

Mathématiques Discrètes

Cours 6

Réurrences

Théorème 2.10. *La récurrence*

$$x_n = c_n x_{n-1} + d_n \quad \forall n \geq 1; \quad x_0 = 0$$

a pour solution explicite


$$-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geq d$$

Réurrences linéaires homogènes à coefficients constants (RLCC)

$$-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geq d$$

Théorème 2.12. Notons S l'ensemble des solutions de la RLCC (2.2). Alors :

- (i) S est un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,
- (ii) $\dim(S) = d$.

Théorème: si r est une racine du polynome caractéristique, alors r^n est un élément de l'espace vectoriel des solutions S .

Théorème: $r_1^n, r_2^n, \dots, r_d^n$ sont linéairement indépendants!
(si r_i sont différents, bien sur!)

Petit problème: racines multiples

$$-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geq d$$

Définition 2.13 (Multiplicité). Pour rappel, un nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ est une *racine de multiplicité* $m = m(a)$ d'un polynôme complexe $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ si $p(t)$ est divisible par $(t - a)^m$, mais pas par $(t - a)^{m+1}$.

Récurrances linéaires homogènes à coefficients constants (RLCC)

$$-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geq d$$

Théorème 2.17 (Récurrances linéaires homogènes à coefficients constants). *Considérons la RLCC homogène d'ordre $d \geq 1$:*

$$-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geq d.$$

où $c_0, \dots, c_{d-1} \in \mathbb{C}$ et $c_0 \neq 0$. Notons $p(t) := \sum_{i=0}^d c_i t^i \in \mathbb{C}[t]$ son polynôme caractéristique, où $c_d := -1$. Toute solution de cette relation de récurrence est une combinaison linéaire des d suites de la forme $(n^j \beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$, où β est une racine de $p(t)$ et $j \in \{0, 1, \dots, m(\beta) - 1\}$, c.-à-d. j est un naturel strictement inférieur à la multiplicité de β .

Table des matières

Chapitre 1: Intro et concepts fondamentaux

Chapitre 2: Récurrences

Exemples introductifs

Solution des récurrences

linéaire d'ordre 1

coeff. const. générales

divide and conquer

Applications

Chapitre 3: Fonctions génératrices

Qu'est-ce que c'est et à quoi ça sert?

Applications

Chapitre 4: Comportements asymptotiques

Chapitre 5: Théorie de l'information

Table des matières

Chapitre 1: Intro et concepts fondamentaux

Chapitre 2: Récurrences

Exemples introductifs

Solution des récurrences

linéaire d'ordre 1

coeff. const. générales

divide and conquer

Applications

Chapitre 3: Fonctions génératrices

Qu'est-ce que c'est et à quoi ça sert?

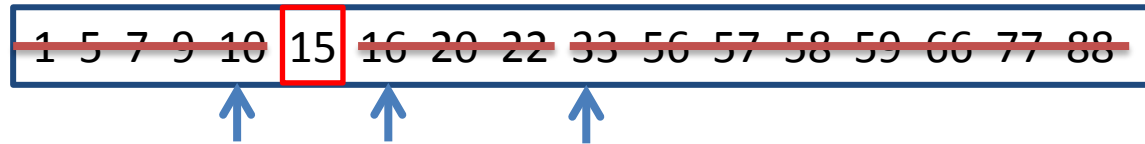
Applications

Chapitre 4: Comportements asymptotiques

Chapitre 5: Théorie de l'information

Divide and conquer: recherche binaire

15



Théorème 2.19. *Le nombre de comparaisons effectuées au pire des cas par une recherche binaire dans un vecteur trié de taille N est exactement le nombre de bits dans la représentation binaire de N , c'est-à-dire $\lceil \log_2 N \rceil$. Ces quantités sont solutions de la récurrence*

$$B_N = B_{\lfloor N/2 \rfloor} + 1 \quad \forall N \geq 2$$

avec $B_1 = 1$.

Divide and conquer: Mergesort

Pour le moment, on prend $N = 2^n$ ($n \geq 0$). Nous verrons le cas général plus tard. Etant donné la structure réursive de l'algorithme, nous pouvons écrire

$$C_N = C_{\lceil N/2 \rceil} + C_{\lfloor N/2 \rfloor} + N \quad \forall N \geq 2; \quad C_1 = 0.$$

Divide and conquer:

Mergesort: cas général (n quelconque)

Théorème 2.21. *Le nombre de copies effectuées par le tri fusion pour un vecteur de taille N est exactement*

$$C_N = N \lfloor \lg N \rfloor + 2N - 2^{\lfloor \lg N \rfloor + 1}.$$

Ce nombre est une majoration sur le nombre de comparaisons effectuées par le tri fusion.

Récurrances générales

divide and conquer

$$a_N = \alpha a_{N/\beta} + f(N) \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Rappel:

- $f \sim g$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$, on dit alors que f et g sont *asymptotiquement équivalentes* ;
- $f = O(g)$ s'il existe une constante $C > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $f(n) \leq Cg(n)$ pour $n \geq n_0$;
- $f = o(g)$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$;
- $g = \Omega(f)$ si $f = O(g)$;
- $g = \omega(f)$ si $f = o(g)$;
- $f = \Theta(g)$ si $f = O(g)$ et $g = O(f)$, on dit alors que f et g ont même *comportement asymptotique*.

$$n^n, 2^n, n^2, n, \sqrt{n}, \log^2 n, \log n, \log \log n$$

Récurrances divide and conquer

$$a_N = \alpha a_{N/\beta} + f(N) \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

$$a(x) = \alpha a(x/\beta) + x \quad \forall x > 1; \quad a(x) = 0 \quad \forall x \leq 1$$

Théorème 2.23. Si la fonction $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une solution de (2.4), alors :

Cas 1. Si $\alpha > \beta$, alors $a(x) = \Theta(x^{\log_\beta \alpha})$

Cas 2. Si $\alpha = \beta$, alors $a(x) \sim x \log_\beta x = \Theta(x \log_2 x)$

Cas 3. Si $\alpha < \beta$, alors $a(x) \sim \frac{\beta}{\beta - \alpha} x = \Theta(x)$

Récurrances divide and conquer

$$a(x) = \alpha a(x/\beta) + x \quad \forall x > 1; \quad a(x) = 0 \quad \forall x \leq 1$$

$$a_N = \alpha a_{N/\beta} + f(N) \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Théorème 2.24 (“Master Theorem”). Soient $\alpha \geq 1$, $\beta > 1$ des constantes et $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction. Pour une suite $(a_N)_{N \in \mathbb{N}}$ solution de la récurrence diviser-pour-régner (2.3) :

Cas 1. Si $f(N) = O(N^{\log_\beta \alpha - \varepsilon})$ pour $\varepsilon > 0$, alors $a_N = \Theta(N^{\log_\beta \alpha})$.

Cas 2. Si $f(N) = \Theta(N^{\log_\beta \alpha})$, alors $a_N = \Theta(N^{\log_\beta \alpha} \log_2 N)$.

Cas 3. Si $f(N) = \Omega(N^{\log_\beta \alpha + \varepsilon})$ pour $\varepsilon > 0$, et si $\alpha f(N/\beta) \leq C f(N)$ pour une certaine constante $C < 1$ et N suffisamment grand, alors $a_N = \Theta(f(N))$.



Table des matières

Chapitre 1: Intro et concepts fondamentaux

Chapitre 2: Récurrences

Exemples introductifs

Solution des récurrences

linéaire d'ordre 1

coeff. const. générales

divide and conquer

Applications

Chapitre 3: Fonctions génératrices

Qu'est-ce que c'est et à quoi ça sert?

Applications

Chapitre 4: Comportements asymptotiques

Chapitre 5: Théorie de l'information

Application: Le produit matriciel de Strassen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= (a_{11} - a_{22}) \cdot (b_{21} + b_{22}) \\ II &= (a_{11} + a_{22}) \cdot (b_{11} + b_{22}) \\ III &= (a_{11} - a_{21}) \cdot (b_{11} + b_{12}) \\ IV &= (a_{11} + a_{12}) \cdot b_{22} \\ V &= a_{11} \cdot (b_{12} - b_{22}) \\ VI &= a_{22} \cdot (b_{21} - b_{11}) \\ VII &= (a_{21} + a_{22}) \cdot b_{11} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &I + II - IV + VI \\ &IV + V \\ &VI + VII \\ &II - III + V - VII \end{aligned}$$

Application: Le produit matriciel de Strassen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} . \end{aligned}$$

Théorème 2.24 (“Master Theorem”). Soient $\alpha \geq 1$, $\beta > 1$ des constantes et $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction. Pour une suite $(a_N)_{N \in \mathbb{N}}$ solution de la récurrence diviser-pour-régner (2.3) :

Cas 1. Si $f(N) = O(N^{\log_\beta \alpha - \varepsilon})$ pour $\varepsilon > 0$, alors $a_N = \Theta(N^{\log_\beta \alpha})$.

Cas 2. Si $f(N) = \Theta(N^{\log_\beta \alpha})$, alors $a_N = \Theta(N^{\log_\beta \alpha} \log_2 N)$.

Cas 3. Si $f(N) = \Omega(N^{\log_\beta \alpha + \varepsilon})$ pour $\varepsilon > 0$, et si $\alpha f(N/\beta) \leq C f(N)$ pour une certaine constante $C < 1$ et N suffisamment grand, alors $a_N = \Theta(f(N))$.

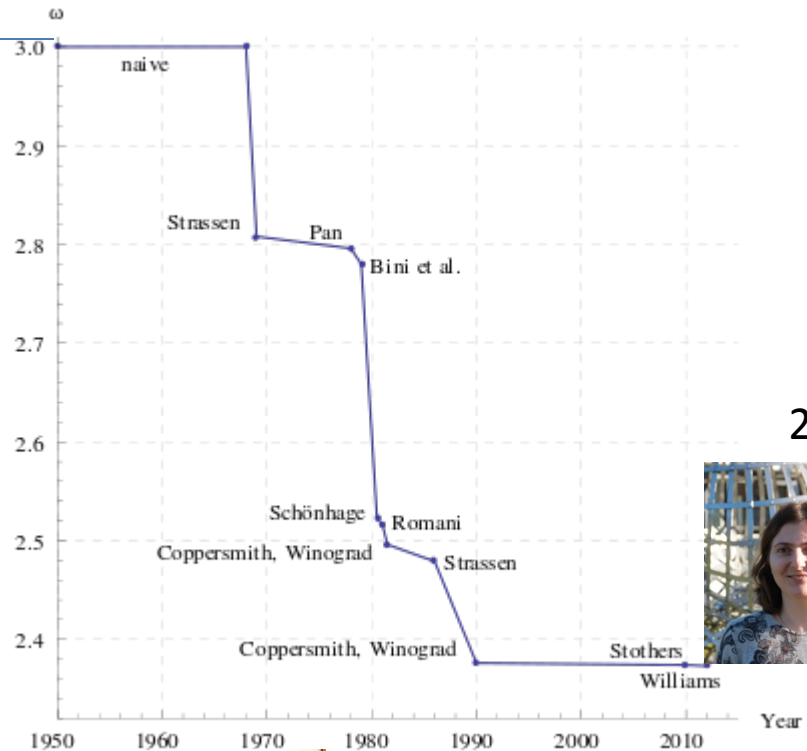
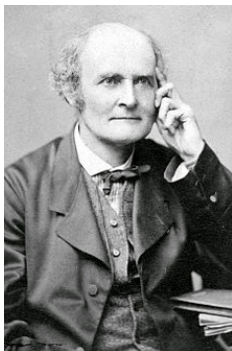
□

Application: Le produit matriciel de Strassen



1850

1858



2.374

2.376

2?

Insert
your
picture
here