Mathématiques Discrètes

Cours 5

Devoir

Rédiger une démonstration rigoureuse du Théorème 1.30

N’hésitez pas à vous servir des indications dans la remarque 1.31 (voir aussi remarque 1.28)

Table des matières

Récurrences

Théorème 2.10. *La récurrence*

$$x_n = c_n x_{n-1} + d_n \quad \forall n \geqslant 1; \quad x_0 = 0$$

a pour solution explicite

Table des matières

$$-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0 x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geqslant d$$

Petit problème:

$$-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geq d$$

RLCC: solution générale

$$\boxed{-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0 x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geqslant d}$$

Théorème 2.17 (Récurrences linéaires homogènes à coefficients constants). *Considérons la RLCC homogène d'ordre $d \geqslant 1$:*

$$-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0 x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geqslant d\,.$$

où $c_0, \ldots, c_{d-1} \in \mathbb{C}$ et $c_0 \neq 0$. Notons $p(t) := \sum_{i=0}^{d} c_i t^i \in \mathbb{C}[t]$ son polynôme caractéristique, *où $c_d := -1$. Toute solution de cette relation de récurrence est une combinaison linéaire des d suites de la forme $(n^j \beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$, où β est une racine de $p(t)$ et $j \in \{0, 1, \ldots, m(\beta) - 1\}$, c.-à-d. j est un naturel strictement inférieur à la multiplicité de β.*

RLCC: racines multiples

$$\boxed{-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0 x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geqslant d}$$

Lemme 2.16. *Si $a \in \mathbb{C}$ est une racine de multiplicité $m \geqslant 1$ du polynôme $\sum_{i=0}^{d} c_i t^i \in \mathbb{C}[t]$ de degré d, alors*

$$\sum_{i=0}^{d} c_i i^j a^i = 0$$

pour $j \in \{0, \ldots, m-1\}$ et

RLCC: cas général

Théorème 2.17 (Récurrences linéaires homogènes à coefficients constants). *Considérons la RLCC homogène d'ordre $d \geqslant 1$:*

$$-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0 x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geqslant d\ .$$

où $c_0, \ldots, c_{d-1} \in \mathbb{C}$ et $c_0 \neq 0$. Notons $p(t) := \sum_{i=0}^{d} c_i t^i \in \mathbb{C}[t]$ son polynôme caractéristique, *où $c_d := -1$. Toute solution de cette relation de récurrence est une combinaison linéaire des d suites de la forme $(n^j \beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où β est une racine de $p(t)$ et $j \in \{0, 1, \ldots, m(\beta) - 1\}$, c.-à-d. j est un naturel strictement inférieur à la multiplicité de β.*

$$\boxed{-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0 x_{n-d} = a_n}$$

Divide and conquer: recherche binaire

15

~~1 5 7 9 10~~ $\boxed{15}$ ~~16 20 22~~ ~~33 56 57 58 59 66 77 88~~

Divide and conquer: recherche binaire

Théorème 2.19. *Le nombre de comparaisons effectuées au pire des cas par une recherche binaire dans un vecteur trié de taille N est exactement le nombre de bits dans la représentation binaire de N, c'est-à-dir* [illegible]. *Ces quantités sont solutions de la récurrence*

$$B_N = B_{\lfloor N/2 \rfloor} + 1 \quad \forall N \geqslant 2$$

avec $B_1 = 1$.

Divide and conquer: Mergesort: cas général (n quelconque)

Pour le moment, on prend $N = 2^n$ ($n \geqslant 0$). Nous verrons le cas général plus tard. Etant donné la structure récursive de l'algorithme, nous pouvons écrire

$$C_N = C_{\lceil N/2 \rceil} + C_{\lfloor N/2 \rfloor} + N \quad \forall N \geqslant 2; \quad C_1 = 0\,.$$

Divide and conquer: Mergesort: cas général (n quelconque)

Théorème 2.21. *Le nombre de copies effectuées par le tri fusion pour un vecteur de taille N est exactement*

$$C_N = N\lfloor \lg N \rfloor + 2N - 2^{\lfloor \lg N \rfloor + 1}\,.$$

Ce nombre est une majoration sur le nombre de comparaisons *effectuées par le tri fusion.*

Récurrences divide and conquer

- $f \sim g$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$, on dit alors que f et g sont *asymptotiquement équivalentes* ;
- $f = O(g)$ s'il existe une constante $C > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $f(n) \leqslant Cg(n)$ pour $n \geqslant n_0$;
- $f = o(g)$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$;
- $g = \Omega(f)$ si $f = O(g)$;
- $g = \omega(f)$ si $f = o(g)$;
- $f = \Theta(g)$ si $f = O(g)$ et $g = O(f)$, on dit alors que f et g ont même *comportement asymptotique*.

$$n^n,\ 2^n,\ n^2,\ n,\ \sqrt{n},\ \log^2 n,\ \log n,\ \log\log n$$

Récurrences divide and conquer

$$\boxed{a_N = \alpha a_{N/\beta} + f(N) \quad \forall N \in \mathbb{N}}$$

$$a(x) = \alpha a(x/\beta) + x \quad \forall x > 1; \quad a(x) = 0 \quad \forall x \leqslant 1$$

Théorème 2.23. *Si la fonction* $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est une solution de* (2.4), *alors :*

Cas 1. Si $\alpha > \beta$, *alors* $a(x) = \Theta(x^{\log_\beta \alpha})$

Cas 2. Si $\alpha = \beta$, *alors* $a(x) \sim x \log_\beta x = \Theta(x \log_2 x)$

Cas 3. Si $\alpha < \beta$, *alors* $a(x) \sim \frac{\beta}{\beta - \alpha} x = \Theta(x)$

Récurrences divide and conquer

$$a(x) = \alpha a(x/\beta) + x \quad \forall x > 1; \quad a(x) = 0 \quad \forall x \leqslant 1$$

$$\boxed{a_N = \alpha a_{N/\beta} + f(N) \quad \forall N \in \mathbb{N}}$$

Théorème 2.24 ("Master Theorem"). *Soient $\alpha \geqslant 1$, $\beta > 1$ des constantes et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une fonction. Pour une suite $(a_N)_{N\in\mathbb{N}}$ solution de la récurrence diviser-pour-régner* (2.3) *:*

Cas 1. Si $f(N) = O(N^{\log_\beta \alpha - \varepsilon})$ pour $\varepsilon > 0$, alors $a_N = \Theta(N^{\log_\beta \alpha})$.

Cas 2. Si $f(N) = \Theta(N^{\log_\beta \alpha})$, alors $a_N = \Theta(N^{\log_\beta \alpha} \log_2 N)$.

Cas 3. Si $f(N) = \Omega(N^{\log_\beta \alpha + \varepsilon})$ pour $\varepsilon > 0$, et si $\alpha f(N/\beta) \leqslant C f(N)$ pour une certaine constante $C < 1$ et N suffisamment grand, alors $a_N = \Theta(f(N))$.

□

Application: Le produit matriciel de Strassen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \,. \end{aligned}$$

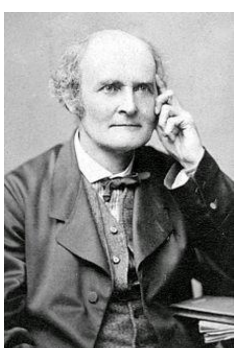
$$\begin{aligned} I &= (a_{11} - a_{22}) \cdot (b_{21} + b_{22}) \\ II &= (a_{11} + a_{22}) \cdot (b_{11} + b_{22}) \\ III &= (a_{11} - a_{21}) \cdot (b_{11} + b_{12}) \\ IV &= (a_{11} + a_{12}) \cdot b_{22} \\ V &= a_{11} \cdot (b_{12} - b_{22}) \\ VI &= a_{22} \cdot (b_{21} - b_{11}) \\ VII &= (a_{21} + a_{22}) \cdot b_{11} \end{aligned}$$

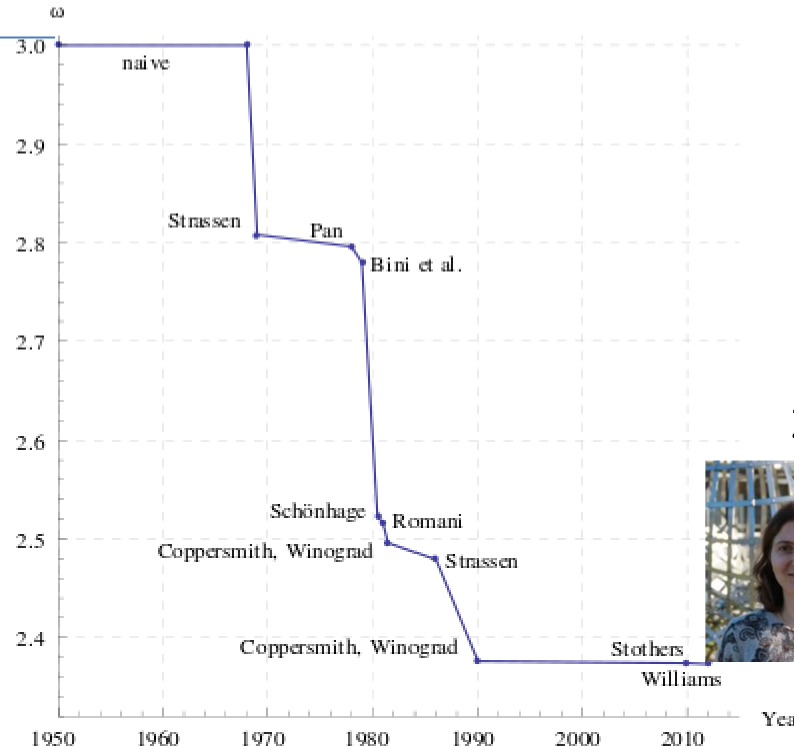
$$\begin{aligned} c_{11} &= I + II - IV + VI \\ c_{12} &= IV + V \\ c_{21} &= VI + VII \\ c_{22} &= II - III + V - VII \end{aligned}$$

Application: Le produit matriciel de Strassen

1850

1858





2.373

2.376

2.374

2?

Insert your picture here