Mathématiques Discrètes

Cours 7

Table des matières

Récurrences linéaires d'ordre 1

Théorème 2.10. *La récurrence*

$$x_n = c_n x_{n-1} + d_n \quad \forall n \geqslant 1; \quad x_0 = 0$$

a pour solution explicite

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} d_i \prod_{j=i+1}^{n} c_j = d_n + d_{n-1}c_n + d_{n-2}c_{n-1}c_n + \cdots + d_1 c_2 \cdots c_n.$$

Récurrences linéaires homogènes à coefficients constants (RLCC)

$$\boxed{-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0 x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geqslant d}$$

Théorème 2.17 (Récurrences linéaires homogènes à coefficients constants). *Considérons la RLCC homogène d'ordre $d \geqslant 1$:*

$$-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0 x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geqslant d\,.$$

où $c_0, \ldots, c_{d-1} \in \mathbb{C}$ et $c_0 \neq 0$. Notons $p(t) := \sum_{i=0}^{d} c_i t^i \in \mathbb{C}[t]$ son polynôme caractéristique, *où $c_d := -1$. Toute solution de cette relation de récurrence est une combinaison linéaire des d suites de la forme $(n^j \beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où β est une racine de $p(t)$ et $j \in \{0, 1, \ldots, m(\beta) - 1\}$, c.-à-d. j est un naturel strictement inférieur à la multiplicité de β.*

Table des matières

Divide and conquer: recherche binaire

~~1 5 7 9 10~~ $\boxed{15}$ ~~16 20 22~~ ~~33 56 57 58 59 66 77 88~~

Théorème 2.19. *Le nombre de comparaisons effectuées au pire des cas par une recherche binaire dans un vecteur trié de taille N est exactement le nombre de bits dans la représentation binaire de N, c'est-à-dire Ces quantités sont solutions de la récurrence*

$$B_N = B_{\lfloor N/2 \rfloor} + 1 \quad \forall N \geqslant 2$$

avec $B_1 = 1$.

Divide and conquer:
Mergesort: cas général (n quelconque)

Pour le moment, on prend $N = 2^n$ $(n \geqslant 0)$. Nous verrons le cas général plus tard. Etant donné la structure récursive de l'algorithme, nous pouvons écrire

$$C_N = C_{\lceil N/2 \rceil} + C_{\lfloor N/2 \rfloor} + N \quad \forall N \geqslant 2; \quad C_1 = 0\,.$$

Théorème 2.21. *Le nombre de copies effectuées par le tri fusion pour un vecteur de taille N est exactement*

Ce nombre est une majoration sur le nombre de comparaisons *effectuées par le tri fusion.*

Récurrences générales divide and conquer

$$\boxed{a_N = \alpha a_{N/\beta} + f(N) \quad \forall N \in \mathbb{N}}$$

Rappel:

- $f \sim g$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$, on dit alors que f et g sont *asymptotiquement équivalentes* ;
- $f = O(g)$ s'il existe une constante $C > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $f(n) \leqslant Cg(n)$ pour $n \geqslant n_0$;
- $f = o(g)$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$;
- $g = \Omega(f)$ si $f = O(g)$;
- $g = \omega(f)$ si $f = o(g)$;
- $f = \Theta(g)$ si $f = O(g)$ et $g = O(f)$, on dit alors que f et g ont même *comportement asymptotique*.

$$n^n,\ 2^n,\ n^2,\ n,\ \sqrt{n},\ \log^2 n,\ \log n,\ \log\log n$$

Récurrences divide and conquer

$$\boxed{a_N = \alpha a_{N/\beta} + f(N) \quad \forall N \in \mathbb{N}}$$

Théorème 2.24 ("Master Theorem"). *Soient $\alpha \geqslant 1$, $\beta > 1$ des constantes et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une fonction. Pour une suite $(a_N)_{N\in\mathbb{N}}$ solution de la récurrence diviser-pour-régner* (2.3) *:*

Cas 1. *Si $f(N) = O(N^{\log_\beta \alpha - \varepsilon})$ pour $\varepsilon > 0$, alors $a_N = \Theta(N^{\log_\beta \alpha})$.*

Cas 2. *Si $f(N) = \Theta(N^{\log_\beta \alpha})$, alors $a_N = \Theta(N^{\log_\beta \alpha} \log_2 N)$.*

Cas 3. *Si $f(N) = \Omega(N^{\log_\beta \alpha + \varepsilon})$ pour $\varepsilon > 0$, et si $\alpha f(N/\beta) \leqslant C f(N)$ pour une certaine constante $C < 1$ et N suffisamment grand, alors $a_N = \Theta(f(N))$.*

□

$$\boxed{a(x) = \alpha a(x/\beta) + x \quad \forall x > 1; \quad a(x) = 0 \quad \forall x \leqslant 1}$$

Théorème 2.23. *Si la fonction $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une solution de* (2.4)*, alors :*

Cas 1. *Si $\alpha > \beta$, alors $a(x) = \Theta(x^{\log_\beta \alpha})$*

Cas 2. *Si $\alpha = \beta$, alors $a(x) \sim x \log_\beta x = \Theta(x \log_2 x)$*

Cas 3. *Si $\alpha < \beta$, alors $a(x) \sim \frac{\beta}{\beta - \alpha} x = \Theta(x)$*

Table des matières

Application: Le produit matriciel de Strassen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= (a_{11} - a_{22}) \cdot (b_{21} + b_{22}) \\ II &= (a_{11} + a_{22}) \cdot (b_{11} + b_{22}) \\ III &= (a_{11} - a_{21}) \cdot (b_{11} + b_{12}) \\ IV &= (a_{11} + a_{12}) \cdot b_{22} \\ V &= a_{11} \cdot (b_{12} - b_{22}) \\ VI &= a_{22} \cdot (b_{21} - b_{11}) \\ VII &= (a_{21} + a_{22}) \cdot b_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= I + II - IV + VI \\ c_{12} &= IV + V \\ c_{21} &= VI + VII \\ c_{22} &= II - III + V - VII \end{aligned}$$

Application: Le produit matriciel de Strassen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \,. \end{aligned}$$

Théorème 2.24 ("Master Theorem"). *Soient* $\alpha \geqslant 1$, $\beta > 1$ *des constantes et* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ *une fonction. Pour une suite* $(a_N)_{N \in \mathbb{N}}$ *solution de la récurrence diviser-pour-régner* (2.3) *:*

Cas 1. *Si* $f(N) = O(N^{\log_\beta \alpha - \varepsilon})$ *pour* $\varepsilon > 0$, *alors* $a_N = \Theta(N^{\log_\beta \alpha})$.

Cas 2. *Si* $f(N) = \Theta(N^{\log_\beta \alpha})$, *alors* $a_N = \Theta(N^{\log_\beta \alpha} \log_2 N)$.

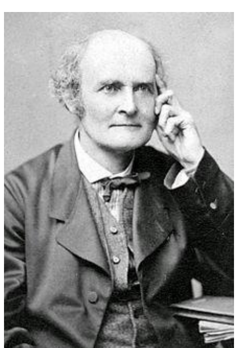
Cas 3. *Si* $f(N) = \Omega(N^{\log_\beta \alpha + \varepsilon})$ *pour* $\varepsilon > 0$, *et si* $\alpha f(N/\beta) \leqslant C f(N)$ *pour une certaine constante* $C < 1$ *et* N *suffisamment grand, alors* $a_N = \Theta(f(N))$.

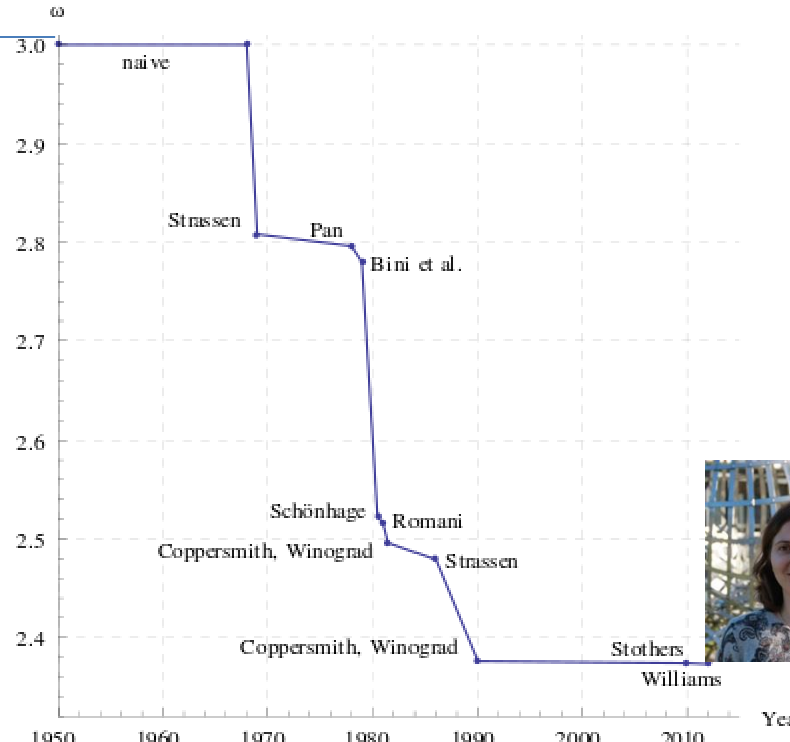
$\square$

Application: Le produit matriciel de Strassen

1850

1858





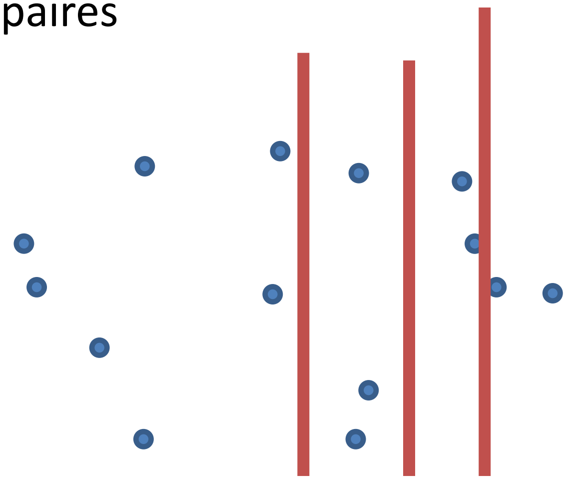
2.373

2.374

2.376

Application: Recherche de la plus proche paire

But: minimiser le nombre de calculs de distances entre paires



Théorème 2.24 ("Master Theorem"). *Soient $\alpha \geqslant 1$, $\beta > 1$ des constantes et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une fonction. Pour une suite $(a_N)_{N \in \mathbb{N}}$ solution de la récurrence diviser-pour-régner* (2.3) *:*

Cas 1. *Si $f(N) = O(N^{\log_\beta \alpha - \varepsilon})$ pour $\varepsilon > 0$, alors $a_N = \Theta(N^{\log_\beta \alpha})$.*

Cas 2. *Si $f(N) = \Theta(N^{\log_\beta \alpha})$, alors $a_N = \Theta(N^{\log_\beta \alpha} \log_2 N)$.*

Cas 3. *Si $f(N) = \Omega(N^{\log_\beta \alpha + \varepsilon})$ pour $\varepsilon > 0$, et si $\alpha f(N/\beta) \leqslant C f(N)$ pour une certaine constante $C < 1$ et N suffisamment grand, alors $a_N = \Theta(f(N))$.*

$\square$

Récurrences linéaires non-homogènes à coefficients constants (RLCC)

$$\boxed{-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0 x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geqslant d}$$

Théorème 2.17 (Récurrences linéaires homogènes à coefficients constants). *Considérons la RLCC homogène d'ordre $d \geqslant 1$:*

$$-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0 x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geqslant d\,.$$

où $c_0, \ldots, c_{d-1} \in \mathbb{C}$ et $c_0 \neq 0$. Notons $p(t) := \sum_{i=0}^{d} c_i t^i \in \mathbb{C}[t]$ son polynôme caractéristique, *où $c_d := -1$. Toute solution de cette relation de récurrence est une combinaison linéaire des d suites de la forme $(n^j \beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où β est une racine de $p(t)$ et $j \in \{0, 1, \ldots, m(\beta) - 1\}$, c.-à-d. j est un naturel strictement inférieur à la multiplicité de β.*

$$\boxed{-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0 x_{n-d} = a_n \quad \forall n \geqslant d}$$

Table des matières

Fonctions génératrices

Définition 3.5 (Fonction génératrice ordinaire)**.** La *fonction génératrice ordinaire* (FGO) de la suite

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

est définie par

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,.$$

Abraham de
Moivre
1667-1754

Fonctions génératrices

Définition 3.5 (Fonction génératrice ordinaire). La *fonction génératrice ordinaire* (FGO) de la suite

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$$

est définie par

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,.$$

Théorème 3.8. *Soient $A(x)$ la FGO de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $B(x)$ la FGO de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors :*

(i) $A(x) + B(x)$ *est la FGO de* $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) $xA(x)$ *est la FGO de* $(0, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \dots)$.

(iii) $\int_0^x A(t)\mathrm{d}t$ *est la FGO de* $(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots, \frac{a_{n-1}}{n}, \dots)$.

(iv) $\frac{A(x)-a_0}{x}$ *est la FGO de* $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}, \dots)$.

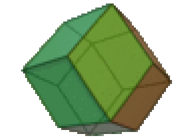
(v) $A'(x)$ *est la FGO de* $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, (n+1)a_{n+1}, \dots)$.

(vi) $A(x)B(x)$ *est la FGO de* $(a_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \dots)$.

(vii) $(1-x)A(x)$ *est la FGO de* $(a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_1, \dots, a_n - a_{n-1}, \dots)$.

(viii) $\frac{A(x)}{1-x}$ *est la FGO de* $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots, \sum_{k=0}^{n} a_k, \dots)$.

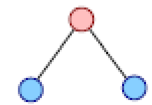
Fonctions génératrices: Applications



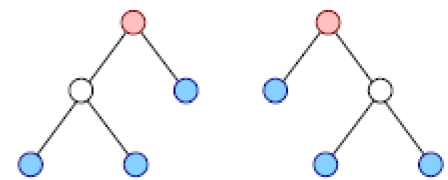
Les parenthésages d'un produit de n matrices

N=1 x_1

n=2 x_1x_2



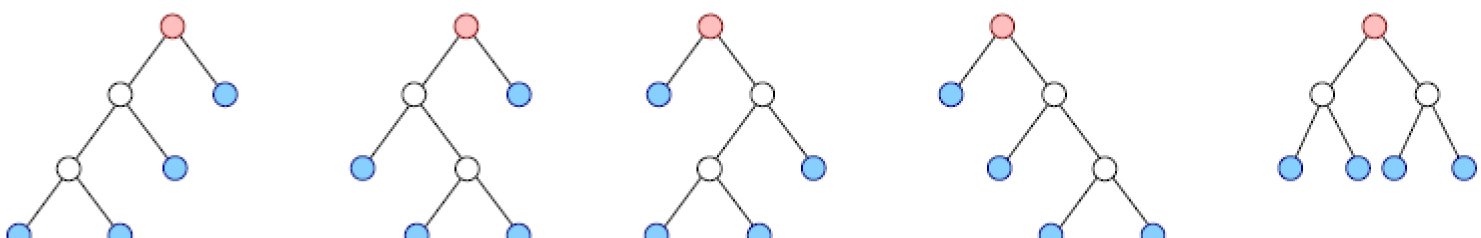
n=3 $(x_1x_2)x_3$ $x_1(x_2x_3)$



n=4

$x_1(x_2(x_3x_4))$ $(x_1(x_2x_3))x_4$ $(x_1x_2)(x_3x_4)$ $x_1((x_2x_3)x_4)$ $((x_1x_2)x_3)x_4$

Eugène
Catalan
1814-1894



Fonctions génératrices: Applications

Les parenthésages d'un produit de n matrices

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} = c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + \cdots + c_{n-1} c_1 \quad \forall n \geqslant 2; \quad c_1 = 1$$

Théorème 3.8. *Soient $A(x)$ la FGO de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $B(x)$ la FGO de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors :*

(i) $A(x) + B(x)$ *est la FGO de* $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) $xA(x)$ *est la FGO de* $(0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \ldots)$.

(iii) $\int_0^x A(t)\mathrm{d}t$ *est la FGO de* $(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{n}, \ldots)$.

(iv) $\frac{A(x)-a_0}{x}$ *est la FGO de* $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, \ldots)$.

(v) $A'(x)$ *est la FGO de* $(a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, (n+1)a_{n+1}, \ldots)$.

(vi) $A(x)B(x)$ *est la FGO de* $(a_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \ldots)$.

(vii) $(1-x)A(x)$ *est la FGO de* $(a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_{n-1}, \ldots)$.

(viii) $\frac{A(x)}{1-x}$ *est la FGO de* $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots, \sum_{k=0}^{n} a_k, \ldots)$.

Proposition 3.4. *Pour tout $n \geqslant 2$,*

$$\begin{aligned} \#(\textit{arbres binaires enracinés à } n \textit{ feuilles}) &= \#(\textit{triangulations d'un } (n+1)\textit{-gone}) \\ &= n\textit{-ème nombre de Catalan} \\ &= \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}. \end{aligned}$$