Mathématiques Discrètes

Math F 307

Raphael Jungers

Raphael.jungers@uclouvain.be

Math F 307

Raphael Jungers

Raphael.jungers@uclouvain.be

Assistante

Audrey Herinckx

Audrey.Herinckx@ulb.ac.be

Site web (matière, examens,…)

Google(Raphael Jungers)

Qu’est-ce que les Maths Discrètes?

Définition (informelle):

L’étude des (problèmes sur les) ensembles finis et énumérables

Exemples:

Un (ensemble de nombres) entiers, un jeu de cartes, un texte, un réseau routier, une équipe d’ouvriers, …

→ C’est trop facile?

Qu’est-ce que les Maths Discrètes?

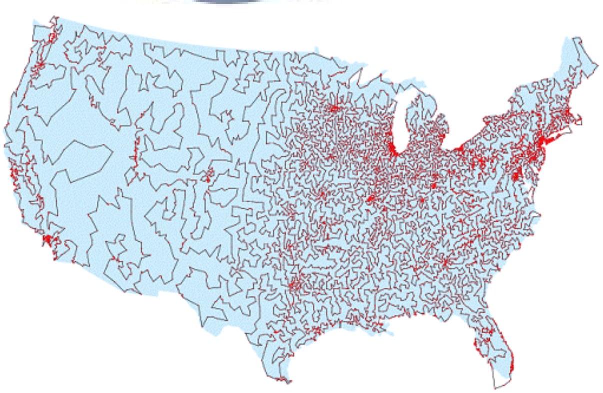
Les tours de Hanoi

Conjecture de Goldbach

4	=	2 + 2	(1 solution)
6	=	3 + 3	(1 solution)
8	=	3 + 5	(1 solution)
10	=	3 + 7 = 5 + 5	(2 solutions)
12	=	5 + 7	(1 solution)
14	=	3 + 11 = 7 + 7	(2 solutions)
		………………………………	
50	=	19 + 31 = 13 + 37 = 7 + 43 = 3 + 47	(4 solutions)

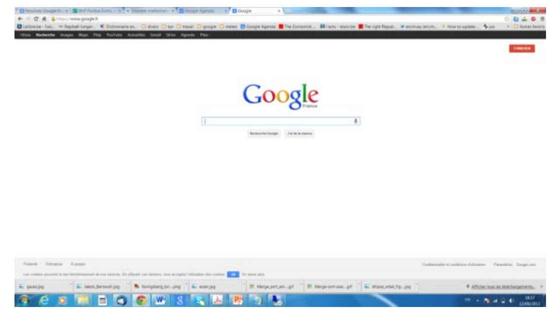
Qu’est-ce que les Maths Discrètes? Applications

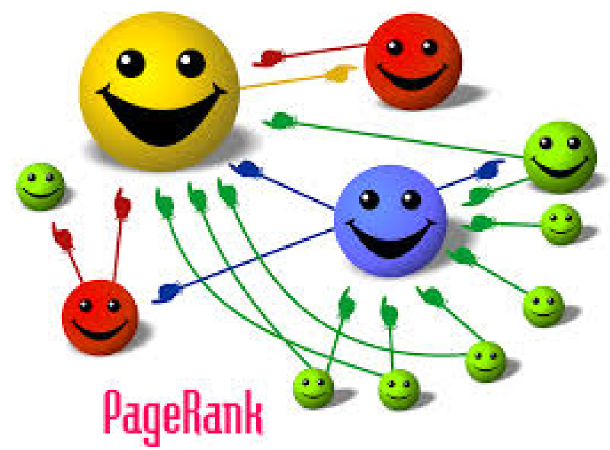
The Traveling Salesman Problem (TSP)



1964: 33 villes
2004: 24 978 villes

Google’s Pagerank

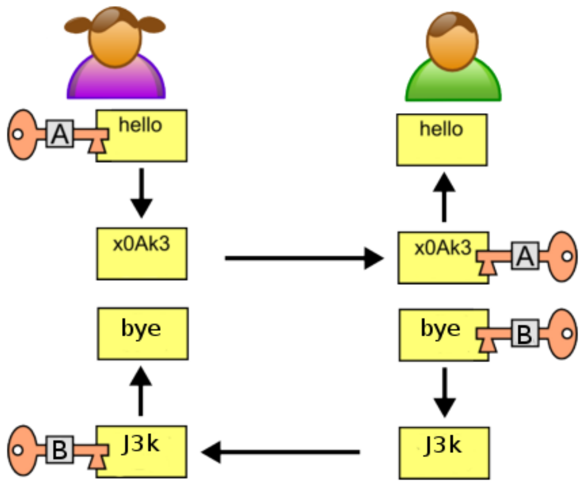


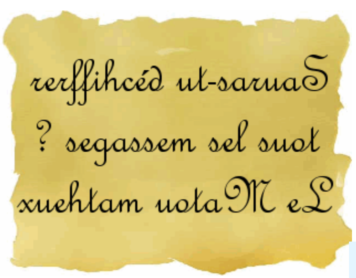


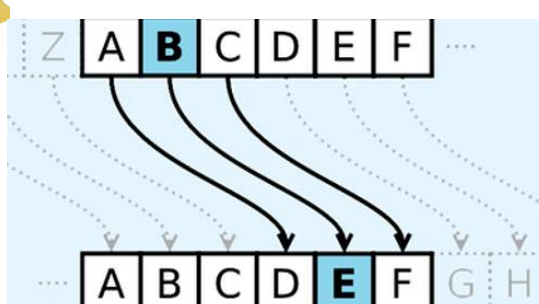
1998: 2 étudiants lancent une start up
2008: 210 milliards de dollars, > 50 000 employés,
1000 millards de pages web

Qu’est-ce que les Maths Discrètes?

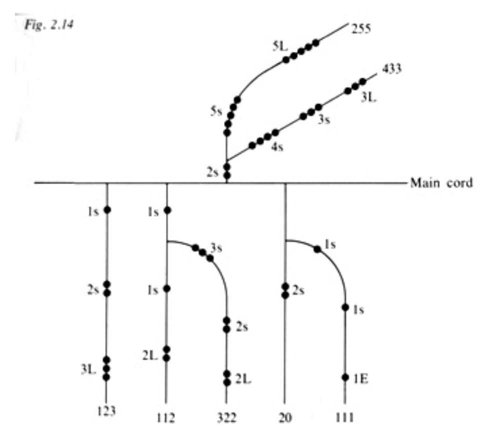
Cryptographie







Language Theory



Qu’est-ce que les Maths Discrètes?

Produits de matrices

Tri par fusion

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

6 5 3 1 8 7 2 4

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= (a_{11} - a_{22}) \cdot (b_{21} + b_{22}) \\ II &= (a_{11} + a_{22}) \cdot (b_{11} + b_{22}) \\ III &= (a_{11} - a_{21}) \cdot (b_{11} + b_{12}) \\ IV &= (a_{11} + a_{12}) \cdot b_{22} \\ V &= a_{11} \cdot (b_{12} - b_{22}) \\ VI &= a_{22} \cdot (b_{21} - b_{11}) \\ VII &= (a_{21} + a_{22}) \cdot b_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= I + II - IV + VI \\ c_{12} &= IV + V \\ c_{21} &= VI + VII \\ c_{22} &= II - III + V - VII \end{aligned}$$

Qu'est-ce que les Maths Discrètes?

Produits de matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

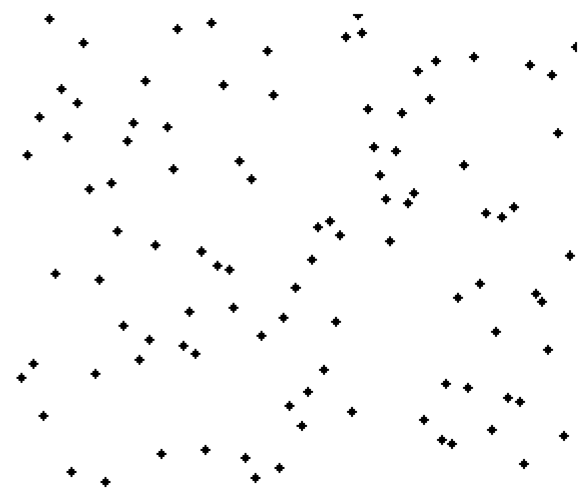
$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= (a_{11} - a_{22}) \cdot (b_{21} + b_{22}) \\ II &= (a_{11} + a_{22}) \cdot (b_{11} + b_{22}) \\ III &= (a_{11} - a_{21}) \cdot (b_{11} + b_{12}) \\ IV &= (a_{11} + a_{12}) \cdot b_{22} \\ V &= a_{11} \cdot (b_{12} - b_{22}) \\ VI &= a_{22} \cdot (b_{21} - b_{11}) \\ VII &= (a_{21} + a_{22}) \cdot b_{11} \end{aligned}$$

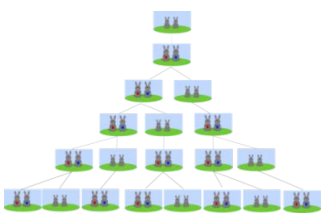
$$\begin{aligned} c_{11} &= I + II - IV + VI \\ c_{12} &= IV + V \\ c_{21} &= VI + VII \\ c_{22} &= II - III + V - VII \end{aligned}$$

Tri par fusion

6 5 3 1 8 7 2 4

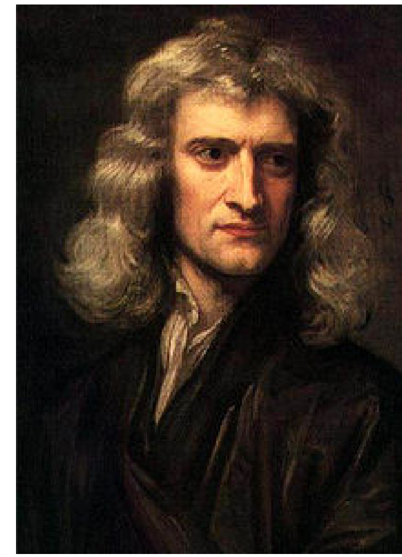


Quelques acteurs clé…



Leonardo
Fibonacci
Pise (Italie)
1175-1250

Blaise Pascal
France
1623-1662



Isaac Newton
Angleterre
1643-1727

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = 0^m + 1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m$$

e

Théorème fondamental de l’algèbre

Nombres complexes

Elimination pivotale

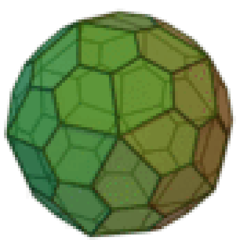
Arithmétique modulaire

….

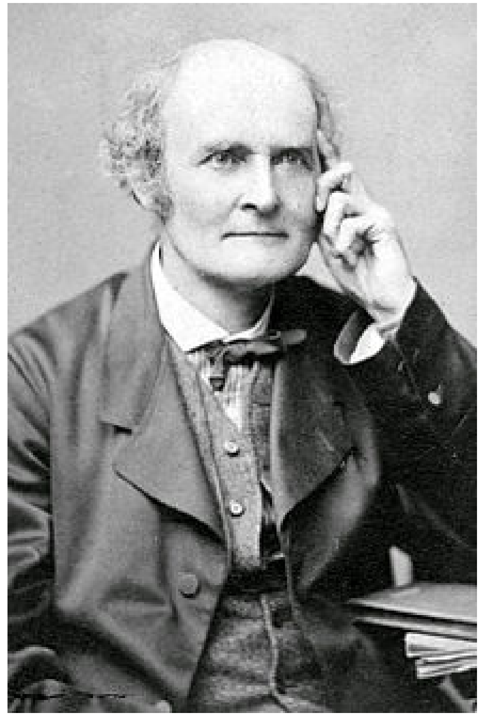
Jakob Bernouilli
Suisse
1654-1705

Leonard Euler
Suisse
1707-1783

Karl Friedrich Gauss
Allemagne
1777-1855

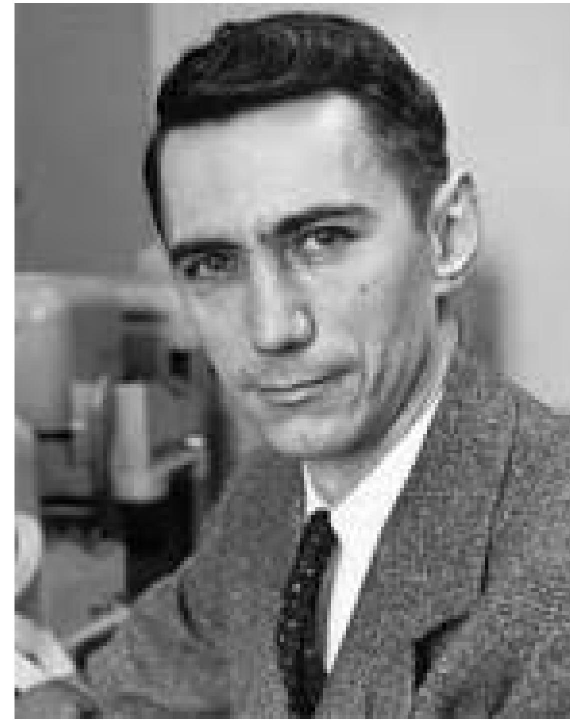


Eugène Catalan
Belgique
1814-1894



$$p(A) = A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \dots + p_1 A + p_0 I_n = 0_n.$$

Arthur Cayley
Angleterre
1821-1895



$$H(X) = H_2(X) = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log_2 P_i.$$

Claude Shannon
US
1916-2001

Table des matières

Chapitre 1: Intro et concepts fondamentaux

Qu'est-ce que compter?

Chapitre 2: Récurrences

Sur la reproduction des lapins…

Chapitre 3: Fonctions génératrices

… ou comment piquer des techniques aux autres mathématiciens

Chapitre 4: Comportements asymptotiques

$\infty < \infty$???

Chapitre 5: Théorie de l'information

Peut-on quantifier l'information?

Ah, au fait, pourquoi « discretes »?

Discernere, discerno, discreui, discretum : séparer, diviser

Table des matières

Chapitre 1: Intro et concepts fondamentaux

Qu'est-ce que compter?

Chapitre 2: Récurrences

Sur la reproduction des lapins…

Chapitre 3: Fonctions génératrices

… ou comment piquer des techniques aux autres mathématiciens

Chapitre 4: Comportements asymptotiques

$\infty < \infty$???

Chapitre 5: Théorie de l'information

Peut-on quantifier l'information?

Ah, au fait, pourquoi « discretes »?

Discernere, discerno, discreui, discretum : séparer, diviser

Théorème 1.4. *Soit $f : A \to B$ une fonction. Alors f est une bijection si et seulement si il existe une fonction $g : B \to A$ telle que $g \circ f$ est l'identité sur A et $f \circ g$ est l'identité sur B.*

Théorème 1.8. *Soient A, B deux ensembles* finis, de même cardinalité, *et $f : A \to B$ une fonction. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est injective ;

(ii) f est surjective ;

(iii) f est bijective.

Théorème 1.9 (Principe d'addition). *Si $A_1, \ldots, A_k$ sont des ensembles* finis disjoints, *alors*

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right| = |A_1 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + \cdots + |A_k| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| \,.$$

Théorème 1.11 (Principe de multiplication). *Si* $A_1, \ldots, A_k$ *sont des ensembles* finis, *la cardinalité du produit cartésien* $A_1 \times \cdots \times A_k$ *est le produit des cardinalités des* A_i *pour* $i \in [k]$ *:*

$$\left|\prod_{i=1}^{k} A_i\right| = |A_1 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_k| = \prod_{i=1}^{k} |A_i| \,.$$

Proposition 1.14. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $n!$ *donne le nombre de bijections d'un ensemble* A *vers un ensemble* B*, tous deux de taille* n*.*

Proposition 1.15. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, le nombre d'injections d'un ensemble* A *de taille* k *vers un ensemble* B *de taille* n*, est égal à* $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$*.*