en termes de lois de composition et identités [65, 60, 27, 69] : par exemple, les variétés de Mal'tsev sont caractérisées par l'existence d'une loi ternaire $p(x, y, z)$ vérifiant les axiomes $p(x, y, y) = x$ et $p(x, x, y) = y$.

Le Théorème de Birkhoff sur les variétés algébriques implique que toute sous-variété $\mathbb{F}$ d'une variété $\mathbb{V}$ détermine une réflexion

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F} \arrow[r, hook, shift right, "U"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbb{V} \arrow[l, shift right, "F"'] \end{tikzcd}$$

telle que :
(1) chaque composante $\eta_X \colon X \to UF(X)$ de l'unité de l'adjonction est un homomorphisme surjectif (= épimorphisme régulier de $\mathbb{V}$) ;
(2) $\mathbb{F}$ est fermée dans $\mathbb{V}$ pour les quotients réguliers.

Janelidze et Kelly ont démontré que toute sous-variété d'une variété modulaire $\mathbb{V}$ induit une structure galoisienne admissible $\Gamma = (\mathbb{V}, \mathbb{F}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, F, U)$, si l'on choisit comme classes de morphismes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{Z}$ les homomorphismes surjectifs de $\mathbb{V}$ et de $\mathbb{F}$, respectivement. C'est le cas de la sous-variété $\mathbb{V}_{Ab}$ des algèbres abéliennes de $\mathbb{V}$, où la définition d'algèbre abélienne est donnée en termes du commutateur des congruences [41, 40, 34].

Parmi les différentes définitions de commutateur de congruences, qui sont toutes équivalentes lorsque la variété est modulaire, rappelons celle utilisée par Gumm [40]. Si $R$ et $S$ sont deux congruences sur une algèbre $A$ dans une variété modulaire $\mathbb{V}$, on note $\Delta_S^R$ la congruence sur $S$ engendrée par les éléments $((x,x),(y,y))$ tels que $(x,y) \in R$. Le commutateur $[R,S]$ de $R$ et $S$ est la congruence sur $A$ définie par :

$$[R,S] = \{(x,y) \in A \times A \mid \exists z \in A,\, ((z,x),(z,y)) \in \Delta_S^R\}.$$

Une algèbre $A$ de $\mathbb{V}$ est *abélienne* lorsque

$$[\nabla_A, \nabla_A] = \Delta_A,$$

où $\nabla_A = \{(x,y) \mid x \in A \,\mathrm{et}\, y \in A\}$ et $\Delta_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$ sont, respectivement, la plus grande et la plus petite congruence sur $A$.

Naturellement, si $\mathbb{V}$ est la variété des groupes, en utilisant la bijection entre congruences et sous-groupes distingués, les congruences $R$ et $S$ correspondent à deux sous-groupes distingués, notés $N_R$ et $N_S$, et la congruence $[R,S]$ correspond alors au sous-groupe commutateur $[N_R, N_S]$. Dans la variété des anneaux (pas forcément unitaires) la bijection entre congruences et idéaux indique que $[R,S]$ correspond à l'idéal $I_R \cdot I_S + I_S \cdot I_R$ engendré par les éléments de la forme $i_1 \cdot j_1$ et $j_2 \cdot i_2$ (avec $i_k \in I_R$ et $j_k \in I_S$, $k \in \{1,2\}$).

Avec l'introduction de la théorie catégorique des extensions centrales, un problème naturel était celui de clarifier la relation entre la notion de revêtement (Définition 1.8) et celle d'extension centrale au sens de l'algèbre universelle, définie en utilisant le commutateur des congruences.

Un homomorphisme surjectif $f\colon A \to B$ est appelé une *extension algébriquement centrale* si et seulement si

$$[R[f], \nabla_A] = \Delta_A,$$

où

$$R[f] = \{(x,y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}$$

est la congruence nucléaire de $f\colon A \to B$. Si $\Gamma = (\mathbb{V}, \mathbb{V}_{Ab}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, F, U)$ est la structure galoisienne relative à la sous-catégorie $\mathbb{V}_{Ab}$ des algèbres abéliennes

$$\begin{tikzcd} \mathbb{V}_{Ab} \arrow[r, hook, shift right, "U"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbb{V}, \arrow[l, shift right, "ab"'] \end{tikzcd} \qquad \textbf{(F)}$$

Janelidze et Kelly ont montré dans [49] que tout revêtement normal pour $\Gamma$ dans une variété modulaire $\mathbb{V}$ est une extension algébriquement centrale. Dans [50] ces auteurs ont montré ensuite une réciproque partielle dans une variété de Mal'tsev $\mathbb{V}$, en laissant ouvert le problème pour une variété modulaire quelconque.

Dans [V] nous avons établi la réciproque dans une variété modulaire, ce qui permet de conclure :

**2.1. Théorème** [49] [V]
*Une extension $f\colon A \to B$ dans une variété modulaire $\mathbb{V}$ est algébriquement centrale si et seulement si $f\colon A \to B$ est un revêtement normal pour la structure galoisienne $\Gamma = (\mathbb{V}, \mathbb{V}_{Ab}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, F, U)$.*

La démonstration de l'implication réciproque est beaucoup plus simple que celle donnée dans le cas particulier des variétés de Mal'tsev dans [50]. Cela est possible grâce à l'utilisation des structures catégoriques internes en théorie des commutateurs, notamment des *pseudogroupoïdes* [55].

Dans une variété modulaire $\mathbb{V}$, étant données deux congruences $R$ et $S$ sur une algèbre $A$, la condition de trivialité du commutateur $[R, S] = \Delta_A$ est équivalente à l'existence d'un pseudogroupoïde sur $R$ et $S$, structure que nous allons rappeler ci-dessous.
Notons $R\square S$ la relation d'équivalence double interne (= congruence double) la plus grande sur $R$ et $S$, i.e. la sous-algèbre de $A^4 = A \times A \times A \times A$ ayant comme éléments les $(x, y, t, z) \in A^4$ tels que $xSt$, $ySz$, $xRy$ et $tRz$. On peut représenter un tel élément $(x, y, t, z)$ de $R\square S$ par le diagramme

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, dash, "S"] \arrow[d, dash, "R"'] & t \arrow[d, dash, "R"] \\ y \arrow[r, dash, "S"'] & z. \end{tikzcd} \tag{\textbf{G}}$$

**2.2. Définition** [55]
Un *pseudogroupoïde* sur $R$ et $S$ est une flèche $m\colon R\square S \to A$ dans $\mathbb{C}$, qui associe l'élément $m(x, y, t, z)$ de $A$ à un élément $(x, y, t, z)$ (comme dans **G**) de $R\square S$, en respectant les propriétés suivantes :
1. $xSm(x, y, t, z)$ et $m(x, y, t, z)Rz$, i.e.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, dash, "S"] \arrow[d, dash, "R"'] & m(x,y,t,z) \arrow[d, dash, "R"] \\ y \arrow[r, dash, "S"'] & z \end{tikzcd}$$

2. $m(x, y, t, z) = m(x, y, t', z)$ (i.e. $m$ ne dépend pas de la 3ème variable)
3A. $m(x, x, t, y) = y$ 3B. $m(x, y, t, y) = x$
4. $m(m(x_1, x_2, y, x_3), x_4, t, x_5) = m(x_1, x_2, t, m(x_3, x_4, z, x_5))$ pour tout

choix d'éléments $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t, y, z$ de $A$ tels que

$$\begin{tikzcd}
 & & t \arrow[lld, dash, "S"'] \arrow[rrd, dash, "R"] & & \\
x_1 \arrow[d, dash, "R"'] \arrow[rd, dash, "S"] & & & & x_5 \arrow[ld, dash, "R"'] \arrow[d, dash, "S"] \\
 & y \arrow[rdd, dash, "R"] & & z \arrow[ldd, dash, "S"'] & \\
x_2 \arrow[rrd, dash, "S"'] & & & & x_4 \arrow[lld, dash, "R"] \\
 & & x_3 & &
\end{tikzcd}$$

Lorsque $\mathbb{V}$ est une variété modulaire, la condition d'associativité 4. est une conséquence des autres conditions [13], et une structure de pseudogroupoïde sur $R$ et $S$ est nécessairement unique, quand elle existe. D'autre part, rappelons qu'une équivalence double $C$ sur $R$ et $S$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, shift left, "\pi_{1,3}"] \arrow[r, shift right, "\pi_{2,4}"'] \arrow[d, shift right, "\pi_{1,2}"'] \arrow[d, shift left, "\pi_{3,4}"] & S \arrow[d, shift right, "p_1"'] \arrow[d, shift left, "p_2"] \\
R \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & A.
\end{tikzcd} \qquad \textbf{(H)}$$

*centralise* $R$ et $S$ si tout carré commutatif dans le diagramme **H** est un produit fibré [73]. La remarque suivante a été essentielle pour démontrer le Théorème 2.1 :

**2.3. Proposition** [VI]
*Pour deux relations d'équivalence internes (=congruences) $R$ et $S$ sur une algèbre $A$ d'une variété modulaire, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe une structure (unique) de pseudogroupoïde $m\colon R\square S \to A$ sur $R$ et $S$, et $R \circ S = S \circ R$ ;*
2. *il existe une (unique) équivalence double $C$ qui centralise $R$ et $S$.*

Une nouvelle caractérisation des groupoïdes internes, qui ont été étudiés dans ce même contexte par Janelidze et Pedicchio [54], découle immédiatement de ce résultat :

**2.4. Corollaire** [VI] *Soit X*

$$X_1 \underset{c}{\overset{d}{\underset{\longleftarrow e}{\rightrightarrows}}} X_0 \qquad \textbf{(I)}$$

*un graphe réflexif interne à une variété modulaire* $\mathbb{V}$.
*Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe une structure (unique) de groupoïde interne sur* $X$ *;*
2. $(a)\quad [R[d], R[c]] = \Delta_{X_1}$ et $(b)\quad R[d] \circ R[c] = R[c] \circ R[d]$.

Les groupoïdes internes à une variété modulaire sont donc caractérisés par une "double commutativité" : la condition 2.$(a)$ affirme que le commutateur des congruences $R[d]$ et $R[c]$ est trivial, et la condition 2.$(b)$ dit que ces congruences "commutent" au sens de la composition des relations de congruence.

Ces résultats ont été très utiles dans l'étude de différents types de graphes réflexifs et de groupoïdes internes, et dans la caractérisation des revêtements relatifs à diverses structures galoisiennes dans les variétés modulaires. Quelques contributions dans ce champ d'investigation sont considérées dans les sections qui suivent.

## (B) Graphes réflexifs spéciaux

La caractérisation du Corollaire 2.4 a motivé la recherche de l'article [IX], en collaboration avec Rosický, où nous étudions des sous-catégories de la variété $\mathsf{RG}(\mathbb{V})$ des graphes réflexifs internes à une variété modulaire $\mathbb{V}$. Notons $\mathsf{Grpd}(\mathbb{V})$ la catégorie des groupoïdes internes à $\mathbb{V}$, et $\mathsf{RG}^+(\mathbb{V})$ la catégorie des graphes réflexifs **I** internes à $\mathbb{V}$ satisfaisant la condition 2.$(a)$ du Corollaire 2.4, appelée la catégorie des *graphes réflexifs spéciaux*. La caractérisation des groupoïdes internes du Corollaire 2.4 et les propriétés du commutateur dans les variétés modulaires permettent de montrer qu'il existe des adjonctions

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Grpd}(\mathbb{V}) \arrow[r, hook, shift right, "U"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{RG}^+(\mathbb{V}) \arrow[l, shift right, "F"'] \arrow[r, hook, shift right, "V"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{RG}(\mathbb{V}), \arrow[l, shift right, "G"'] \end{tikzcd}$$

avec $U$ et $V$ des inclusions pleines de sous-catégories réflexives. Ces adjonctions ont un remarquable pouvoir de classification :

**2.5. Théorème** [IX]
*Soit* $\mathbb{V}$ *une variété modulaire. Alors :*

1. $\mathsf{RG}^+(\mathbb{V})$ *est une sous-variété de la variété* $\mathsf{RG}(\mathbb{V})$ *;*
2. $\mathbb{V}$ *est une* variété de Mal'tsev *si et seulement si* $\mathsf{Grpd}(\mathbb{V})$ *est une sous-variété de* $\mathsf{RG}(\mathbb{V})$ *;*
3. $\mathbb{V}$ *est une* variété distributive *si et seulement si* $\mathsf{RG}^+(\mathbb{V})$ *est équivalente à la catégorie* $\mathsf{RR}(\mathbb{V})$ *des relations réflexives internes à* $\mathbb{V}$ *;*
4. $\mathbb{V}$ *est une* variété arithmétique *si et seulement si la catégorie* $\mathsf{Con}(\mathbb{V})$ *des congruences de* $\mathbb{V}$ *est une sous-variété de* $\mathsf{RG}(\mathbb{V})$.

## (C) Groupoïdes connexes

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_1 \times_{X_0} X_1 \arrow[r, shift left=2, "p_1"] \arrow[r, "m"] \arrow[r, shift right=2, "p_2"'] & X_1 \arrow[r, shift left=2, "d"] \arrow[r, shift right=2, "c"'] & X_0, \arrow[l, "e"'] \end{tikzcd}$$

qui représente un groupoïde $X$ interne à une variété modulaire $\mathbb{V}$ : en particulier $X_1 \times_{X_0} X_1$ est "l'algèbre des flèches composables" (produit fibré de l'homomorphisme "domaine" $d$ et "codomaine" $c$), $m$ est l'homomorphisme "composition", $p_1$ et $p_2$ les projections. Si $\mathbb{V}$ est une catégorie pointée (sa théorie possède une seule constante, notée 0) on peut définir le foncteur de normalisation $N\colon \mathsf{Grpd}(\mathbb{V}) \to \mathsf{Arr}(\mathbb{V})$ qui associe à un groupoïde interne $X$ l'homomorphisme $N(X) = c \circ \mathsf{ker}\,(d)$ de $\mathbb{V}$

$$N(X) = \mathsf{Ker}\,(d) \xrightarrow{\mathsf{ker}\,(d)} X_1 \xrightarrow{c} X_0.$$

Par exemple, dans la catégorie $\mathsf{Grp}$ des groupes, $N(X)$ est l'homomorphisme sous-jacent au module croisé correspondant au groupoïde interne $X$ [17].

Notons $\mathsf{ConnGrpd}(\mathbb{V})$ la catégorie des groupoïdes connexes de $\mathbb{V}$ et $\mathsf{CExt}(\mathbb{V})$ la catégorie des extensions centrales de $\mathbb{V}$ :

**2.6. Théorème** [VI]
*Soit* $\mathbb{V}$ *une variété modulaire pointée.*
*Alors le foncteur de normalisation* $N\colon \mathsf{ConnGrpd}(\mathbb{V}) \to \mathsf{CExt}(\mathbb{V})$ *induit une équivalence de catégories :*

$$\mathsf{ConnGrpd}(\mathbb{V}) \cong \mathsf{CExt}(\mathbb{V}).$$

## (D) Revêtements de groupoïdes internes

Dans une variété de Mal'tsev $\mathbb{V}$ la condition 2.($b$) du Corollaire 2.4 caractérisant les groupoïdes est toujours satisfaite. Cela implique que, dans ce cas, la réflexion

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Grpd}_B(\mathbb{V}) \arrow[r, hook, shift right, "U"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{RG}_B(\mathbb{V}) \arrow[l, shift right, "F"'] \end{tikzcd} \qquad (\mathbf{J})$$

de la catégorie des graphes réflexifs $\mathsf{RG}_B(\mathbb{V})$ sur une algèbre fixée $B$ dans la catégorie des groupoïdes $\mathsf{Grpd}_B(\mathbb{V})$ sur $B$ est obtenue par un simple quotient : à un graphe réflexif $A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left=2, "d"] \arrow[r, shift right=2, "c"'] & B \arrow[l, "e"'] \end{tikzcd}$$

sur l'algèbre $B$, on associe le quotient

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, two heads, "\eta"] \arrow[dr, shift right, "d"'] \arrow[dr, shift left, "c"] & & \frac{A}{[R[d],R[c]]} \arrow[dl, shift right, "d'"'] \arrow[dl, shift left, "c'"] \\ & B \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad (\mathbf{K})$$

où $\eta$ représente donc la $A$-composante de l'unité de l'adjonction $\mathbf{J}$. Il est possible de définir alors une structure galoisienne admissible

$$\Gamma = (\mathsf{RG}_B(\mathbb{V}), \mathsf{Grpd}_B(\mathbb{V}), \mathcal{E}, \mathcal{Z}, F, U)$$

où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{Z}$ sont les épimorphismes réguliers de $\mathsf{RG}_B(\mathbb{V})$ et de $\mathsf{Grpd}_B(\mathbb{V})$, respectivement. Remarquons que, lorsque $B$ est l'algèbre triviale de $\mathbb{V}$, l'adjonction $\mathbf{J}$ devient l'adjonction $\mathbf{F}$. Il est donc naturel de s'intéresser au problème de la caractérisation et de la classification des revêtements correspondants. La solution de ce problème, qui utilise explicitement le calcul des générateurs du commutateur dans une variété de Mal'tsev, a été obtenue en collaboration avec Everaert :

**2.7. Théorème** [XII]
*Soit $\mathbb{V}$ une variété de Mal'tsev. Les revêtements (normaux) de la catégorie $\mathsf{RG}_B(\mathbb{V})$ pour la structure admissible $\Gamma = (\mathsf{RG}_B(\mathbb{V}), \mathsf{Grpd}_B(\mathbb{V}), \mathcal{E}, \mathcal{Z}, F, U)$ sont exactement les extensions de graphes réflexifs*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, two heads, "f"] \arrow[dr, shift right, "d"'] \arrow[dr, shift left, "c"] & & C \arrow[dl, shift right, "d'"'] \arrow[dl, shift left, "c'"] \\ & B \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

*telles que* $[R[f], R[d] \circ R[c]] = \Delta_A$.

## (E) Revêtements de modules précroises

Quand $\mathbb{V}$ est la catégorie $\mathsf{Grp}$ des groupes, le Théorème 2.7 permet de retrouver la notion d'extension centrale de $B$-modules précroisés. Rappelons qu'un $B$-module précroisé $(A, \alpha)$ est un homomorphisme de groupes $\alpha\colon A \longrightarrow B$ muni d'une action de $B$ sur $A$ telle que

$$\alpha({}^{b}a) = b\alpha(a)b^{-1} \qquad \forall b \in B,\, \forall a \in A.$$

Une flèche $f : (A, \alpha) \longrightarrow (C, \epsilon)$ dans la catégorie $B$-$\mathsf{PXMod}$ des $B$-modules croisés est un homomorphisme de groupes $f\colon A \longrightarrow C$ telle que $\epsilon \circ f = \alpha$ et $f({}^{b}a) = {}^{b}f(a)$. La sous-catégorie $B$-$\mathsf{XMod}$ des $B$-modules croisés est la sous-catégorie pleine de $B$-$\mathsf{PXMod}$ dont les objets $(A, \alpha)$ satisfont l'*identité de Peiffer* :

$${}^{\alpha(a)}a' = aa'a^{-1} \qquad \forall a, a' \in A.$$

En utilisant l'équivalence de catégories $B$-$\mathsf{PXMod} \cong \mathsf{RG}_B(\mathsf{Grp})$ entre les $B$-modules précroisés et les graphes réflexifs internes à $\mathsf{Grp}$ sur $B$, la réflexion $\mathbf{J}$ devient

$$B - \mathsf{XMod} \underset{U}{\overset{F}{\underset{\hookrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\perp}}}} B - \mathsf{PXMod}.$$

La réflexion dans $B$-$\mathsf{XMod}$ d'un $B$-module $(A, \alpha)$ est donnée par le quotient $\eta_A\colon A \to \frac{A}{\langle A,A\rangle}$ dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, two heads, "\eta_A"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \frac{A}{\langle A,A\rangle} \arrow[dl, "\bar{\alpha}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

qui correspond au diagramme $\mathbf{K}$. Ici, $\langle A, A\rangle$ est le *commutateur de Peiffer* de $(A, \alpha)$ avec $(A, \alpha)$, i.e. le sous-groupe distingué de $A$ engendré par les éléments de la forme

$$\langle a, a'\rangle = aa'a^{-1}({}^{\alpha(a)}a')^{-1} \qquad \forall a, a' \in A.$$

**2.8. Corollaire** [XII]
*Une extension $f : (A, \alpha) \longrightarrow (C, \epsilon)$ de $B$-modules précroisés*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, two heads, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & C \arrow[dl, "\epsilon"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

*est un revêtement (normal) pour la structure galoisienne* $(B\text{-}\mathsf{PXMod}, B\text{-}\mathsf{XMod}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, F, U)$ *si et seulement si* $\langle \mathsf{Ker}\,(f), A\rangle = 0$.

Dans ce cas, un revêtement est simplement une extension centrale de modules précroisés [26]. Des résultats analogues peuvent être obtenus pour les extensions d'anneaux précroisés [63], comme nous montrons dans [XII].

## (F) Revêtements de modules croisés

Diverses sous-catégories réflexives de la catégorie $\mathsf{XMod}$ des modules croisés induisent des structures galoisiennes. Voici quelques exemples :

1. la catégorie $\mathsf{Grp}$ des groupes dans l'adjonction
$$\mathsf{Grp} \underset{D}{\overset{\mathsf{Coker}}{\underset{\hookrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\perp}}}} \mathsf{XMod}, \tag{L}$$
où $D\colon \mathsf{Grp} \to \mathsf{XMod}$ est le foncteur "discret" qui associe le module croisé $0 \to G$ à un groupe $G$, et son adjoint à gauche $\mathsf{Coker}\colon \mathsf{XMod} \to \mathsf{Grp}$ est défini par $\mathsf{Coker}(\alpha : A \to B) = B/\alpha(A)$ pour tout module croisé $\alpha\colon A \to B$ ;
2. la catégorie $\mathsf{Ab}$ des groupes abéliens dans l'adjonction composée
$$\mathsf{Ab} \underset{U}{\overset{ab}{\underset{\hookrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\perp}}}} \mathsf{Grp} \underset{D}{\overset{\mathsf{Coker}}{\underset{\hookrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\perp}}}} \mathsf{XMod}, \tag{M}$$
où $U\colon \mathsf{Ab} \to \mathsf{Grp}$ est l'inclusion canonique et $ab\colon \mathsf{Grp} \to \mathsf{Ab}$ est le foncteur d'abélianisation ;
3. la catégorie $\mathsf{AbXMod}$ des modules croisés abéliens dans l'adjonction
$$\mathsf{AbXMod} \underset{V}{\overset{F}{\underset{\hookrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\perp}}}} \mathsf{XMod}, \tag{N}$$
où $V\colon \mathsf{AbXMod} \to \mathsf{XMod}$ est l'inclusion canonique et $F\colon \mathsf{XMod} \to \mathsf{AbXMod}$ est son adjoint à gauche ;
4. la catégorie $\mathsf{NormMono}$ des monomorphismes normaux (considérés comme des modules croisés, où l'action est donnée par conjugaison) dans l'adjonction
$$\mathsf{NormMono} \underset{W}{\overset{G}{\underset{\hookrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\perp}}}} \mathsf{XMod}, \tag{O}$$
où $W\colon \mathsf{NormMono} \to \mathsf{XMod}$ est l'inclusion canonique et $G\colon \mathsf{XMod} \to \mathsf{NormMono}$ est son adjoint à gauche.

Chacune de ces adjonctions induit une structure galoisienne, en choisissant comme classes de flèches $\mathcal{E}$ et $\mathcal{Z}$ celles des épimorphismes réguliers. La Proposition suivante donne les caractérisations des revêtements (normaux) correspondants :

**2.9. Proposition** [III, VII]
*Soient $\alpha\colon A \to B$ et $\alpha'\colon A' \to B'$ deux modules croisés, et*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "\alpha"'] & A' \arrow[d, "\alpha'"] \\ B \arrow[r, "f_B"'] & B' \end{tikzcd}$$

*une extension. Alors*

1. $(f_A, f_B)$ *est un revêtement pour la structure galoisienne*

$$(\mathsf{XMod}, \mathsf{Grp}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, \mathsf{Coker}, D)$$

*induite par* **L** *si et seulement si $f_A : A \to A'$ est un isomorphisme et $f_B : B \to B'$ est un homomorphisme surjectif de groupes.*

2. $(f_A, f_B)$ *est un revêtement pour la structure galoisienne*

$$(\mathsf{XMod}, \mathsf{Ab}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, ab \circ \mathsf{Coker}, D \circ U)$$

*induite par* **M** *si et seulement si $f_A : A \to A'$ est un isomorphisme et $f_B : B \to B'$ est une extension centrale de groupes.*

3. $(f_A, f_B)$ *est un revêtement pour la structure galoisienne*

$$(\mathsf{XMod}, \mathsf{AbXMod}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, F, V)$$

*induite par* **N** *si et seulement si*

$$\mathsf{Ker}\,(f_A, f_B) \subset Z(\alpha)$$

*où*

$$Z(\alpha) = \overline{\alpha}\colon A^B \to Z(B) \cap st_B(A)$$

*est le centre du module croisé $\alpha\colon A \to B$, avec*

$$A^B = \{a \in A \mid {}^b a = a, \forall b \in B\},$$

*$Z(B)$ le centre du groupe $B$,*

$$st_B(A) = \{b \in B \mid {}^b a = a, \forall a \in A\}$$

*le stabilisateur de $B$ dans $A$, et $\overline{\alpha}$ la restriction de $\alpha$.*

*4.* $(f_A, f_B)$ *est un revêtement pour la structure galoisienne*

$$(\mathsf{XMod}, \mathsf{NormMono}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, G, W)$$

*induite par* $\mathbf{O}$ *si et seulement si* $\mathsf{Ker}\,(f_A, f_B)$ *est un monomorphisme normal.*

## (G) Revêtements et extensions centrales doubles

La catégorie $\mathsf{CExt}(\mathbb{V})$ des extensions centrales dans une variété de Mal'tsev $\mathbb{V}$ est une sous-catégorie épiréflexive de la catégorie $\mathsf{Ext}(\mathbb{V})$ des extensions de $\mathbb{V}$ :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{CExt}(\mathbb{V}) \arrow[r, hook, shift right, "U"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Ext}(\mathbb{V}). \arrow[l, shift right, "F"'] \end{tikzcd} \qquad (\mathbf{P})$$

La $f$-composante de l'unité de l'adjonction est donnée par le morphisme $\eta_A \colon f \to F(f)$ de $\mathbb{V}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, two heads, "\eta_A"] \arrow[dr, "f"'] & & \frac{A}{[R[f],\nabla_A]} \arrow[dl, "F(f)"] \\ & B. & \end{tikzcd}$$

Une flèche $(\alpha^A, \alpha^B) \colon f \to f'$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha^A"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "\alpha^B"'] & B' \end{tikzcd} \qquad (\mathbf{Q})$$

dans $\mathsf{Ext}(\mathbb{V})$ appartient à $\mathcal{E}$ si (1) $\alpha^A$ et $\alpha^B$ sont des homomorphismes surjectifs et (2) la factorisation canonique $(f, \alpha^A) \colon A \to B \times_{B'} A'$ vers le produit fibré $B \times_{B'} A'$ est un homomorphisme surjectif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dotted, "(f,\alpha^A)"] \arrow[drr, bend left, "\alpha^A"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\ & B \times_{B'} A' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & A' \arrow[d, "f'"] \\ & B \arrow[r, "\alpha^B"'] & B' \end{tikzcd}$$

le carré **Q** est donc un “pushout régulier” au sens de [10]. On appelle *extension double* une flèche de la classe $\mathcal{E}$ de $\mathsf{Ext}(\mathbb{V})$, et on note $\mathcal{Z}$ la classe des flèches de la sous-catégorie $\mathsf{CExt}(\mathbb{V})$ satisfaisant cette même propriété. Dans l'article [VIII], écrit en collaboration avec Rossi, nous montrons que $(\mathsf{Ext}(\mathbb{V}), \mathsf{CExt}(\mathbb{V}), \mathcal{E}, \mathcal{Z}, F, U)$ est une structure galoisienne admissible. En utilisant les propriétés des commutateurs, les revêtements correspondants peuvent être caractérisés par des conditions purement algébriques :

**2.10. Théorème** [VIII]
*Soit* $\mathbb{V}$ *une variété de Mal'tsev et* $\Gamma = (\mathsf{Ext}(\mathbb{V}), \mathsf{CExt}(\mathbb{V}), \mathcal{E}, \mathcal{Z}, F, U)$. *Pour une extension double*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha^A"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "\alpha^B"'] & B' \end{tikzcd}$$

*de* $\mathsf{Ext}(\mathbb{V})$ *les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $(\alpha^A, \alpha^B)$ *est un* revêtement *pour* $\Gamma$ *;*
2. $(\alpha^A, \alpha^B)$ *est un* revêtement normal *pour* $\Gamma$ *;*
3. $(\alpha^A, \alpha^B)$ *est une* extension centrale double, *i.e. les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

$$\text{(a)}\,[R[\alpha^A], R[f]] = \Delta_A \qquad \text{(b)}\,[R[\alpha^A] \cap R[f], \nabla_A] = \Delta_A.$$

Dans le cas de la variété $\mathsf{Grp}$ des groupes ce résultat a été démontré par Janelidze [44]. Ce résultat est lié à la formule de Brown et Ellis pour le troisième groupe d'homologie d'un groupe (voir la Section 4).

# 3 Centralité et décompositions en produits

## (A) Centralité et connecteur

Dans les articles [12] et [IV], en collaboration avec Bourn, nous introduisons une structure catégorique interne, que nous appelons *connecteur*, qui permet d'étudier la propriété de centralité dans toute catégorie finiment complète, et qui s'est révélée très efficace dans les catégories régulières de Mal'tsev. Cette structure est étroitement liée à la notion de *prégroupoïde* introduite par Kock dans [61, 62]. Les prégroupoïdes ont été ensuite considerés, entre autres, par Johnstone [58], Carboni, Pedicchio et Pirovano [22], Pedicchio [67, 68], qui a découvert le lien avec la théorie des commutateurs, clarifié ultérieurement par Janelidze et Pedicchio [54, 55].

L'avantage de la notion de connecteur par rapport à celle de prégroupoïde provient de la possibilité d'étudier la centralité de toutes les relations d'équivalence, aussi de celles qui ne sont pas *effectives* (= relations nucléaires). Bien entendu, ces deux notions sont équivalentes dans une catégorie exacte. Une théorie de la centralité a été développée dans le contexte des catégories régulières de Mal'tsev [IV], en ouvrant la voie à d'autres recherches [11, 3]. La nouvelle approche basée sur la notion de connecteur permet de couvrir des nouveaux exemples, notamment les groupes topologiques, les anneaux topologiques et les quasi-variétés de Mal'tsev. Les démonstrations deviennent aussi plus transparentes, tout simplement parce qu'il n'est plus nécessaire de faire appel à des congruences engendrées, ou à des équivalences doubles.

Rappelons maintenant la notion de connecteur : comme $\mathbb{C}$ est une catégorie finiment complète, il suffit de donner la définition en termes d'éléments (grâce au plongement de Yoneda).

Si $(R, p_1, p_2)$ et $(S, p_1, p_2)$ sont deux relations d'équivalence sur $X$, on note

$$R \times_X S = \{(x, y, z) \in X \times X \times X \mid xRy,\ ySz\}$$

le produit fibré

$$\begin{tikzcd} R \times_X S \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & S \arrow[d, "p_1"] \\ R \arrow[r, "p_2"'] & X. \end{tikzcd}$$

**3.1. Définition** [IV]
Un connecteur entre $R$ et $S$ est une flèche $p\colon R \times_X S \to X$ de $\mathbb{C}$ telle que

1. $p(x, x, y) = y$ $\qquad$ $1^\star$. $p(x, y, y) = x$
2. $xSp(x, y, z)$ $\qquad$ $2^\star$. $zRp(x, y, z)$
3. $p(x, y, p(y, u, v)) = p(x, u, v)$ $\qquad$ $3^\star$. $p(p(x, y, u), u, v) = p(x, y, v)$.

Si $p\colon R \times_X S \to X$ satisfait 1, $1^\star$, 2 et $2^\star$, alors $p$ satisfait 3 et $3^\star$ si et seulement si $p$ satisfait l'associativité classique

$$p(x, y, p(z, u, v)) = p(p(x, y, z), u, v). \qquad \textbf{(R)}$$

**3.2. Exemples**

- Une loi de Mal'tsev associative $p\colon X \times X \times X \to X$ est exactement un connecteur entre $\nabla_X$ et $\nabla_X$.

- Si $(X \times Y, p_X \colon X \times Y \to X, p_Y \colon X \times Y \to Y)$ est un produit de $X$ et $Y$, il y a toujours un connecteur canonique entre les relations nucléaires $R[p_X]$ et $R[p_Y]$ des projections du produit : pour le voir, il suffit de considérer le produit fibré

$$\begin{tikzcd} X \times X \times Y \times Y \arrow[r, "1_X \times 1_X \times p_2"] \arrow[d, "p_1 \times 1_Y \times 1_Y"'] & R[p_Y] = X \times X \times Y \arrow[d, "p_1 \times 1_Y"] \\ R[p_X] = X \times Y \times Y \arrow[r, "1_X \times p_2"'] & X \times Y \end{tikzcd}$$

  et un connecteur $p \colon X \times X \times Y \times Y \to X \times Y$ entre $R[p_X]$ et $R[p_Y]$ est défini par
$$p(x, x', y, y') = (x', y).$$

- Il existe une bijection entre les structures de groupoïde interne sur un graphe réflexif $X$
$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, shift left=2, "d"] \arrow[r, shift right=2, "c"'] & X_0 \arrow[l, "e" description] \end{tikzcd}$$
  et les connecteurs entre $R[d]$ et $R[c]$. En notant $m \colon X_1 \times_{X_0} X_1 \to X_1$ la multiplication et $\sigma \colon X_1 \to X_1$ l'inversion d'un groupoïde, la flèche $p \colon R[d] \times_{X_1} R[c] \to X_1$ définie par
$$p(x, y, z) = m(m(z, \sigma(y)), x),$$
  pour tout $(x, y, z)$ de $R[d] \times_{X_1} R[c]$, est un connecteur.

Rappelons ensuite qu'une catégorie $\mathbb{C}$ est dite de Mal'tsev si toute relation réflexive interne $R$ sur un objet $X$ de $\mathbb{C}$ est une relation d'équivalence [21]. Quand $\mathbb{C}$ est une catégorie régulière, cette propriété est équivalente à la permutabilité de la composition des relations d'équivalence sur un même objet :
$$\forall X \in \mathbb{C}, \forall R, S \in \mathsf{Eq_X}(\mathbb{C}), \quad R \circ S = S \circ R.$$
Dans une variété de Mal'tsev, l'existence d'un connecteur entre $R$ et $S$ est équivalente à la trivialité du commutateur $[R, S]$ [73, 67]. Ce fait justifie l'écriture $[R, S] = \Delta_X$ pour indiquer qu'il existe un connecteur (nécessairement unique) entre les relations d'équivalence $R$ et $S$.

Dans une catégorie de Mal'tsev $\mathbb{C}$, les connecteurs ont d'excellentes propriétés de stabilité :

**3.3. Théorème** [IV]
*Soit $\mathbb{C}$ une catégorie régulière de Mal'tsev. On note $R$, $S$, $R_1$, $R_2$, $S_1$ et $S_2$ des relations d'équivalence internes à $\mathbb{C}$. Alors :*

1. $[R, S] = \Delta_X$ *si et seulement si* $[S, R] = \Delta_X$ *(symétrie) ;*
2. *si* $R \cap S = \Delta_X$*, alors* $[R, S] = \Delta_X$ *(inclusion du commutateur dans l'intersection) ;*
3. *si* $S_1 \subseteq S_2$ *et* $[R, S_2] = \Delta_X$*, alors* $[R, S_1] = \Delta_X$ *(monotonie) ;*
4. *si* $[R_1, S_1] = \Delta_X$ *et* $[R_2, S_2] = \Delta_Y$*, alors* $[R_1 \times R_2, S_1 \times S_2] = \Delta_{X \times Y}$ *(stabilité par produits) ;*
5. *si* $i\colon Y \to X$ *est un monomorphisme et* $[R, S] = \Delta_X$*, alors* $[i^{-1}(R), i^{-1}(S)] = \Delta_Y$ *(stabilité par image réciproque) ;*
6. *si* $f\colon X \to Y$ *est un épimorphisme régulier et* $[R, S] = \Delta_X$*, alors* $[f(R), f(S)] = \Delta_Y$ *(stabilité par images directes) ;*
7. $[R, S_1] = \Delta_X$ *et* $[R, S_2] = \Delta_X$ *si et seulement si* $[R, S_1 \circ S_2] = \Delta_X$ *(stabilité par réunions).*

Les propriétés des connecteurs permettent aussi de caractériser les catégories de Mal'tsev. Soit $2\text{-}\mathsf{Eq}(\mathbb{C})$ la catégories des couples $(R, S)$ de relations d'équivalence $R$ et $S$ sur un même objet $X$, et morphismes

$$(f, f_R, f_S)\colon (R, S) \to (\overline{R}, \overline{S})$$

les triplets de flèches de $\mathbb{C}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] \arrow[d, "f_R"'] & X \arrow[d, "f"] & S \arrow[l, shift right, "p_1"'] \arrow[l, shift left, "p_2"] \arrow[d, "f_S"] \\
\overline{R} \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & Y & \overline{S}. \arrow[l, shift right, "p_1"'] \arrow[l, shift left, "p_2"]
\end{tikzcd}$$

Soit $\mathsf{Conn}(\mathbb{C})$ la catégorie des connecteurs de $\mathbb{C}$ : les objets sont les triplets $(R, S, p\colon R \times_X S \to X)$ avec $p$ un connecteur entre $R$ et $S$, et les morphismes sont ceux de $2\text{-}\mathsf{Eq}(\mathbb{C})$ qui préservent le connecteur. Il y a un évident foncteur d'oubli $U\colon \mathsf{Conn}(\mathbb{C}) \to 2\text{-}\mathsf{Eq}(\mathbb{C})$, qui permet de caractériser les catégories de Mal'tsev de la manière suivante :

**3.4. Proposition** [IV]
*Soit $\mathbb{C}$ une catégorie finiment complète. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathbb{C}$ est une catégorie de Mal'tsev ;*
2. *$U\colon \mathsf{Conn}(\mathbb{C}) \to$ 2-$\mathsf{Eq}(\mathbb{C})$ est "fermé pour les sous-objets" :*
   *si $(j_R, j, j_S)\colon (R,S) \to U(\overline{R}, \overline{S}, \overline{p})$ est un monomorphisme dans 2-$\mathsf{Eq}(\mathbb{C})$, alors $(R,S)$ appartient à $\mathsf{Conn}(\mathbb{C})$.*

## (B) Sections normales et décompositions en produits

La centralité est aussi liée à la décomposition d'un objet en produits directs. Dans une catégorie additive, tout épimorphisme $f\colon X \to Y$ scindé par une section $s\colon Y \to X$ (i.e. $f \circ s = 1_Y$) détermine un isomorphisme canonique $X \cong Y \times Ker f$. Cette propriété reste vraie dans la catégorie $\mathsf{Grp}$ des groupes, pourvu que l'image $s(Y)$ soit un sous-groupe distingué de $X$. Or, dans toute catégorie finiment complète (pas nécessairement pointée), il existe une notion interne de *monomorphisme normal*, introduite par Bourn dans [9]. Une flèche $j\colon Y \to X$ de $\mathbb{C}$ est *normale à la relation d'équivalence* $S$ sur $X$ si $j^{-1}(S)$ est la relation $\nabla_Y$, et la flèche induite de $\nabla_Y$ à $S$ dans la catégorie $\mathsf{Eq}(\mathbb{C})$ des relations d'équivalence de $\mathbb{C}$ est une fibration discrète. Cela signifie que :

1. il existe une flèche $\overline{j}\colon Y \times Y \to S$ in $\mathbb{C}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \times Y \arrow[r, "\overline{j}"] \arrow[d, shift right, "p_1"'] \arrow[d, shift left, "p_2"] & S \arrow[d, shift right, "p_1"'] \arrow[d, shift left, "p_2"] \\ Y \arrow[r, "j"'] & X; \end{tikzcd}$$

2. les carrés commutatifs dans ce diagramme sont des produits fibrés.

La flèche $j$ est forcément un monomorphisme, et l'objet $Y$ est une "classe d'équivalence" de $S$. Dans une catégorie protomodulaire $\mathbb{C}$ au sens de Bourn [7], un monomorphisme ne peut être normal qu'à une seule relation d'équivalence, à isomorphisme près (voir [9]). En collaboration avec Bourn, nous avons démontré le résultats suivant :

**3.5. Théorème** [X]

- *Dans une catégorie régulière pointée $\mathbb{C}$, un épimorphisme $f\colon X \to Y$ scindé par une section $s\colon Y \to X$ normale à $S$ telle que*

$$(1) \quad R[f] \circ S = S \circ R[f] \qquad \text{et} \qquad (2) \quad R[f] \cap S = \Delta_X$$

*induit l'isomorphisme*

$$X \cong Y \times \mathsf{Ker}\,(f).$$

- *Dans une catégorie exacte $\mathbb{C}$ les mêmes conditions*

$$(1) \quad R[f] \circ S = S \circ R[f] \qquad \text{et} \qquad (2) \quad R[f] \cap S = \Delta_X$$

*induisent l'isomorphisme*

$$X \cong Y \times \frac{X}{S}.$$

Les deux décompositions en produits directs coïncident si la catégorie $\mathbb{C}$ est à la fois pointée et exacte : c'est le cas, par exemple, de toute variété algébrique pointée.

**3.6. Corollaire**

- *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie pointée régulière de Mal'tsev.*
  *Un épimorphisme $f\colon X \to Y$ scindé par une section $s\colon Y \to X$ normale à $S$ telle que $R[f] \cap S = \Delta_X$ induit un isomorphisme canonique $X \cong Y \times \mathsf{Ker}\,(f)$.*
- *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie exacte protomodulaire.*
  *Un épimorphisme $f\colon X \to Y$ scindé par une section $s\colon Y \to X$ normale à $S$ induit un isomorphisme canonique $X \cong Y \times \frac{X}{S}$.*

## (C) Catégories à facteurs permutables

L'équivalence entre les notions d'extension algébriquement centrale et de revêtement normal du Théorème 2.1 ne dépend pas de la nature "variétale" des catégories, comme nous allons le voir (Théorème 3.10). C'est en essayant de comprendre quelle était la raison exacte de cette coïncidence que nous avons introduit la notion de *catégorie à facteurs permutables*, qui permet d'unifier des aspects fondamentaux des différentes théories de centralité.
Les bases de cette théorie sont présentées dans l'article [XI].

**3.7. Définition**
Une catégorie régulière $\mathbb{C}$ est dite *à facteurs permutables* si toute relation d'équivalence $R$ sur un produit $(A \times B, p_1 \colon A \times B \to A, p_2 \colon A \times B \to B)$ commute avec les relations nucléaires $R[p_1]$ et $R[p_2]$ des projections :

$$R \circ R[p_i] = R[p_i] \circ R, \quad \forall i \in \{1, 2\}.$$

Parmi les exemples de catégorie à facteurs permutables il y a toute catégorie régulière de Mal'tsev [21], toute variété à congruences modulaires [40], et toute variété fortement unitale [3], cette dernière étant une variété dont la théorie possède une loi ternaire $p(x, y, z)$ et une unique constante $0$ satisfaisant les axiomes $p(x, x, y) = y$ et $p(x, 0, 0) = x$.

**3.8. Lemme.** *Si $\mathbb{C}$ est une catégorie à facteurs permutables, alors $\mathbb{C}$ vérifie la* weak shifting property : *si $R$ et $S$ sont deux relations d'équivalence sur $A \times B$ telles que $R \cap R[p_1] \subseteq S$, étant donnés $(a, b), (a, c), (d, e), (d, f) \in A \times B$ comme dans le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
(a,b) \arrow[r, dash, "{R[p_1]}"] \arrow[d, dash, "R"'] \arrow[d, dash, bend right=60, "S"'] & (a,c) \arrow[d, dash, "R"] \\
(d,e) \arrow[r, dash, "{R[p_1]}"'] & (d,f),
\end{tikzcd}$$

*alors on a $(a, c) S (d, f)$ :*

$$\begin{tikzcd}
(a,b) \arrow[r, dash, "{R[p_1]}"] \arrow[d, dash, "R"'] \arrow[d, dash, bend right=60, "S"'] & (a,c) \arrow[d, dash, "R"] \arrow[d, dotted, dash, bend left=60, "S"] \\
(d,e) \arrow[r, dash, "{R[p_1]}"'] & (d,f).
\end{tikzcd}$$

Cette propriété admet une interprétation purement catégorique. Notons $Eq_{A\times B}(\mathbb{C})$ l'ensemble ordonné des équivalences internes à $\mathbb{C}$ sur $A \times B$. La *weak shifting property* équivaut à la propriété suivante : étant donnée une relation d'équivalence $R$ sur un produit $A \times B$, pour tout $U \in Eq_{A\times B}(\mathbb{C})$ avec $R \cap R[p_1] \subseteq U \subseteq R$ l'inclusion canonique de relations d'équivalence

$$\begin{tikzcd}
U \square R[p_1] \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d, shift right, "d_1"'] \arrow[d, shift left, "d_2"] & R \square R[p_1] \arrow[d, shift right, "d_1"'] \arrow[d, shift left, "d_2"] \\
U \arrow[r, tail, "i"'] & R
\end{tikzcd}$$

est une fibration discrète. Cette propriété est l'outil principal pour développer une théorie élémentaire de la centralité dans les catégories à facteurs permutables.

**3.9. Proposition** [XI]
*Soit $\mathbb{C}$ une catégorie à facteurs permutables, $R$, $S_1$ et $S_2$ des relations d'équivalence.*

1. *il existe au plus un connecteur $p\colon R \times X \to X$ entre $R$ et $\nabla_X$ : dans ce cas nous écrirons $[R, \nabla_X] = \Delta_X$ ;*
2. *il existe au plus une loi de Mal'tsev $p\colon X \times X \times X \to X$ sur un objet $X$, et $p$ est toujours associative (condition $\mathbf{R}$) ;*
3. *si $S_1 \subseteq S_2$ et $[S_2, \nabla_X] = \Delta_X$, alors $[S_1, \nabla_X] = \Delta_X$ ;*
4. *si $i\colon Y \to X$ est un monomorphisme et $[R, \nabla_X] = \Delta_X$, alors $[i^{-1}(R), \nabla_Y] = \Delta_Y$ ;*
5. *si $f\colon X \to Y$ est un épimorphisme régulier, $[R, \nabla_X] = \Delta_X$ et $f(R)$ est une relation d'équivalence, alors $[f(R), \nabla_Y] = \Delta_Y$ ;*
6. *la sous-catégorie $\mathbb{C}_{Ab}$ des objets abéliens de $\mathbb{C}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}$ ; $\mathbb{C}_{Ab}$ est naturellement de Mal'tsev [57], stable par sous-objets et par quotients réguliers dans $\mathbb{C}$.*

Supposons que $\mathbb{C}$ soit une catégorie exacte à facteurs permutables telle que la sous-catégorie $\mathbb{C}_{Ab}$ est réflexive dans $\mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}_{Ab} \arrow[r, hook, shift right, "U"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbb{C} \arrow[l, shift right, "ab"'] \end{tikzcd} \qquad (\mathbf{S})$$

(c'est le cas pour une variété modulaire, ou pour une catégorie exacte de Mal'tsev avec coégalisateurs). Alors la structure galoisienne $\Gamma = (\mathbb{C}, \mathbb{C}_{Ab}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, ab, U)$ est admissible, si l'on choisit pour $\mathcal{E}$ et $\mathcal{Z}$ les classes des épimorphismes réguliers de $\mathbb{C}$ et de $\mathbb{C}_{Ab}$, respectivement. Le résultat suivant est donc une généralisation du Théorème 2.1 :

**3.10. Théorème** [XI]
*Soit $f\colon A \to B$ un épimorphisme régulier dans une catégorie à facteurs permutables $\mathbb{C}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$f\colon A \to B$ est un revêtement pour $\Gamma$ ;*
2. *$f\colon A \to B$ est un revêtement normal pour $\Gamma$ ;*
3. *$[R[f], \nabla_A] = \Delta_A$.*

# 4 Catégories semi-abéliennes et homologie

## (A) Suites centrales et homologie

Dans une catégorie semi-abélienne dans le sens de Janelidze, Márki et Tholen [53], les revêtements relatifs à une sous-catégorie de Birkhoff admettent une description plus simple que dans le cas général. Par exemple, si $\Gamma = (\mathbb{C}, \mathbb{C}_{Ab}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, ab, U)$ est la structure galoisienne associée à l'adjonction **S** dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{C}$, les revêtements sont précisement les extensions

$$\begin{tikzcd} R[f] \arrow[r, shift left=2, "p_1"] \arrow[r, shift right=2, "p_2"'] & X \arrow[l, "\delta" description] \arrow[r, two heads, "f"] & Y \end{tikzcd} \qquad (\mathbf{T})$$

telles que la diagonale $\delta\colon X \to R[f]$, définie par $p_1 \circ \delta = 1_X = p_2 \circ \delta$, est un monomorphisme normal (voir [VII]). Grâce au Corollaire 3.6 sur la décomposition en produits directs, il est facile de voir que $R[f]$ dans $\mathbf{T}$ est canoniquement isomorphe au produit

$$\begin{tikzcd} X \times Q \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift right=2] & X \arrow[l] \arrow[r, two heads, "f"] & Y, \end{tikzcd}$$

où $Q$ est un objet abélien de $\mathbb{C}$. Par le Théorème 3.10 cette condition est aussi équivalente à l'existence d'un connecteur entre $R[f]$ et $\nabla_X$, i.e. $f\colon X \to Y$ est une extension algébriquement centrale.

Une relation intéressante entre centralité et homologie a été découverte par Stallings [74], qui a éclairci le lien entre la suite centrale descendante d'un groupe et ses groupes d'homologie. Dans l'article [XIV] en collaboration avec Everaert, nous isolons les propriétés catégoriques de la variété $\mathsf{Grp}$ des groupes qui sont essentielles pour démontrer ce résultat : il s'agit d'un contexte axiomatique comprenant non seulement toute catégorie semi-abélienne avec assez d'objets projectifs réguliers, mais aussi d'autres catégories qui n'ont pas d'objet zéro, notamment la catégorie $B$-$\mathsf{PXMod}$ des $B$-modules précroisés sur un groupe fixé $B$.

**4.1. Théorème** [XIV]
*Soit $\mathbb{C}$ une catégorie exacte, protomodulaire, quasi-pointée (l'unique flèche $0 \to 1$ est un monomorphisme), avec assez d'objets projectifs ; soit $\mathbb{F}$ une sous-catégorie de Birkhoff de $\mathbb{C}$.*
*Supposons que $f\colon A \to B$ soit une flèche de $\mathbb{C}$ telle que*

1. *$H_1(f)\colon H_1(A) \longrightarrow H_1(B)$ est un isomorphisme,*
2. *$H_2(f)\colon H_2(A) \longrightarrow H_2(B)$ est un épimorphisme régulier,*

*et notons $A^{n+1} = [A, A^n]$ et $B^{n+1} = [B, B^n]$ les $n$-ièmes termes dans les suites centrales descendantes de $A$ et de $B$, respectivement.*
*Alors, pour tout $n \geq 1$, la flèche induite $\frac{A}{A^n} \to \frac{B}{B^n}$ est un isomorphisme.*

La démonstration de ce résultat repose sur une généralisation de la suite exacte à cinq termes en homologie

$$H_2(A) \xrightarrow{H_2(f)} H_2(B) \longrightarrow \frac{K}{[K,A]} \longrightarrow H_1(A) \xrightarrow{H_1(f)} H_1(B) \longrightarrow 0$$

(dite de "Stallings et Stammbach" [74, 75]) associée à une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0.$$

Dans notre contexte, le deuxième objet d'homologie $H_2(A)$ de $A$ est défini à l'aide de "formules de Hopf généralisées"

$$H_2(A) = \frac{R \cap [F, F]}{[R, F]}, \qquad (\mathbf{U})$$

où $\frac{F}{R} \cong A$ est une présentation projective de $A$, $[F, F]$ et $[R, F]$ sont des commutateurs qui dépendent du choix de la sous-catégorie de Birkhoff $\mathbb{F}$ de $\mathbb{C}$. Par exemple, si l'on considère la sous-catégorie $\mathbb{F} = B\text{-}\mathsf{XMod}$ des $B$-modules croisés dans la catégorie $\mathbb{C} = B\text{-}\mathsf{PXMod}$ des $B$-modules précroisés, $\mathbf{U}$ devient

$$H_2(A) = \frac{R \cap \langle F, F \rangle}{\langle R, F \rangle}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le commutateur de Peiffer : dans ce cas, le Théorème 4.1 donne précisement le résultat obtenu par Conduché et Ellis dans [26]. En toute généralité, l'expression $\mathbf{U}$ est un *invariant de Baer* [35, 32, 33] : en particulier, elle ne dépend donc pas du choix de la présentation. Quand $\mathbb{C}$ est aussi monadique sur la catégorie des ensembles, cette définition de l'homologie est cohérente avec celle de Barr et Beck [2].

## (B) Formules de Hopf d'ordre supérieur

Dans la catégorie des groupes, la formule de Hopf pour le deuxième groupe d'homologie d'un groupe que nous venons de rappeler est le cas particulier $n = 2$ du Théorème de Brown et Ellis [16], qui donne des formules explicites pour tous les groupes d'homologie $H_n(G, \mathbb{Z})$ d'un groupe $G$.

Rappelons explicitement le cas $n = 3$ : étant donnée une présentation double du groupe $G$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \frac{F}{K_2} \arrow[d, two heads] \\ \frac{F}{K_1} \arrow[r, two heads] & G, \end{tikzcd}$$

où $K_1$ et $K_2$ sont deux sous-groupes distingués de $F$ satisfaisant

$$G \cong \frac{F}{K_1 \cdot K_2}$$

(ce carré commutatif est donc un pushout régulier) et tels que $F$, $\frac{F}{K_1}$ et $\frac{F}{K_2}$ sont des groupes libres, alors le troisième groupe d'homologie est donné par

$$H_3(G, \mathbb{Z}) \cong \frac{K_1 \cap K_2 \cap [F, F]}{[K_1 \cap K_2, F] \cdot [K_1, K_2]}.$$

L'idée que les formules de Brown-Ellis-Hopf puissent être expliquées grâce à la théorie de Galois catégorique est due à Janelidze [45], qui en a donné une interprétation en termes de groupes de Galois (voir aussi [47]).

Dans l'article [XVI] en collaboration avec Everaert et Van der Linden, nous démontrons la validité de telles formules pour les "algèbres d'homologie" $H_n(A, I)$ dans une variété semi-abélienne $\mathbb{V}$ à coefficients dans un foncteur $I \colon \mathbb{V} \to \mathbb{F}$, où $\mathbb{F}$ est une sous-variété quelconque de $\mathbb{V}$. Cette caractérisation utilise la centralisation des extensions d'ordre supérieur : on retrouve les formules de Brown et Ellis pour l'homologie d'un groupe en considérant le foncteur d'abélianisation $I = ab \colon \mathsf{Grp} \to \mathsf{Ab}$.

L'outil principal provient des structures galoisiennes d'ordre supérieur, qui permettent de donner une preuve purement algébrique de ce résultat, par simple récurrence. Considérons par exemple l'algèbre d'homologie $H_3(A, I)$ d'une algèbre $A$ d'une variété semi-abélienne $\mathbb{V}$, à coefficients dans le foncteur $I \colon \mathbb{V} \to \mathbb{F}$. La structure galoisienne admissible

$$\Gamma = (\mathbb{V}, \mathbb{F}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, I, U)$$

induit une nouvelle structure galoisienne, à son tour admissible

$$\Gamma_1 = (\mathsf{Ext}(\mathbb{V}), \mathsf{CExt}_{\mathbb{F}}(\mathbb{V}), \mathcal{E}^1, \mathcal{Z}^1, I_1, U_1),$$

où $\mathsf{Ext}(\mathbb{V})$ est la catégorie des extensions de $\mathbb{V}$, $\mathsf{CExt}_{\mathbb{F}}(\mathbb{V})$ est sa sous-catégorie des extensions centrales relatives à $\mathbb{F}$ (=revêtements normaux relatifs à $\Gamma$),

$\mathcal{E}^1$ et $\mathcal{Z}^1$ sont, respectivement, les classes des extensions de $\mathsf{Ext}(\mathbb{V})$ et de $\mathsf{CExt}_{\mathbb{F}}(\mathbb{V})$, i.e. les pushout réguliers (voir **Q**). En considérant ensuite les catégories $\mathsf{Ext}^2(\mathbb{V})$ des extensions doubles, et $\mathsf{CExt}^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{V})$ des extensions centrales doubles relatives à $\mathbb{F}$ (= revêtements normaux relatifs à $\Gamma_1$), nous arrivons à une nouvelle structure admissible

$$\Gamma_2 = (\mathsf{Ext}^2(\mathbb{V}), \mathsf{CExt}^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{V}), \mathcal{E}^2, \mathcal{Z}^2, I_2, U_2).$$

Les classes $\mathcal{E}^2$ et $\mathcal{Z}^2$ sont données par des flèches qui sont essentiellement des "pushouts réguliers de dimension supérieure". Or, étant donnée une présentation double libre $f$ d'une algèbre $A$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, two heads, "f_2"] \arrow[d, two heads, "f_1"'] & \frac{F}{K_2} \arrow[d, two heads] \\ \frac{F}{K_1} \arrow[r, two heads] & A, \end{tikzcd} \tag{V}$$

on montre que

$$H_3(A, I) \cong \frac{[F,F]_{\mathbb{V}} \cap K_1 \cap K_2}{L_2[f]}. \tag{W}$$

Ici, $H_3(A, I)$ représente la troisième algèbre d'homologie à coefficients dans $I$ au sens de Barr et Beck (relative à la comonade "ensemble sous-jacent/algèbre libre", voir [2] et [33]). Dans le membre de droite, $[F, F]_{\mathbb{V}}$ est le noyau de la flèche universelle $\eta_F \colon F \to I(F)$, et $L_2[f]$ est le noyau du quotient qui associe de manière universelle l'extension centrale double

$$\begin{tikzcd} \frac{F}{L_2[f]} \arrow[r, two heads, dotted] \arrow[d, two heads, dotted] & \frac{F}{K_2} \arrow[d, two heads] \\ \frac{F}{K_1} \arrow[r, two heads] & A \end{tikzcd}$$

à l'extension double $f$ dans **V**. En d'autres termes, le carré ci-dessus est l'image $I_2(f)$ de $f$ par l'adjoint à gauche $I_2$ dans la réflexion

$$\begin{tikzcd} \mathsf{CExt}^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{V}) \arrow[r, hook, shift right, "U_2"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Ext}^2(\mathbb{V}). \arrow[l, shift right, "I_2"'] \end{tikzcd}$$

L'algèbre $L_2[f]$ apparaît donc comme une sorte de "commutateur d'ordre supérieur", défini comme noyau de la "centralisation double".
Dans le cas du foncteur d'abélianisation $ab \colon \mathsf{Grp} \to \mathsf{Ab}$, on a $[F, F]_{\mathsf{Ab}} = [F, F]$

pour tout $F$ dans $\mathsf{Grp}$, et $L_2[f] = [K_1 \cap K_2, F] \cdot [K_1, K_2]$ pour toute présentation $f$ comme dans $\mathbf{V}$ (il s'agit d'une conséquence de la caractérisation des extensions centrales doubles, voir [44], et la Section 1.($G$)) : on retrouve ainsi la formule de Brown et Ellis, rappelée au début de cette Section, pour $n = 3$.

En reitérant cette construction, nous pouvons établir le résultat général suivant :

**4.2. Théorème** [XVI]
*Soit $f$ une présentation $n$-uple d'une algèbre $A$ d'une variété semi-abélienne $\mathbb{V}$, $I\colon \mathbb{V} \to \mathbb{F}$ le foncteur de réflexion dans une sous-catégorie de Birkhoff $\mathbb{F}$ de $\mathbb{V}$. Alors, si on note $\langle n \rangle = \{1, 2, \cdots, n\}$, il y a un isomorphisme*

$$H_{n+1}(A, I) \cong \frac{[f_\varnothing, f_\varnothing]_\mathbb{F} \cap \bigcap_{i \in \langle n \rangle} K[f_i]}{L_n[f]}. \qquad (\mathbf{X})$$

*L'algèbre $[f_\varnothing, f_\varnothing]_\mathbb{F}$ est le noyau de la réflexion dans $\mathbb{F}$ de l'algèbre libre "initiale" de la présentation (par exemple : l'algèbre $F$ dans $\mathbf{V}$), et $L_n[f]$ est le noyau de la réflexion de la présentation $f$ dans la catégorie $\mathsf{CExt}^n_\mathbb{F}(\mathbb{V})$ des extensions centrales d'ordre $n$.*

Notons que l'expression du membre à droite de la Formule $\mathbf{X}$ est un invariant de Baer d'ordre supérieur : en particulier elle est donc indépendante de la présentation $n$-uple de $A$.

Des nouveaux exemples sont étudiés dans [XVI] : des formules de Hopf d'ordre supérieur sont obtenues en choisissant comme $I$ les foncteurs suivants :

- le foncteur $\mathsf{nil_k}\colon \mathsf{Grp} \to \mathsf{Nil_k}$ qui associe de manière universelle, à un groupe $G$, un groupe nilpotent de classe $k$ ;
- le foncteur $\mathsf{sol_k}\colon \mathsf{Grp} \to \mathsf{Sol}_k$ qui associe universellement, à un groupe $G$, un groupe résoluble de classe $k$ ;
- le foncteur $F\colon \mathsf{PXMod} \to \mathsf{XMod}$ qui associe universellement, à un module précroisé $\alpha\colon A \to B$, un module croisé.

Par exemple, en considérant le foncteur $\mathsf{nil_k}\colon \mathsf{Grp} \to \mathsf{Nil_k}$ de réflexion dans la sous-catégorie $\mathsf{Nil_k}$ des groupes nilpotents de classe $k$, nous obtenons un isomorphisme

$$H_{n+1}(G, \mathsf{nil_k}) \cong \frac{[\dots[[f_\varnothing, f_\varnothing], f_\varnothing], \dots] \cap \bigcap_{i \in \langle n \rangle} K[f_i]}{\prod_{I_1 \cup \dots \cup I_k = \langle n \rangle} \Big[\cdots \Big[\Big[\bigcap_{i \in I_1} K[f_i], \bigcap_{i \in I_2} K[f_i]\Big], \bigcap_{i \in I_3} K[f_i]\Big], \dots\Big]}$$

pour tout $n \geq 1$ et toute présentation $n$-uple $f$ d'un groupe $G$ (voir aussi [30]).

# 5 Structures galoisiennes et catégories homologiques

## (A) Théories de torsion

En collaboration avec Bourn, nous introduisons dans [XIII] une notion de théorie de torsion dans les catégories homologiques. Ce contexte permet de découvrir et d'étudier des nouveaux exemples de théorie de torsion dans les catégories des groupes topologiques, des modules croisés, des anneaux commutatifs et des anneaux commutatifs réguliers de von Neumann, tout en couvrant la théorie classique dans les catégories de modules et dans les catégories abéliennes [28].

Une catégorie régulière, pointée et protomodulaire est dite *homologique* [3]. Bourn a démontré qu'une catégorie régulière et pointée $\mathbb{C}$ est protomodulaire si et seulement si le "Lemme des 5 court" est vrai dans $\mathbb{C}$ : pour tout diagramme commutatif de suites exactes courtes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K[f] \arrow[r, "\mathsf{Ker}\,(f)"] \arrow[d, "u"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v"] & B \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K[f'] \arrow[r, "\mathsf{Ker}\,(f')"'] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

si $u$ et $w$ sont des isomorphismes, alors $v$ est un isomorphisme. Toute catégorie semi-abélienne est homologique, notamment les catégories $\mathsf{Grp}$ des groupes, $\mathsf{Rng}$ des anneaux (pas forcément unitaires), $\mathsf{CRng}$ des anneaux commutatifs, $\mathsf{Lie}_\mathsf{K}$ des $K$-algèbres de Lie sur un corps $K$, $\mathsf{XMod}$ des modules croisés, $\mathsf{PXMod}$ des modules précroisés et $\mathsf{Grp}(\mathsf{HComp})$ des groupes compacts séparés. En outre, la catégorie des modèles topologiques $\mathbb{T}(\mathsf{Top})$ d'une théorie algébrique semi-abélienne $\mathbb{T}$ est une catégorie homologique [4] : en particulier, les catégories $\mathsf{Grp}(\mathsf{Top})$ des groupes topologiques, $\mathsf{Rng}(\mathsf{Top})$ des anneaux topologiques et $\mathsf{Grp}(\mathsf{Haus})$ des groupes séparés sont homologiques. L'importance de la validité du "Lemme des 5" dans une approche catégorique aux théories des radicaux avait été soulignée par Janelidze et Márki dans [51].

**5.1. Définition**
Soit $\mathbb{C}$ une catégorie homologique. Une *théorie de torsion* dans $\mathbb{C}$ est un couple $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de sous-catégories pleines et replètes de $\mathbb{C}$ telles que

1. $\forall T \in \mathcal{T}, \forall F \in \mathcal{F}$, $\mathsf{Hom}_\mathbb{C}(T, F) = \{0\}$ ;
2. pour chaque objet $X$ de $\mathbb{C}$ il existe une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{t_X} X \xrightarrow{\eta_X} F \longrightarrow 0$$

avec $T \in \mathcal{T}$ et $F \in \mathcal{F}$.

Comme dans le cas abélien, on appelle $\mathcal{T}$ la sous-catégorie de “torsion” et $\mathcal{F}$ la sous-catégorie “sans torsion”. Voici quelques exemples non-abéliens de théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ dans une catégorie homologique :

1. $(\mathsf{Grp}(\mathsf{Ind}), \mathsf{Grp}(\mathsf{Haus}))$ les groupes indiscrets et les groupes séparés dans la catégorie $\mathsf{Grp}(\mathsf{Top})$ des groupes topologiques ;
2. $(\mathsf{Grp}(\mathsf{HComp}(\mathsf{Conn})), \mathsf{Grp}(\mathsf{Prof}))$ les groupes compacts séparés connexes et les groupes profinis dans la catégorie $\mathsf{Grp}(\mathsf{HComp})$ des groupes compacts séparés ;
3. $(\mathsf{NilCRng}, \mathsf{CRng}^{\star})$ les anneaux commutatifs nilpotents et les anneaux commutatifs sans éléments nilpotents (non nuls) dans la catégorie $\mathsf{CRng}$ des anneaux commutatifs ;
4. $(\mathbb{C}_{Ab}, \mathsf{Eq}(\mathbb{C})$ les objets abéliens de $\mathbb{C}$ et les relations d'équivalence internes à $\mathbb{C}$ dans la catégorie $\mathsf{Grpd}(\mathbb{C})$ des groupoïdes internes à une catégorie homologique $\mathbb{C}$ ; en particulier, si $\mathbb{C}$ est la catégorie des groupes, on obtient $(\mathsf{Ab}, \mathsf{NormMono})$ les groupes abéliens et les monomorphismes normaux dans la catégorie $\mathsf{XMod}$ des modules croisés ;
5. $(\mathsf{ConnGrpd}(\mathbb{C}), \mathsf{Dis}(\mathbb{C}))$ les groupoïdes connexes et les groupoïdes discrets dans la catégorie $\mathsf{Grpd}(\mathbb{C})$ des groupoïdes internes à une catégorie semi-abélienne $\mathbb{C}$ ; si $\mathbb{C}$ est la catégorie des groupes, on obtient $(\mathsf{CExt}(\mathsf{Grp}), \mathsf{Grp})$ les extensions centrales de groupes et les groupes dans la catégorie $\mathsf{XMod}$ des modules croisés.

L'introduction de la notion d'opérateur homologique de fermeture sur les noyaux nous a permis de caractériser plusieurs types de sous-catégories réflexives dans une catégorie homologique. Il est remarquable que les bonnes propriétés d'exactitude d'une catégorie homologique permettent de concentrer toute l'information uniquement sur les noyaux, en rendant superflu de définir l'opérateur de fermeture sur tous les sous-objets (pour une approche plus classique voir [29, 25]).

**5.2. Définition** Un *opérateur homologique de fermeture* $\overline{(\ )}$ sur les noyaux est la donnée, pour chaque noyau $S \xrightarrow{s} X$, d'un autre noyau $\overline{S}_X \xrightarrow{\overline{s}} X$, appelé la fermeture de $S$ dans $X$. Cette correspondance doit satisfaire les propriétés suivantes (où $S \longrightarrow X$ et $T \longrightarrow X$ sont des noyaux et $Y \xrightarrow{f} X$ est une flèche de $\mathbb{C}$) :

1. $S \subseteq \overline{S}_X$
2. $S \subseteq T$ entraîne $\overline{S}_X \subseteq \overline{T}_X$

3. $\overline{f^{-1}(S)}_Y \subseteq f^{-1}(\overline{S}_X)$
4. $\overline{(\overline{S}_X)}_X = \overline{S}_X$
5. pour tout épimorphisme régulier $Y \xrightarrow{g} X$ on a $\overline{g^{-1}(S)}_Y = g^{-1}(\overline{S}_X)$

**Convention**
Dans la suite on utilisera le terme "épiréflexion" pour une réflexion ayant la propriété que chaque composante de l'unité de l'adjonction est un épimorphisme régulier.
Les opérateurs homologiques de fermeture sur les noyaux caractérisent entièrement les épiréflexions dans les catégories homologiques :

**5.3. Théorème** [XIII]
*Soit $\mathbb{C}$ une catégorie homologique. Il y a une bijection entre les sous-catégories épiréflexives de $\mathbb{C}$ et les opérateurs homologiques de fermeture sur les noyaux de $\mathbb{C}$.*

*Idée de la preuve :* étant donné un opérateur de fermeture homologique, on considère la sous-catégorie pleine $\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}$ des objets $X$ ayant la propriété que la flèche $0 \to X$ est fermée. Cette sous-catégorie $\mathcal{F}$ est épiréflexive : l'adjoint à gauche $F\colon \mathbb{C} \to \mathcal{F}$ de l'inclusion $U\colon \mathcal{F} \to \mathbb{C}$ envoie un objet $C$ de $\mathbb{C}$ sur le quotient $\frac{C}{\overline{0}_C}$.
Réciproquement, étant donnée une épiréflexion

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, hook, shift right, "U"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbb{C} \arrow[l, shift right, "F"'] \end{tikzcd}$$

notons $t_X\colon T(X) \to X$ le noyau de l'unité de la réflexion $\eta_X\colon X \to UF(X)$ de l'objet $X$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{F}$. La fermeture $\overline{s}_X\colon \overline{S}_X \to X$ d'un noyau $s\colon S \to X$ est obtenue en construisant le produit fibré du quotient $q\colon X \to \frac{X}{S}$ le long de $t_{\frac{X}{S}}$, comme dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & \overline{S}_X \arrow[r] \arrow[d, "\overline{s}"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & T(\frac{X}{S}) \arrow[d, "t_{\frac{X}{S}}"] \\ S \arrow[ur, "i_S"] \arrow[r, "s"'] & X \arrow[r, "q"'] & \frac{X}{S}. \end{tikzcd}$$

□

Un opérateur homologique de fermeture $\overline{(\ )}$ sur les noyaux de $\mathbb{C}$ est appelé *faiblement héréditaire* s'il satisfait la propriété :

pour tout noyau $s\colon S \to X$, l'inclusion canonique $i_S\colon S \to \overline{S}_X$ est dense.

Soit $\mathbb{C}$ une catégorie homologique. Un sous-foncteur $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ du foncteur identité est un *radical* si, pour tout $X \in \mathbb{C}$, la flèche $t_X\colon T(X) \to X$ est un noyau, et $T(\frac{X}{T(X)}) = 0$.

Il est donc possible d'établir le résultat suivant :

**5.4. Théorème** [XIII]
*Soit $\mathbb{C}$ une catégorie homologique. Il existe des bijections entre :*

1. *les théories de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{C}$ ;*
2. *les opérateurs de fermeture faiblement héréditaires de $\mathbb{C}$ ;*
3. *les sous-catégories épiréflexives $\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}$ telles que la réflexion $F\colon \mathbb{C} \to \mathcal{F}$ est une fibration [6] ;*
4. *les radicaux idempotents de $\mathbb{C}$.*

Pour les exemples de théorie de torsion cités plus haut nous pouvons décrire explicitement l'opérateur de fermeture. En particulier, l'opérateur associé à la théorie de torsion $(\mathsf{Grp}(\mathsf{Ind}), \mathsf{Grp}(\mathsf{Haus}))$ donne exactement la fermeture topologique : plus généralement, ceci reste vrai si la théorie $\mathsf{Grp}$ des groupes est remplacée par n'importe quelle théorie semi-abélienne $\mathbb{T}$ [15], et la théorie de torsion $(\mathsf{Grp}(\mathsf{Ind}), \mathsf{Grp}(\mathsf{Haus}))$ par la théorie de torsion $(\mathbb{T}(\mathsf{Ind}), \mathbb{T}(\mathsf{Haus}))$. Cette généralisation s'appuie sur des résultats de Borceux et Clementino concernant les algèbres semi-abéliennes topologiques [4].

Parmi les épiréflexions, les sous-catégories de Birkhoff occupent un rôle de premier plan en algèbre universelle : en fait, quand $\mathbb{C}$ est une variété d'algèbres universelles, ces sous-catégories sont précisement les sous-variétés de $\mathbb{C}$. Si $\mathbb{C}$ est une catégorie semi-abélienne, il est possible de les caractériser de la manière suivante :

**5.5. Théorème** [XIII]
*Soit $\mathbb{C}$ une catégorie semi-abélienne. Il existe des bijections entre :*

1. *les sous-catégories de Birkhoff $\mathcal{F}$ d'une catégorie semi-abélienne $\mathbb{C}$ ;*
2. *les opérateurs homologiques de fermeture de $\mathbb{C}$ tels que, pour tout épimorphisme régulier $f\colon Y \to X$ et pour tout noyau $S \rightarrowtail X$ on a*
$$f(\overline{S}_Y) = \overline{f(S)}_X \,;$$
3. *les radicaux idempotents $T$ de $\mathbb{C}$ qui préservent les épimorphismes réguliers : si $f\colon X \to Y$ est un épimorphisme régulier, alors $T(f)\colon T(X) \to T(Y)$ est un épimorphismes régulier.*

Il existe des sous-catégories de Birkhoff d'une catégorie semi-abélienne $\mathbb{C}$ qui sont en même temps des sous-catégories “sans torsion”. Par exemple, c'est le cas de la sous-catégorie $\mathsf{Grp}(\mathsf{Prof})$ des groupes profinis dans la catégorie $\mathsf{Grp}(\mathsf{HComp})$ des groupes compacts séparés : la fermeture $\overline{s}\colon \overline{S} \to X$ d'un noyau $S \to X$ est donnée par le produit des sous-groupes distingués $S \cdot \Gamma(0)$, où $\Gamma(0)$ est la composante connexe de l'élément neutre de $X$.

Les bijections du Théorème 5.4 se restreignent aux théories de torsion héréditaires, qui sont les théories de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ telles que $\mathcal{T}$ est fermée dans $\mathbb{C}$ pour les sous-objets : si $i\colon X \to T$ est un monomorphisme, avec $T \in \mathcal{T}$, alors $X \in \mathcal{T}$. Un radical $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dit héréditaire si, pour tout sous-objet $s\colon Y \to X$, on a que $T(Y) = T(X) \cap Y$.

**5.6. Corollaire** [XIII]
*Soit $\mathbb{C}$ une catégorie homologique. Il existe des bijections entre :*

1. *les théories de torsion héréditaires $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de $\mathbb{C}$ ;*
2. *les opérateurs de fermeture universels ;*
3. *les sous-catégories épiréflexives $\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}$ telles que la réflexion $F\colon \mathbb{C} \to \mathcal{F}$ préserve les monomorphismes ;*
4. *les radicaux héréditaires de $\mathbb{C}$.*

## (B) Structures galoisiennes et revêtements

Lorsque les épimorphismes réguliers de $\mathbb{C}$ sont des morphismes de descente effective [56], toute théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ dans une catégorie homologique $\mathbb{C}$ détermine naturellement une structure galoisienne. Cette propriété est toujours satisfaite si $\mathbb{C}$ est une catégorie semi-abélienne, mais aussi si l'on considère la catégorie $\mathbb{T}(\mathsf{Top})$ des algèbres semi-abéliennes topologiques (voir [59] et [XV]). En effet, par la condition 3. du Théorème 5.4, la sous-catégorie sans-torsion $\mathcal{F}$ est épiréflexive dans $\mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, hook, shift right, "U"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbb{C} \arrow[l, shift right, "F"'] \end{tikzcd},$$

et l'adjoint à gauche $F\colon \mathbb{C} \to \mathcal{F}$ est une fibration. Cela implique que $(\mathbb{C}, \mathcal{F}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, F, U)$ est une structure galoisienne au sens de la Définition 1.1, avec $\mathcal{E}$ et $\mathcal{Z}$ les classes des épimorphismes réguliers de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}$.

Une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est dite *quasi-héréditaire* si la sous-catégorie de torsion $\mathcal{T}$ est fermée dans $\mathbb{C}$ pour les *sous-objets réguliers*. Dans le cas abélien, les théories de torsion quasi-héréditaires et héréditaires coïncident,

mais dans le contexte homologique cette distinction est importante : par exemple, $(\mathsf{Grp(Ind)}, \mathsf{Grp(Haus)})$ est une théorie de torsion quasi-héréditaire dans la catégorie $\mathsf{Grp(Top)}$, sans pourtant être héréditaire.
Le radical $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ associé à une théorie de torsion préserve les limites finies, en tant que foncteur de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, si et seulement si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est quasi-héréditaire. Cette propriété est essentielle pour démontrer le Théorème suivant (notons que dans l'article [XV], en collaboration avec Rossi, nous utilisons le terme *revêtement galoisien* à la place de revêtement normal) :

**5.7. Théorème** [XV]
*Soit $f\colon A \to B$ un épimorphisme régulier dans une catégorie homologique $\mathbb{C}$. Si la théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{C}$ est quasi-héréditaire, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$f\colon A \to B$ est un revêtement ;*
2. *$f\colon A \to B$ est un revêtement normal ;*
3. *$ker(f) \in \mathcal{F}$ ;*
4. *$T(f)\colon T(A) \longrightarrow T(B)$ est un monomorphisme ;*
5. *$T(A) \cap ker(f) = 0$.*

En particulier, les revêtements normaux pour la théorie de torsion $(\mathsf{Grp(Ind)}, \mathsf{Grp(Haus)})$ dans la catégorie $\mathsf{Grp(Top)}$ sont les homomorphismes ouverts $f\colon A \to B$ tels que $\mathsf{Ker}\,(f)$ est un groupe séparé. En utilisant ce résultat, nous pouvons démontrer que les revêtements normaux relatifs à la théorie de torsion $(\mathsf{Grp(Conn)}, \mathsf{Grp(TotDis)})$ des groupes connexes et des groupes totalement discontinus dans la catégorie $\mathsf{Grp(Top)}$ sont les homomorphismes ouverts $f\colon A \to B$ tels que $\mathsf{Ker}\,(f)$ est un groupe totalement discontinu. Notons que les conditions du Théorème 5.7 ne sont pas équivalentes si la théorie de torsion n'est pas quasi-héréditaire. La caractérisation des revêtements normaux est très liée à celle des "revêtements semi-simples" au sens de Janelidze, Márki et Tholen [52]. Dans ce dernier article, les auteurs ont résolu le problème de la classification des revêtements normaux relatifs à des théories générales de radicaux. Notre cadre axiomatique est différent : si d'une part nous traitons les théories de torsion, qui correspondent à des radicaux très particuliers, d'autre part les auteurs de [52] démandent que chaque objet de $\mathbb{C}$ soit un quotient régulier d'un objet de $\mathcal{F}$, et que la catégorie $\mathbb{C}$ soit exacte. Ces dernières hypothèses ne sont pas satisfaites par certaines des théorie de torsion que nous voulons étudier, notamment par la théorie $(\mathsf{Grp(Ind)}, \mathsf{Grp(Haus)})$ dans la catégorie des groupes topologiques, ou par la théorie $(\mathsf{CExt(Grp)}, \mathsf{Grp})$ dans la catégorie des modules croisés. Les deux approches sont donc complémentaires, et notre travail permet de classifier les revêtements normaux correspondants à des théories de torsion dans un cadre non-exacte (voir la dernière remarque de [52]).

Grâce à la caractérisation du Théorème 5.7, on peut montrer que tout épimorphisme régulier se factorise à travers un revêtement normal :

**5.8. Théorème** [XV]
*Soit $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ une théorie de torsion quasi-héréditaire dans $\mathbb{C}$. Alors, pour tout épimorphisme régulier $f \colon A \longrightarrow B$ dans $\mathbb{C}$ il existe un couple $(e, m)$ de flèches de $\mathbb{C}$ telles que :*

1. *$f = m \cdot e$ ;*
2. *$m$ est un revêtement normal ;*
3. *$F(e)$ est un isomorphisme.*

*La construction de la factorisation $(e, m)$ est fonctorielle.*

# 6 Complétions exactes d'une catégorie

Un autre aspect de ma recherche concerne la complétion exacte d'une catégorie. L'idée d'associer de manière universelle une catégorie exacte dans le sens de Barr [1] à une catégorie finiment complète est attribuée à Joyal, et elle a été étudiée en détail et développée par Carboni et Celia Magno [18]. Ce travail a été ensuite généralisé par Carboni et Vitale [24], qui ont introduit la complétion exacte d'une catégorie avec des limites finies *faibles*. L'interêt de cette construction provient aussi de la possibilité d'inclure l'exemple des catégories algébriques, qui peuvent être vues comme les complétions exactes des sous-catégories des algèbres libres (notons que ces dernières ne possèdent que des limites finies faibles).

Si $\mathbb{C}$ est une catégorie avec des limites finies faibles, il est possible de plonger $\mathbb{C}$ de manière universelle dans une catégorie exacte $\mathbb{C}_{ex}$, la *complétion exacte de* $\mathbb{C}$. Un objet de cette catégorie est une "pseudo-équivalence" dans $\mathbb{C}$, représentée par le diagramme

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left=2, "d"] \arrow[r, shift right=2, "c"'] & X \arrow[l, "e" description] \end{tikzcd}.$$

Notons que, quand $\mathbb{C}$ a des vrais produits fibrés, une pseudo-équivalence est une relation d'équivalence si et seulement si les morphismes $d$ (domaine) et $c$ (codomaine) sont conjointement monomorphes.

Un pré-morphisme $(f_0, f_1)\colon (R, X) \to (S, Y)$ est un couple de flèches de $\mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, shift left=2, "d"] \arrow[r, shift right=2, "c"'] \arrow[d, "f_1"'] & X \arrow[l, "e"'] \arrow[d, "f_0"] \\
S \arrow[r, shift left=2, "\delta"] \arrow[r, shift right=2, "\gamma"'] & Y \arrow[l, "\epsilon"']
\end{tikzcd}$$

telle que $\delta \circ f_1 = f_0 \circ d$ et $\gamma \circ f_1 = f_0 \circ c$. Un morphisme de la catégorie $\mathbb{C}_{ex}$ est une classe d'équivalence $[f_0, f_1]$ de pre-morphismes : on identifie deux pré-morphismes $(f_0, f_1)$ et $(g_0, g_1)$ s'il existe une flèche $h\colon X \to S$ telle que $\delta \circ h = f_0$ et $\gamma \circ h = g_0$. Cette catégorie $\mathbb{C}_{ex}$ est exacte, et il existe un foncteur pleinement fidèle $\Gamma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}_{ex}$ qui satisfait la propriété universelle attendue d'une construction libre (voir [24]). En outre, les objets de $\mathbb{C}$ sont projectifs réguliers dans $\mathbb{C}_{ex}$, et chaque objet de $\mathbb{C}_{ex}$ est un quotient régulier d'un objet de $\mathbb{C}$.

Des nombreux auteurs se sont intéressés au problème de déterminer des conditions sur une catégorie $\mathbb{C}$ avec des limites finies (faibles) pour que sa complétion $\mathbb{C}_{ex}$ ait des bonnes propriétés. Des réponses satisfaisantes à ce problème ont été trouvées, entre autres, en ce qui concerne le fait que $\mathbb{C}_{ex}$ soit abélienne [18], cartésienne fermée [23, 71], un topos [66] et une catégorie de Mal'tsev [72].

Dans les articles [I] (avec Vitale) et [V] nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes sur une catégorie $\mathbb{C}$ pour que sa complétion exacte $\mathbb{C}_{ex}$ soit, respectivement, une catégorie extensive et une catégorie semi-abélienne.

## (A) Complétion exacte de $\mathsf{HTop}$

Rappelons qu'une catégorie $\mathbb{C}$ avec sommes est *extensive* [20] si elle possède des produits fibrés le long des injections canoniques dans une somme, et si $\mathbb{C}$ satisfait la propriété suivante : étant donné un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] & Y' \arrow[l] \arrow[d] \\
X \arrow[r, "i_1"'] & X + Y & Y \arrow[l, "i_2"]
\end{tikzcd}$$

où $(X+Y, i_1\colon X \to X+Y, i_2\colon Y \to X+Y)$ est la somme de $X$ et $Y$, la ligne supérieure est une somme, i.e. $A \cong X'+Y'$, si et seulement si les deux carrés sont des produits fibrés. Une motivation pour étudier le problème de l'extensivité de la complétion exacte d'une catégorie avec des limites finies *faibles* provient de la remarque que la catégorie $\mathsf{HTop}$ de l'homotopie des espaces topologiques est extensive, sans pourtant avoir des limites. En fait, $\mathsf{HTop}$ a des produits (les produits topologiques), mais elle n'a que des égalisateurs *faibles*, d'où la question naturelle de déterminer si sa complétion exacte est extensive. La réponse est affirmative :

**6.1. Théorème** [I]
*La complétion exacte $\mathsf{HTop}_{ex}$ de la catégorie $\mathsf{HTop}$ de l'homotopie des espaces topologiques est un prétopos.*

## (B) Complétion exacte semi-abélienne

Dans [V] nous étudions les catégories avec des limites finies faibles $\mathbb{C}$ ayant la propriété que $\mathbb{C}_{ex}$ est semi-abélienne. En considérant la sous-catégorie $\mathcal{F}$ des algèbres libres d'une variété semi-abélienne $\mathbb{V}$, nous pouvons donner une nouvelle preuve du Théorème de caractérisation des variétés algébriques semi-abéliennes dû à Janelidze et Bourn [15] (l'équivalence des deux premières conditions dans le Théorème 6.2). En outre, nous isolons la propriété sémantique de la catégorie $\mathcal{F}$ des algèbres libres qui est typique des variétés semi-abéliennes (il s'agit de la condition 3 ci-dessous) :

**6.2. Théorème** [15] [V]
*Soit $\mathbb{C}$ une variété d'algèbres universelles, $\mathbb{F}$ la sous-catégorie pleine des algèbres libres de $\mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathbb{C}$ est une catégorie semi-abélienne ;*
2. *la théorie $\mathbb{T}$ de $\mathbb{C}$ possède une unique constante $0$, $n$ lois de composition binaire $\alpha_1(x,y),\ldots,\alpha_n(x,y)$ et une loi de composition $\beta$, d'arité $n+1$ (pour un $n \in \mathbb{N}^*$), telles que*

$$\beta(\alpha_1(x,y),\ldots,\alpha_n(x,y),y) = x \quad \text{et} \quad \alpha_i(x,x) = 0 \quad \text{pour } i = 1,\ldots n;$$

3. *$\mathbb{F}$ possède la propriété suivante : pour tout noyau faible $k\colon K \to X$ d'un épimorphisme scindé $f\colon X \to Y$*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] \arrow[d] & X \arrow[d, shift right, "f"'] \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[u, shift right, "i"'] \end{tikzcd}$$

*la flèche canonique $(k,i)\colon K+Y \to X$ est un épimorphisme scindé.*

## (C) Localisations des variétés de Mal'tsev

Nous avons utilisé de manière essentielle la technique de complétion exacte aussi pour trouver une caractérisation des localisations des variétés de Mal'tsev, i.e. des catégories qui sont équivalentes à une sous-catégorie réflexive $\mathbb{F}$ d'une variété de Mal'tsev $\mathbb{V}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F} \arrow[r, hook, shift right, "U"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbb{V} \arrow[l, shift right, "F"'] \end{tikzcd}$$

telle que l'adjoint à gauche $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{F}$ préserve les limites finies :

**6.3. Théorème** [II]
*Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathbb{C}$ est équivalente à une localisation d'une variété de Mal'tsev ;*
2. *$\mathbb{C}$ est une catégorie exacte avec un générateur régulier $G$ admettant toutes les sommes, $G$ est une coalgèbre interne de Mal'tsev, et les colimites filtrantes commutent avec les limites finies dans $\mathbb{C}$.*

On peut déduire de ce résultat, obtenu en collaboration avec Vitale, que les localisations des variétés naturellement de Mal'tsev au sens de Johnstone [57] sont exactement les catégories exactes naturellement de Mal'tsev avec un générateur régulier $G$ admettant toutes les sommes et telles que les colimites filtrantes commutent avec les limites finies. Ce résultat généralise ainsi le théorème classique de Gabriel et Popescu : les catégories de Grothendieck sont exactement les localisations des catégories des modules sur un anneau commutatif unitaire [36].

## Publications présentées pour l'Habilitation :


[I] M. GRAN et E. M. VITALE, *On the exact completion of the homotopy category*, Cah. Topol. Géométrie Différ. Catégoriques, XXXIX-4, 1998, 287-297.

[II] M. GRAN et E. M. VITALE, *Localizations of Maltsev varieties*, Theory Appl. Categ., Vol. 5, No 12, 1999, 281-291.

[III] M. GRAN, *Central extensions and internal groupoids in Maltsev categories*, J. Pure Appl. Algebra, 155, 2001, 139-166.

[IV] D. BOURN et M. GRAN, *Centrality and connectors in Maltsev categories*, Algebra Universalis, 48 (3), 2002, 309-331.

[V] M. GRAN, *Semi-abelian exact completions*, Homology, Homotopy and Applications, vol. 4 (1), 2002, 175-189.

[VI] M. GRAN, *Commutators and central extensions in universal algebra*, J. Pure Appl. Algebra, 174, 2002, 249-261.

[VII] D. BOURN et M. GRAN, *Central extensions in semi-abelian categories*, J. Pure Appl. Algebra, 175, 2002, 31-44.

[VIII] M. GRAN et V. ROSSI, *Galois Theory and Double Central Extensions*, Homology, Homotopy and Applications, vol. 6 (1), 2004, 283-298.

[IX] M. GRAN et J. ROSICKY, *Special reflexive graphs in modular varieties*, Algebra Universalis, 52, 2004, 89-102.

[X] D. BOURN et M. GRAN, *Normal sections and direct product decompositions*, Communications in Algebra, 32, No. 10, 2004, 3825-3842.

[XI] M. GRAN, *Applications of Categorical Galois Theory in Universal Algebra*, in Galois Theory, Hopf Algebras and Semiabelian Categories, The Fields Institute Communications Series, American Mathematical Society, vol. 43, 2004, 243-280.

[XII] T. EVERAERT et M. GRAN, *Precrossed modules and Galois Theory*, Journal of Algebra, 297, 2006, 292-309.

[XIII] D. BOURN et M. GRAN, *Torsion theories in homological categories*, Journal of Algebra, 305, 2006, 18-47.

[XIV] T. EVERAERT et M. GRAN, *On low-dimensional homology in categories*, Homology, Homotopy and Applications, Vol. 9 (1), 2007, 275-293.

[XV] M. GRAN et V. ROSSI, *Torsion theories and Galois coverings of topological groups*, J. Pure Appl. Algebra, 208, 2007, 135-151.

[XVI] T. EVERAERT, M. GRAN et T. VAN DER LINDEN, *Higher Hopf formulae for homology via Galois Theory*, Cahiers du L.M.P.A. 315, Université du Littoral Côte d'Opale, janvier 2007.

## Références


[1] M. Barr, P. Grillet, et D. van Osdol, *Exact categories and categories of sheaves*, Lecture notes in mathematics, vol. 236, Springer, 1971.

[2] M. Barr et J. Beck, *Homology and standard constructions*, Seminar on triples and categorical homology theory, Lecture Notes Math., vol. 80, Springer, 1969, 245-335.

[3] F. Borceux et D. Bourn, *Mal'cev, Protomodular, Homological and Semi-Abelian Categories*, Math. and its Appl. 566, Kluwer Academic Publishers, 2004.

[4] F. Borceux et M.M. Clementino, *Topological semi-abelian algebras,* Adv. in Math., 190, 2005, 425-453.

[5] F. Borceux et G. Janelidze, *Galois theories*, Cambridge Studies in Adv. Mathematics, vol. 72, Cambridge University Press, 2001.

[6] D. Bourn, *The shift functor and the comprehensive factorization for internal groupoids*, Cah. Topol. Géom. Differ. Catég. 28, 1987, 43-62.

[7] D. Bourn, *Normalization equivalence, kernel equivalence and affine categories*, Lecture Notes Math. vol. 1488, Springer, 1991, 43-62.

[8] D. Bourn, *Mal'cev categories and fibrations of pointed objects*, Appl. Categorical Structures, 4, 1996, 302-327.

[9] D. Bourn, *Normal subobjects and abelian objects in protomodular categories*, J. Algebra, 228, 2000, 143-164.

[10] D. Bourn, *The denormalized* $3 \times 3$ *lemma*, J. Pure Appl. Algebra, 177, 2003, 113-129.

[11] D. Bourn, *Commutator Theory in Regular Mal'cev categories*, in Galois Theory, Hopf Algebras and Semiabelian Categories, The Fields Institute Communications Series, American Mathematical Society, vol. 43, 2004, 61-75.

[12] D. Bourn et M. Gran, *Centrality and normality in protomodular categories*, Theory Appl. Categ., Vol. 9, No. 8, 2002, 151-165.

[13] D. Bourn et M. Gran, *Categorical aspects of modularity*, in Galois Theory, Hopf Algebras and Semiabelian Categories, The Fields Institute Communications Series, American Mathematical Society, vol. 43, 2004, 77-100.

[14] D. Bourn et M. Gran, *Regular, Protomodular and Abelian Categories*, in Categorical Foundations - Special Topics in Order, Topology, Algebra and Sheaf Theory, Cambridge University Press, Encyclopaedia of Mathematics and its Applications 97, 2004, 165-211.

[15] D. Bourn et G. Janelidze, *Characterization of protomodular varieties of universal algebras*, Theory Appl. Categ., Vol. 11, No. 6, 2003, 143-147.

[16] R. Brown et G. Ellis, *Hopf formulae for the higher homology of a group*, Bull. Lond. Math. Soc. 20, No. 2, 1988, 124-128.

[17] R. Brown et C. Spencer, *G-groupoids, crossed modules and the fundamental groupoid of a topological group*, Proc. Konn. Ned. Akad. Wet, 79, 1976, 296-302.

[18] A. Carboni et R. Celia Magno, *The free exact category on a left exact one*, J. Austr. Math. Soc. (Series A) 33, 1982, 295-301.

[19] A. Carboni, G. Janelidze et A.R. Magid, *A note on Galois correspondence for commutative rings*, J. Algebra 183, 1996, 266-272.

[20] A. Carboni, S. Lack et R.F.C. Walters, *Introduction to extensive and distributive categories*, J. Pure Appl. Algebra 84, 1993, 145-158.

[21] A. Carboni, J. Lambek et M.C. Pedicchio, *Diagram chasing in Mal'cev categories*, J. Pure Appl. Algebra, 69, 1991, 271-284.

[22] A. Carboni, M.C. Pedicchio et N. Pirovano, *Internal graphs and internal groupoids in Mal'cev categories*, Proceedings of the Conference Montreal 1991, 1992, 97-109.

[23] A. Carboni et G. Rosolini, *Locally cartesian closed exact completions*, J. Pure Appl. Algebra 154, 2000, 103-116.

[24] A. Carboni et E.M. Vitale, *Regular and exact completions*, J. Pure Appl. Algebra 125, 1998, 79-116.

[25] M.M. Clementino, D. Dikranjan et W. Tholen, *Torsion theories and radicals in normal categories*, J. Algebra, 305, 1, 2006, 98-129.

[26] D. Conduché et G.J. Ellis, *Quelques propriétés homologiques des modules précroisés*, J. Algebra 123 1989, 327-335.

[27] A. Day, *A characterisation of modularity for congruence lattices of algebras*, Canad. Math. Bull., 1969, 161-173.

[28] S.E. Dickson, *A torsion theory for abelian categories*, Trans. Amer. Math. Soc., 1966, 223-235.

[29] D. Dikranjan et W. Tholen, *Categorical structure of closure operator. With applications to topology, algebra and discrete mathematics.* Math. and its Appl. 346, Kluwer Academic Publishers, 1995.

[30] G. Donadze, N. Inassaridze et T. Porter, *$n$-fold Cech derived functors and generalised Hopf type formulas*, K-Theory 35, 2005, 341-373.

[31] T. Everaert et M. Gran, *Relative commutator associated with varieties of $n$-nilpotent and of $n$-solvable groups*, Arch. Math., Vol. 42, 2006, 387-396.

[32] T. Everaert et T. Van der Linden, *Baer invariants in semi-abelian categories I : General Theory*, Theory Appl. Categ. 12, 2004, 1-33.

[33] T. Everaert et T. Van der Linden, *Baer invariants in semi-abelian categories II : Homology*, Theory Appl. Categ. 12, 2004, 195-224.

[34] R. Freese et R. McKenzie, *Commutator theory for congruence modular varieties*, Lond. Math. Soc. Lect. Notes Series, 125, Cambr. Univ. Press, 1987.

[35] A. Fröhlich, *Baer-invariants of algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 109, 1963, 221-244.

[36] P. Gabriel et N. Popescu, *Caractérisation des catégories abéliennes avec générateurs et limites inductives*, Comp. Rend. Acad. Sc. Paris, 258, 1964, 4188-4190.

[37] M. Gran, *Internal categories in Mal'cev categories*, Journal of Pure and Applied Algebra, 143, 1999, 221-229.

[38] M. Gran et T. Van der Linden, *On the second cohomology group in semi-abelian categories*, accepté pour publication, Journal of Pure and Applied Algebra.

[39] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, SGA1, exposé V, Lect. Notes in Math., Springer, 224, 1971.

[40] H. P. Gumm, *Geometrical Methods in Congruence Modular Varieties*, Mem. Amer. Math. Soc. 45, 286, 1983.

[41] J. Hagemann et C. Herrmann, *A concrete ideal multiplication for algebraic systems and its relation to congruence distributivity*, Arch. Math. (Basel) 32, 1979, 234-245.

[42] G. Janelidze, *Pure Galois theory in categories*, J. Algebra 132, 1990, 270-286.

[43] G. Janelidze, *Precategories and Galois theories*, Springer lecture Notes in Math. 1488, 1991, 157-173.

[44] G. Janelidze, *What is a double central extension ? (The question was asked by Ronald Brown)*, Cah. Topologie Géom. Differ. Catég. 32, No. 3, 1991, 191-201.

[45] G. Janelidze, *Higher dimensional central extensions : a categorical approach to homology theory of groups*, Lecture at the International Category Theory Meeting CT95, Halifax, 1995.

[46] G. Janelidze, *Descent and Galois theory*, notes of a course at the "Summer school on Contemporary Categorical Methods in Algebra", Haute-Bodeux, 2007.

[47] G. Janelidze, *Galois groups, abstract commutators and Hopf formula*, Preprint, March 2007.

[48] G. Janelidze et G. M. Kelly, *Galois theory and a general notion of central extension*, J. Pure Appl. Algebra 97, 1994, 135-161.

[49] G. Janelidze et G.M. Kelly, *Central extensions in universal algebra : a unification of three notions*, Algebra Universalis, 44, 2000, 123-128.

[50] G. Janelidze et G.M. Kelly, *Central extensions in Mal'tsev varieties*, Theory Appl. Categ., Vol. 7, No. 10, 2000, 219-226.

[51] G. Janelidze et L. Márki, *Radicals of rings and pullbacks*, J. Pure Appl. Algebra 97, 1994, 29-36.

[52] G. Janelidze, L. Márki et W. Tholen, *Locally semisimple coverings*, J. Pure Appl. Algebra 128, 1998, 281-289.

[53] G. Janelidze, L. Márki, et W. Tholen, *Semi-abelian categories*, J. Pure Appl. Algebra 168, 2002, 367-386.

[54] G. Janelidze et M.C. Pedicchio, *Internal categories and groupoids in congruence modular varieties*, J. Algebra 193, 1997, 552-570.

[55] G. Janelidze et M.C. Pedicchio, *Pseudogroupoids and commutators*, Theory Appl. Categories, Vol. 8, No. 15, 2001, 408-456.

[56] G. Janelidze, M. Sobral et W. Tholen, *Beyond Barr Exactness : Effective Descent Morphisms*, in : Categorical Foundations. Special Topics in Order, Topology, Algebra, and Sheaf Theory, Encycl. Math. and its Appl. 97, Cambridge Univ. Press, 2004.

[57] P.T. Johnstone, *Affine categories and naturally Mal'cev categories*, J. Pure Appl. Algebra 61, 1989, 251-256.

[58] P.T. Johnstone, *The "closed subgroup theorem" for localic herds and pregroupoids*, J. Pure Appl. Algebra 70, 1991, 97-106.

[59] P.T. Johnstone et M.C. Pedicchio, *Remarks on continuous Mal'cev algebras*, Rend. Ist. Mat. Trieste, 25 No. 1, 1993, 277-297.

[60] B. Jónsson, *Algebras whose congruence lattices are distributive*, Math. Scand. 21, 1967, 110-121.

[61] A. Kock, *Generalized fibre bundles*, Lect. Notes. in Math. 1348, Springer, 1988, 194-207.

[62] A. Kock, *Fibre bundles in general categories*, J. Pure Appl. Algebra 56, 1989, 233-245.

[63] R. Lavendhomme et J.R. Roisin, *Cohomologie non abélienne de structures algébriques*, J. Algebra, 67, 1980, 385-414.

[64] A.R. Magid, *The separable Galois theory of commutative rings*, Marcel Dekker, 1974.

[65] A.I. Mal'cev, *On the general theory of algebraic systems*, Mat. Sbornik N.S. 35, 1954, 3-20.

[66] M. Menni, *A characterization of the left exact categories whose exact completions are toposes*, J. Pure Appl. Algebra 177, 2003, 287-301.

[67] M.C. Pedicchio, *A categorical approach to commutator theory*, J. Algebra 177, 1995, 647–657.

[68] M.C. Pedicchio, *Some remarks on internal pregroupoids in varieties*, Communications in Algebra 26 (6), 1998, 1737-1744.

[69] A.F. Pixley, *Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 14, 105-109.

[70] T. Porter, *Some categorical results of crossed modules in commutative algebras*, J. Algebra 109 (1987), 415–429.

[71] J. Rosický, *Cartesian closed exact completions*, J. Pure Appl. Algebra 142, 1999, 261-270.

[72] J. Rosický et E.M. Vitale, *Exact completions and representations in abelian categories*, Homology, Homotopy and Applications, 3, 2001, 453-466.

[73] J.D.H. Smith, *Mal'cev Varieties,* Lect. Notes Math. 554, Springer-Verlag, 1976.

[74] J. Stallings, *Homology and central series of groups*, J. Algebra 2, 1965, 170-181.

[75] U. Stammbach, *Anwendungen der Homologietheorie der Gruppen auf Zentralreihen und auf Invarianten von Präsentierungen*, Math. Z. 94, 1966, 157-177.