Mathématiques Discrètes

Cours 2

Théorème 1.4. *Soit $f : A \to B$ une fonction. Alors f est une bijection si et seulement si il existe une fonction $g : B \to A$ telle que $g \circ f$ est l'identité sur A et $f \circ g$ est l'identité sur B.*

Théorème 1.8. *Soient A, B deux ensembles* finis, de même cardinalité, *et $f : A \to B$ une fonction. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est injective ;*

(ii) *f est surjective ;*

(iii) *f est bijective.*

Théorème 1.9 (Principe d'addition). *Si $A_1, \ldots, A_k$ sont des ensembles* finis disjoints, *alors*

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right| = |A_1 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + \cdots + |A_k| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| \, .$$

Théorème 1.11 (Principe de multiplication). *Si $A_1, \dots, A_k$ sont des ensembles* finis, *la cardinalité du produit cartésien $A_1 \times \cdots \times A_k$ est le produit des cardinalités des A_i pour $i \in [k]$:*

$$\left|\prod_{i=1}^{k} A_i\right| = |A_1 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_k| = \prod_{i=1}^{k} |A_i| \,.$$

Proposition 1.14. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n!$ donne le nombre de bijections d'un ensemble A vers un ensemble B, tous deux de taille n.*

Proposition 1.15. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre d'injections d'un ensemble A de taille k vers un ensemble B de taille n, est égal à $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.*

Théorème 1.17 (Symétrie). *Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$, on a*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Théorème 1.18 (Absorption/extraction). *Pour $n, k \in \mathbb{N}_0$ avec $k \leqslant n$, on a*

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Théorème 1.19 (Addition/induction). *Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $n > k > 0$, on a*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Aujourd'hui

Table des matières

Théorème 1.17 (Symétrie). *Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$, on a*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Théorème 1.18 (Absorption/extraction). *Pour $n, k \in \mathbb{N}_0$ avec $k \leqslant n$, on a*

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Théorème 1.19 (Addition/induction). *Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $n > k > 0$, on a*

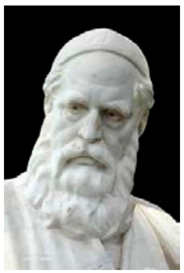
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Théorème 1.20 (Somme parallèle). *Pour $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geqslant k$:*

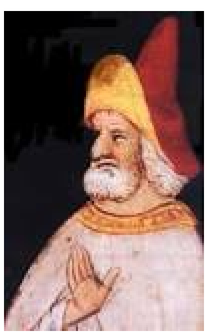
$$\sum_{n=k}^{m} \binom{n}{k} = \binom{m+1}{k+1}.$$

Théorème 1.21 (Formule du binôme de Newton). *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k .$$

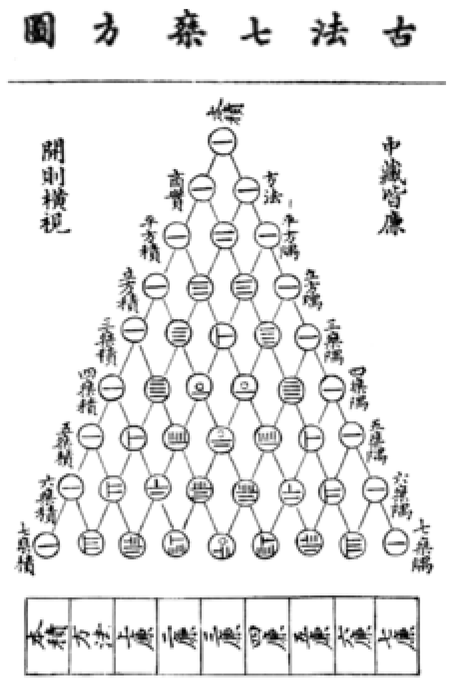


Omar Khayam
(1048-1131)



Hassan
Sabbah

Nizam
Al Mulk



Triangle de Yang Hui
1238-1298

Traité du triangle arithmétique (1654)

19 propriétés prouvées rigoureusement

Raisonnement par induction

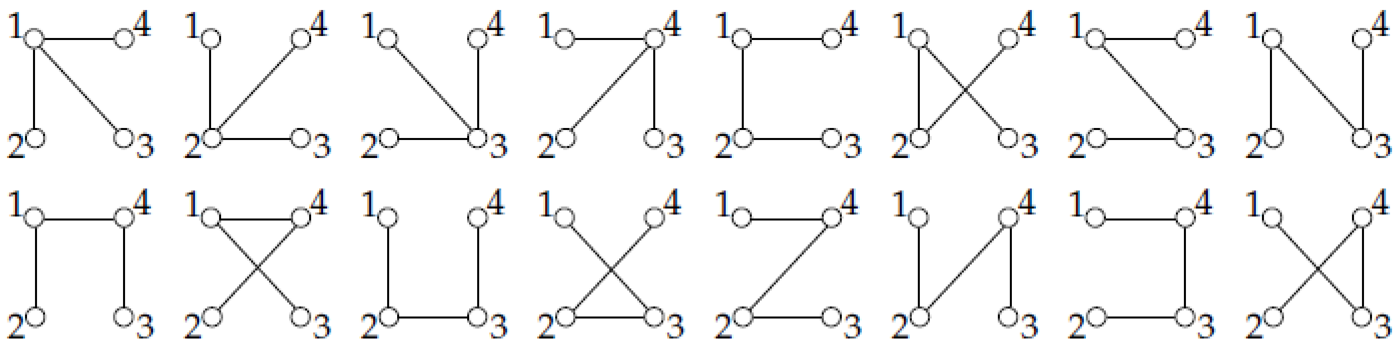
Mais aussi, Michael Stifel (1486 - 1567), Tartaglia (1499 - 1557) et François Viète (1540-1603)

Table des matières

Preuves bijectives

Définition 1.7. Deux ensembles ont la même *cardinalité*, ou même *taille*, s'il existe une bijection de l'un vers l'autre. Si A et B ont la même cardinalité, on écrit $|A| = |B|$. Un ensemble E est *fini* s'il a la même cardinalité que $[n]$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On note alors $|E| = n$, ou parfois $\#E = n$.

Preuves bijectives



Théorème 1.22 (Théorème de Cayley, 1889). *Le nombre d'arbres étiquetés à n sommets est exactement n^{n-2}.*