Mathématiques Discrètes

Cours 3

Table des matières

Théorème 1.4. *Soit $f : A \to B$ une fonction. Alors f est une bijection si et seulement si il existe* [redacted]

Théorème 1.8. *Soient A, B deux ensembles* finis, [redacted] *et $f : A \to B$ une fonction. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est injective ;*

(ii) *f est surjective ;*

(iii) *f est bijective.*

Théorème 1.9 (Principe d'addition). *Si $A_1, \ldots, A_k$ sont des ensembles* finis disjoints*, alors*

[redacted] $$|A_1| + \cdots + |A_k| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| \,.$$

Théorème 1.11 (Principe de multiplication). *Si $A_1, \ldots, A_k$ sont des ensembles* finis, *la cardinalité* [redacted] *des cardinalités des A_i pour $i \in [k]$:*

[redacted] $$= |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_k| = \prod_{i=1}^{k} |A_i| \, .$$

Proposition 1.14. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$* [redacted] *donne le nombre de bijections d'un ensemble A vers un ensemble B, tous deux de taille n.*

Pro[redacted] *un*
ens[redacted]

Table des matières

Théorème 1.21 (Formule du binôme de Newton). *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

Théorème 1.17 (Symétrie). *Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$, on a*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Théorème 1.18 (Absorption/extraction). *Pour $n, k \in \mathbb{N}_0$ avec $k \leqslant n$, on a*

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Théorème 1.19 (Addition/induction). *Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $n > k > 0$, on a*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Théorème 1.20 (Somme parallèle)**.** *Pour $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geqslant k$:*

$$\sum_{n=k}^{m} \binom{n}{k} = \binom{m+1}{k+1}.$$

Table des matières

Preuves bijectives

Définition 1.7. Deux ensembles ont la même *cardinalité*, ou même *taille*, s'il existe une bijection de l'un vers l'autre. Si A et B ont la même cardinalité, on écrit $|A| = |B|$. Un ensemble E est *fini* s'il a la même cardinalité que $[n]$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On note alors $|E| = n$, ou parfois $\#E = n$.

Théorème 1.22 (Théorème de Cayley, 1889). *Le* *est exactement* n^{n-2}.

➔ Questions?

Aujourd'hui

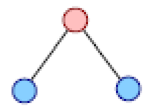
Table des matières

Aujourd'hui

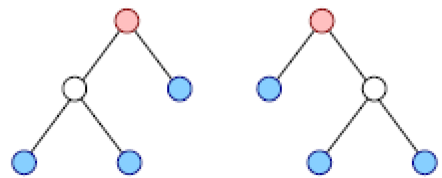
Table des matières

Les arbres binaires enracinés à n feuilles

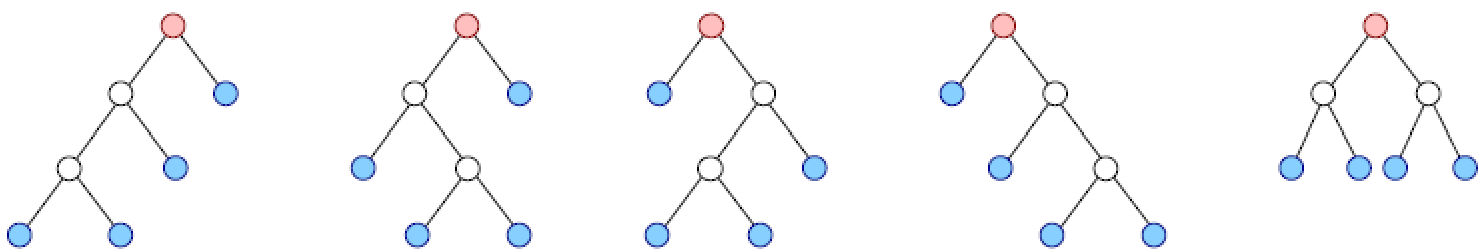
n=2



n=3



n=4

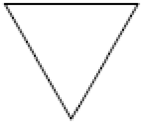


n=5

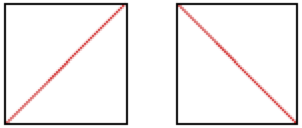
14 solutions!

Les triangulations d’un (n+1)-gone

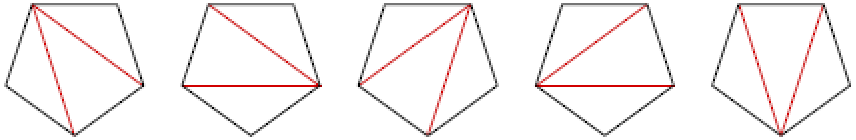
n=2



n=3



n=4

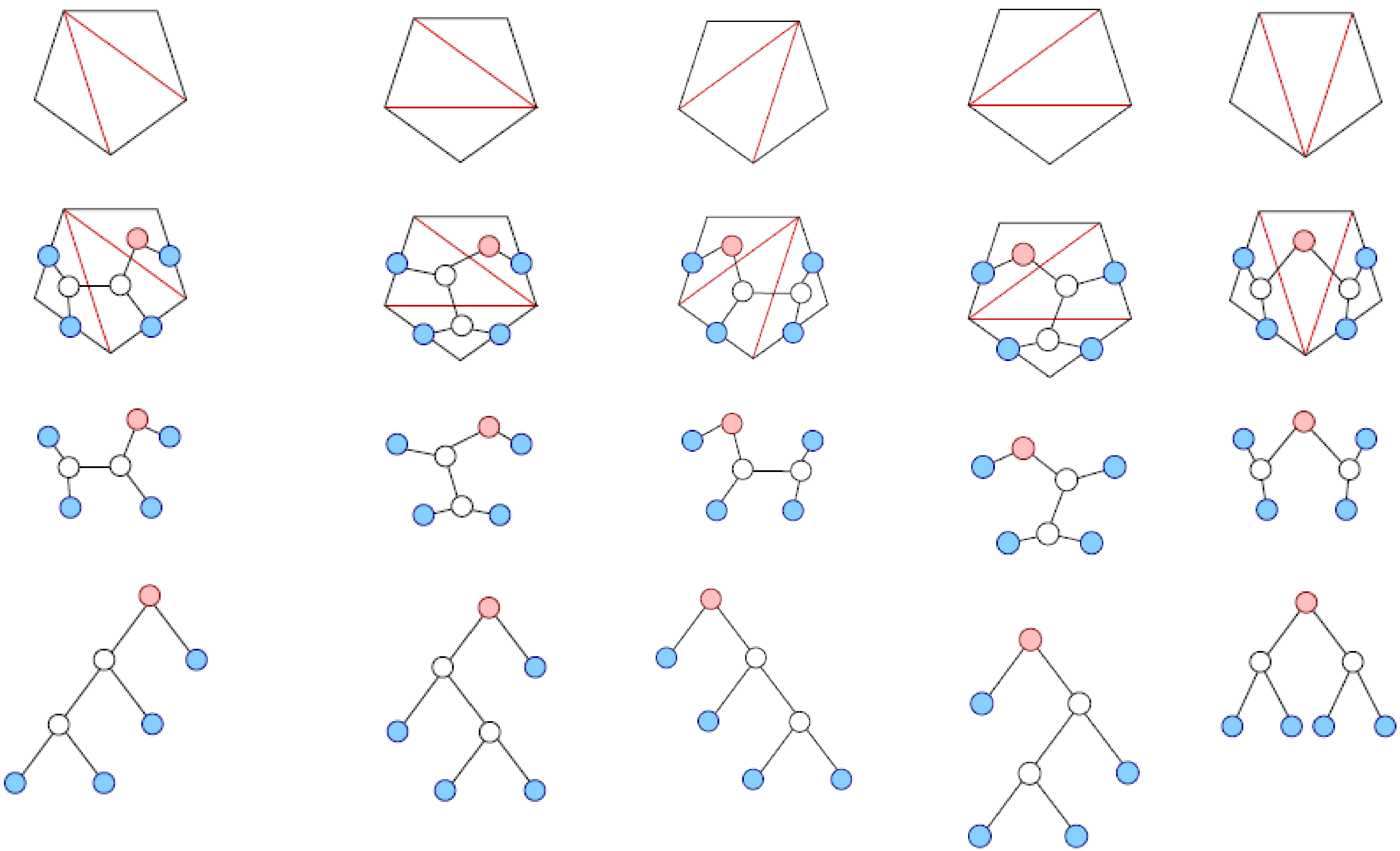


n=5

14 solutions!

mmmh mmmh…

Théorème 1.24. *Le nombre d'arbres binaires enracinés à n feuilles (à isomorphisme près) est égal au nombre de triangulations d'un polygone à $n + 1$ côtés.*



1.7 Le coefficient multinomial

Théorème 1.27 (Formule du multinôme). *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et tout $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{R}$),*

$$(x_1 + \cdots + x_t)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_t=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_t} x_1^{k_1} \cdots x_t^{k_t},$$

où la somme est effectuée sur tous les tuples $(k_1, \ldots, k_t) \in \mathbb{N}^t$ sommant à n.

Lemme 1.29. *Un vecteur d'entiers strictement positifs $(d_1, \ldots, d_n)$ est le vecteur des degrés d'un arbre à $n \geqslant 2$ sommets (c'est-à-dire il existe un arbre à n sommets dont le ième sommet a pour degré d_i) si et seulement si*

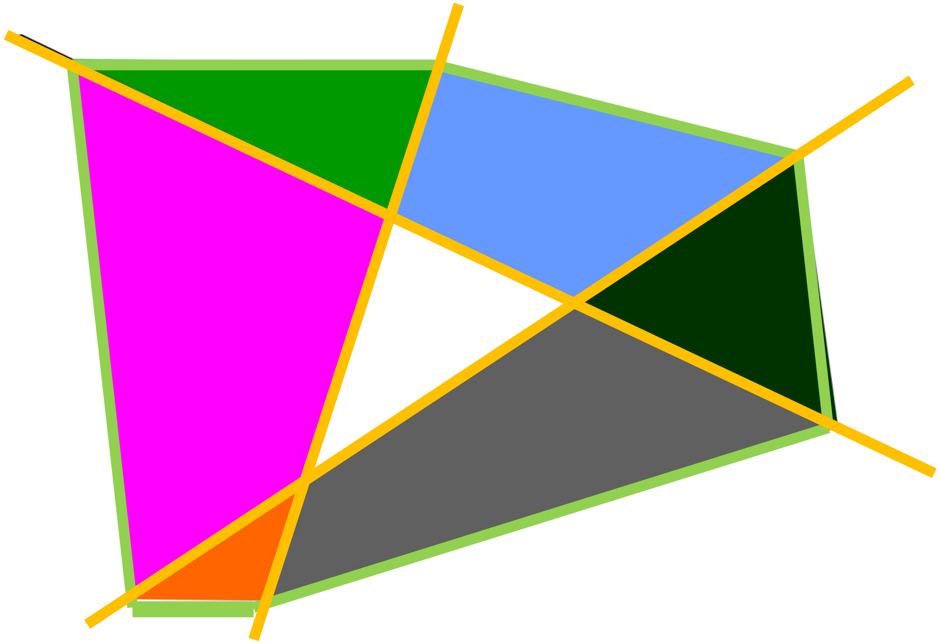
$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2.$$

Théorème 1.30. *Soit $(d_1, \ldots, d_n)$ un vecteur de $n \geqslant 2$ entiers strictement positifs sommant à $2n - 2$. Le nombre d'arbres à n sommets ayant $(d_1, \ldots, d_n)$ comme vecteur de degrés est*

$$\binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1}.$$

Maths discrètes

- Chapitre 2: relations de récurrences
  - Un problème de ferme…



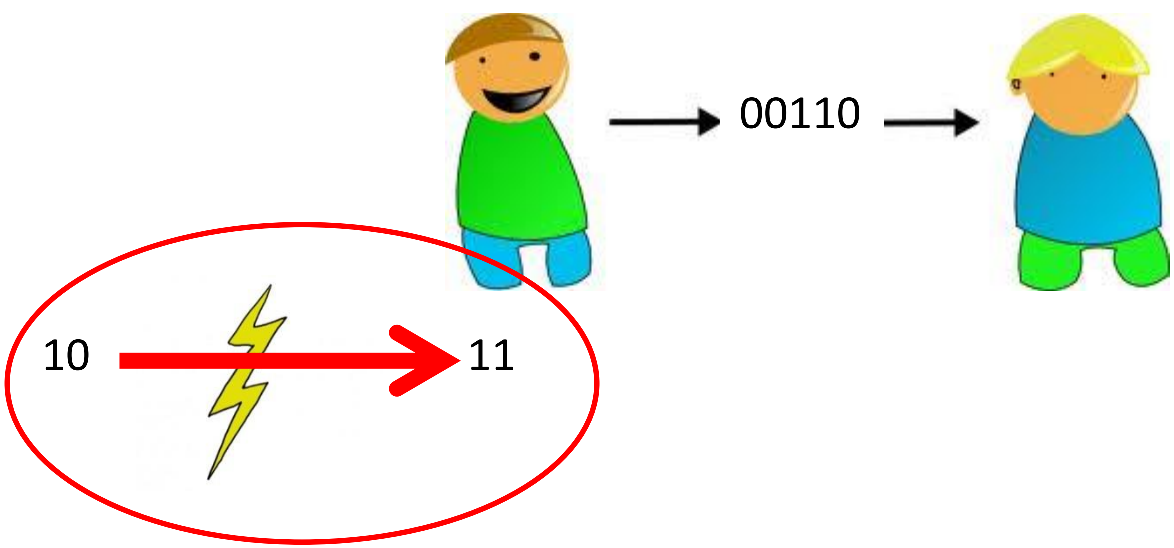
Théorème 2.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre de régions du plan délimitées par n droites en position générale ne dépend pas du choix de ces droites. En d'autres termes, $\Phi_2(n)$ est bien défini. De plus,*

$$\Phi_2(n) = \Phi_2(n-1) + n$$

pour $n \geqslant 1$, et $\Phi_2(0) = 1$.

Maths discrètes

- Chapitre 2: relations de récurrences
  - Un problème de communication…



Solution: jamais de 11 consécutifs

➔ Combien de mots de taille n puis-je envoyer?

Maths discrètes

- Chapitre 2: relations de récurrences

  Petit devoir:

  ➔Combien de mots de taille n puis-je envoyer?

  a(n)=nbre de mots de taille n sans ‘11’ consécutifs

  - Compter pour n=1,2,3
  - Exprimer a(n) en fonction de a(n-1),a(n-2)
  - Essayer une solution de type a(n)=r^n
  - Question subsidiaire:

    En déduire un maximum de solutions