Mathématiques Discrètes

Cours 4

Table des matières

Définitions de base

Théorème 1.4. *Soit $f : A \to B$ une fonction. Alors f est une bijection si et seulement si il existe une fonction $g : B \to A$ telle que $g \circ f$ est l'identité sur A et $f \circ g$ est l'identité sur B.*

Théorème 1.9 (Principe d'addition)**.** *Si $A_1, \ldots, A_k$ sont des ensembles* finis disjoints, *alors*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = |A_1 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + \cdots + |A_k| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| .$$

Théorème 1.11 (Principe de multiplication)**.** *Si $A_1, \ldots, A_k$ sont des ensembles* finis, *la cardinalité du produit cartésien $A_1 \times \cdots \times A_k$ est le produit des cardinalités des A_i pour $i \in [k]$:*

$$\left|\prod_{i=1}^{k} A_i\right| = |A_1 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_k| = \prod_{i=1}^{k} |A_i| .$$

Proposition 1.14. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n!$ donne le nombre de bijections d'un ensemble A vers un ensemble B, tous deux de taille n.*

Le coefficient binomial

Théorème 1.21 (Formule du binôme de Newton). *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

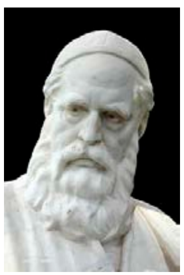
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k .$$

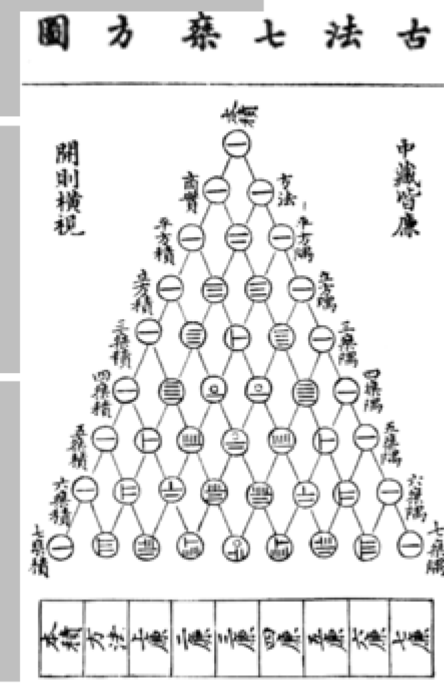
Théorème 1.17 (Symétrie). *Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$, on a*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} .$$

Théorème 1.18 (Absorption/extraction). *Pour $n, k \in \mathbb{N}_0$ avec $k \leqslant n$, on a*

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} .$$





Théorème 1.19 (Addition/induction). *Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $n > k > 0$, on a*

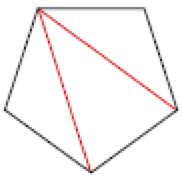
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} .$$

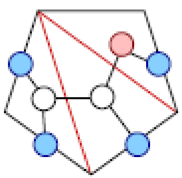
Théorème 1.20 (Somme parallèle). *Pour $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geqslant k$:*

$$\sum_{n=k}^{m} \binom{n}{k} = \binom{m+1}{k+1} .$$

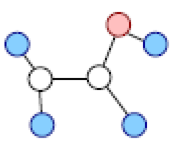
Preuves bijectives

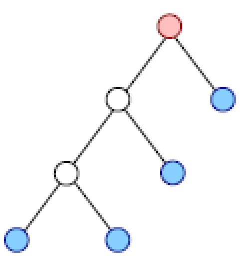
Théorème 1.22 (Théorème de Cayley, 1889). *Le nombre d'arbres étiquetés à n sommets est exactement n^{n-2}.*





Théorème 1.24. *Le nombre d'arbres binaires enracinés à n feuilles (à isomorphisme près) est égal au nombre de* [redacted]





Théorème 1.30. *Soit $(d_1, \ldots, d_n)$ un vecteur de $n \geqslant 2$ entiers strictement positifs sommant à $2n-2$. Le* [redacted]

$$\binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1}.$$

Table des matières

Table des matières

Chapitre 1: Intro et concepts fondamentaux

Définitions de base

Le coefficient binomial

Preuves bijectives

Chapitre 2: Récurrences

Exemples introductifs

<u>Les régions dans le plan (réc. linéaire d'ordre 1 (d=1))</u>

Les mots binaires sans ‘11’ (réc. lin. générales (d>0) mais coeff. const.)

L’algorithme mergesort (réc. ‘divide and conquer’)

Solution des récurrences

linéaire d'ordre 1

coeff. const. générales

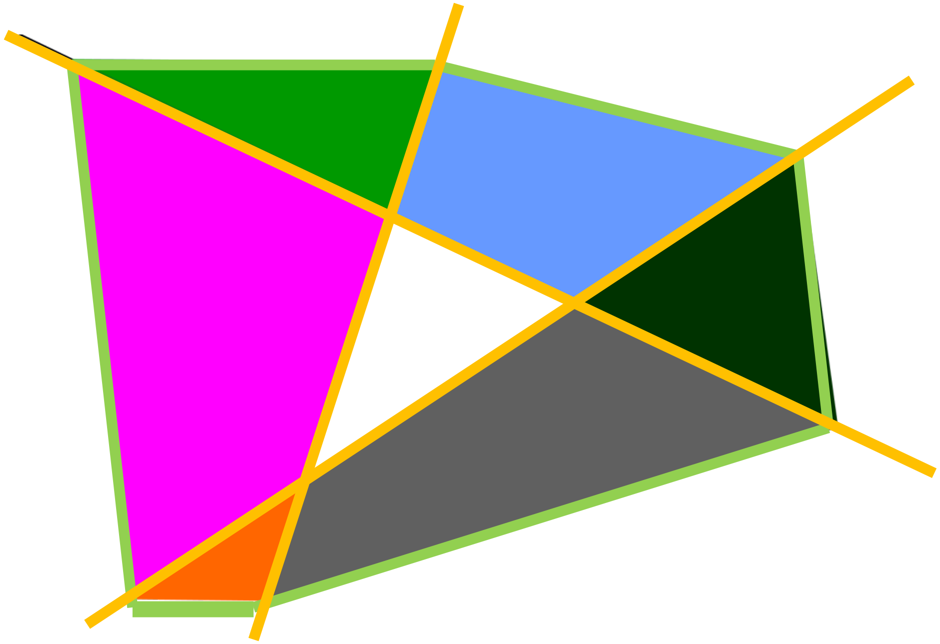
divide and conquer

Chapitre 3: Fonctions génératrices

Chapitre 4: Comportements asymptotiques

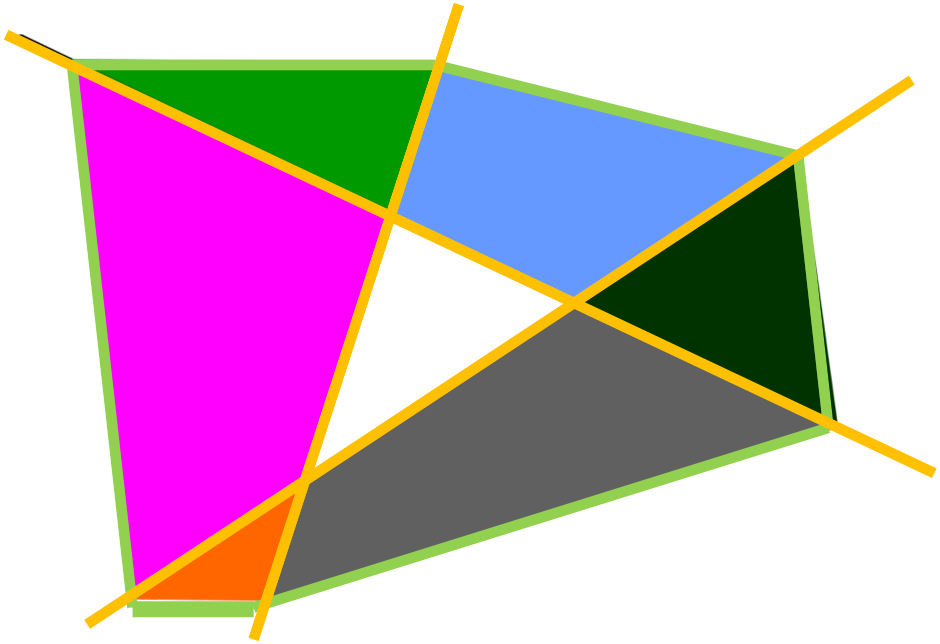
Chapitre 5: Théorie de l’information

- Chapitre 2: relations de récurrences
  - Un problème de ferme…



Définition 2.1 (Droites en position générale). Un ensemble de droites du plan est *en position générale* si toute paire de droites s'intersectent en exactement un point et tout triple de droites ont une intersection vide.

- Chapitre 2: relations de récurrences
  - Un problème de ferme…



Théorème 2.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre de régions du plan délimitées par n droites en position générale ne dépend pas du choix de ces droites. En d'autres termes, $\Phi_2(n)$ est bien défini. De plus,*

$$\Phi_2(n) = \Phi_2(n-1) + n$$

pour $n \geqslant 1$, et $\Phi_2(0) = 1$.

Le coefficient binomial

Théorème 1.21 (Formule du binôme de Newton). *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

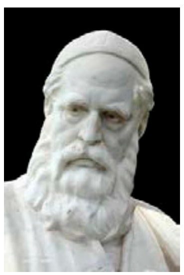
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \,.$$

Théorème 1.17 (Symétrie). *Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$, on a*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \,.$$

Théorème 1.18 (Absorption/extraction). *Pour $n, k \in \mathbb{N}_0$ avec $k \leqslant n$, on a*

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \,.$$



Théorème 1.19 (Addition/induction). *Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $n > k > 0$, on a*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \,.$$

Théorème 1.20 (Somme parallèle). *Pour $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geqslant k$:*

$$\sum_{n=k}^{m} \binom{n}{k} = \binom{m+1}{k+1} \,.$$

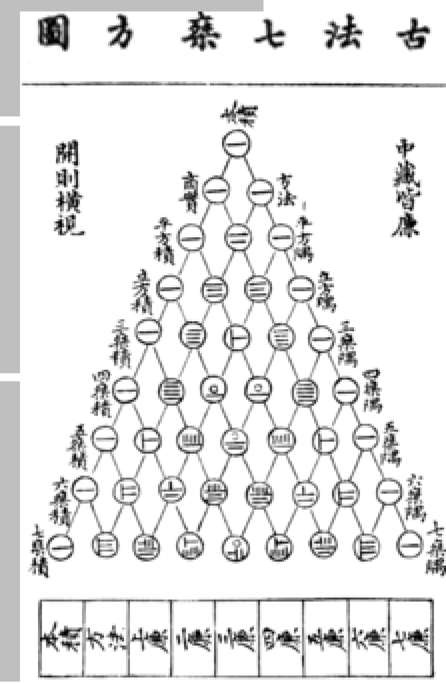
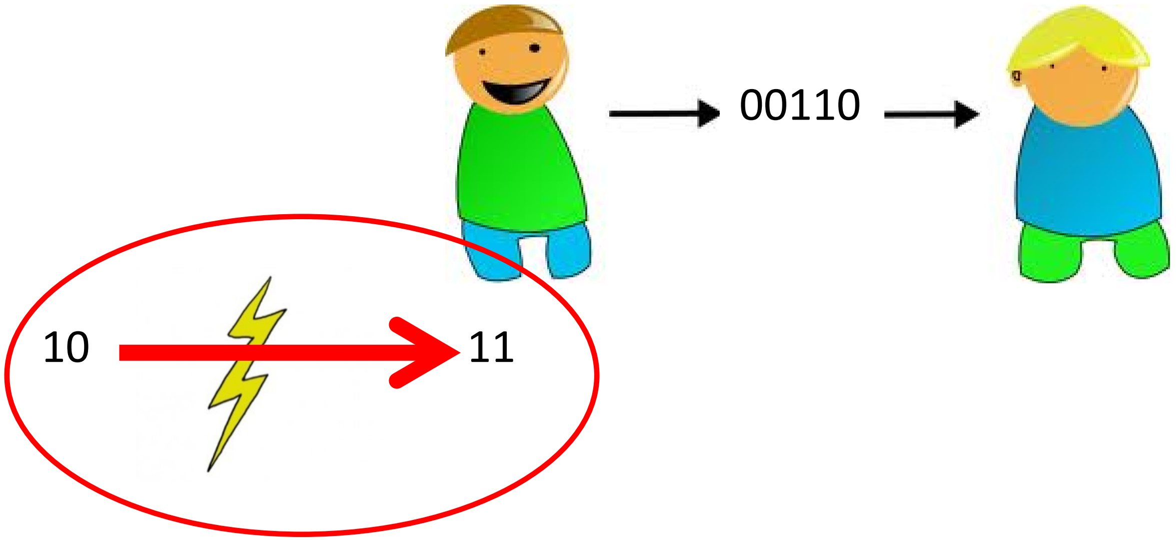


Table des matières

Maths discrètes

- Chapitre 2: relations de récurrences
  - Un problème de communication…



Solution: jamais de 11 consécutifs

➔ Combien de mots de taille n puis-je envoyer?

Maths discrètes

- Chapitre 2: relations de récurrences

  Petit devoir:

  ➔Combien de mots de taille n puis-je envoyer?

  a(n)=nbre de mots de taille n sans ‘11’ consécutifs

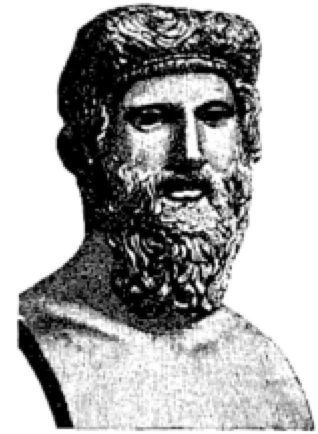
  – Compter pour n=1,2,3
  – Exprimer a(n) en fonction de a(n-1),a(n-2)
  – sans tenir compte des conditions initiales:
    - Essayer une solution de type a(n)=r^n
    - Question subsidiaire: En déduire un maximum de solutions possibles à l’équation

Le nombre d'or

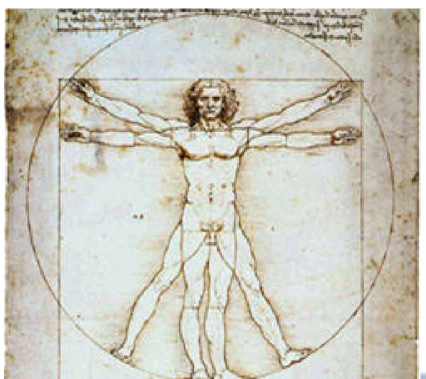
$$\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

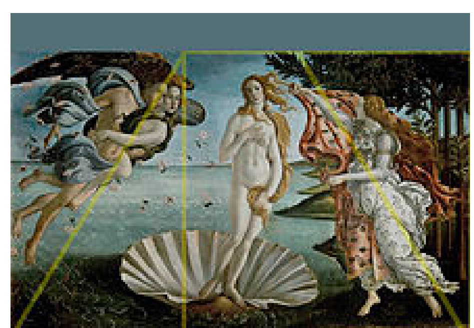
$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$



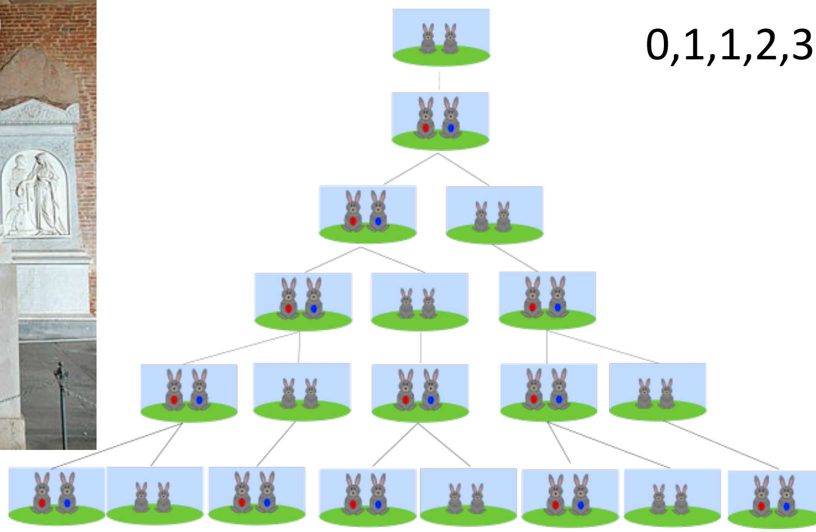
$$x^2 - x - 1 = 0$$





La suite de fibonacci

$$\mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n$$



0,1,1,2,3,5,8,13,21,34…

Table des matières

- Chapitre 2: relations de récurrences

  – Un problème de tri…

6 5 3 1 8 7 2 4

Mergesort: une récurrence ‘divide and conquer’

6 5 3 1 8 7 2 4

Mergesort: une récurrence ‘divide and conquer’

6 5 3 1 8 7 2 4

Proposition 2.9. *Le nombre de copies effectuées par le tri fusion sur un vecteur de taille* $N = 2^n$ *est*

$$C_N = N \log_2 N \ .$$

Table des matières

Récurrences linéaires

Théorème 2.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre de régions du plan délimitées par n droites en position générale ne dépend pas du choix de ces droites. En d'autres termes, $\Phi_2(n)$ est bien défini. De plus,*

$$\Phi_2(n) = \Phi_2(n-1) + n$$

pour $n \geqslant 1$, et $\Phi_2(0) = 1$.

Théorème 2.10. *La récurrence*

$$x_n = c_n x_{n-1} + d_n \quad \forall n \geqslant 1; \quad x_0 = 0$$

a pour solution explicite

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} d_i \prod_{j=i+1}^{n} c_j = d_n + d_{n-1}c_n + d_{n-2}c_{n-1}c_n + \cdots + d_1 c_2 \cdots c_n.$$

Table des matières

Récurrences linéaires homogènes à coefficients constants (RLCC)

$$\boxed{-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0 x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geqslant d}$$

Théorème 2.12. *Notons S l'ensemble des solutions de la RLCC (2.2). Alors :*

(i) *S est un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,*

(ii) $\dim(S) = d$.

RLCC: solution générale

$$\boxed{-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0 x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geqslant d}$$

Théorème 2.17 (Récurrences linéaires homogènes à coefficients constants). *Considérons la RLCC homogène d'ordre $d \geqslant 1$:*

$$-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0 x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geqslant d\,.$$

où $c_0, \ldots, c_{d-1} \in \mathbb{C}$ et $c_0 \neq 0$. Notons $p(t) := \sum_{i=0}^{d} c_i t^i \in \mathbb{C}[t]$ son polynôme caractéristique, *où $c_d := -1$. Toute solution de cette relation de récurrence est une combinaison linéaire des d suites de la forme $(\ \beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où β est une racine de $p(t)$ e*

RLCC: racines multiples

$$\boxed{-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0 x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geqslant d}$$

Définition 2.13 (Multiplicité)**.** Pour rappel, un nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ est *une racine de multiplicité* $m = m(a)$ d'un polynôme complexe $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ si $p(t)$ est divisible par $(t-a)^m$, mais pas par $(t-a)^{m+1}$.

Lemme 2.14. *Soit $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ un polynôme complexe de degré $d \geqslant 1$. Un nombre complexe a est une racine de multiplicité $m = m(a)$ du polynôme $p(t)$ si et seulement si $p(a) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(a) = \cdots = \frac{\mathrm{d}^{m-1}p}{\mathrm{d}t^{m-1}}(a) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}^m p}{\mathrm{d}t^m}(a) \neq 0$.*

RLCC: racines multiples

$$\boxed{-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0 x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geqslant d}$$

Théorème 2.17 (Récurrences linéaires homogènes à coefficients constants). *Considérons la RLCC homogène d'ordre $d \geqslant 1$:*

$$-x_n + c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \cdots + c_0 x_{n-d} = 0 \quad \forall n \geqslant d\,.$$

où $c_0, \ldots, c_{d-1} \in \mathbb{C}$ et $c_0 \neq 0$. Notons $p(t) := \sum_{i=0}^{d} c_i t^i \in \mathbb{C}[t]$ son polynôme caractéristique, *où $c_d := -1$. Toute solution de cette relation de récurrence est une combinaison linéaire des d suites de la forme $(n^j \beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où β est une racine de $p(t)$ et $j \in \{0, 1, \ldots, m(\beta) - 1\}$, c.-à-d. j est un naturel strictement inférieur à la multiplicité de β.*

Que reste-t-il à prouver?

- Ces fonctions sont linéairement indépendantes
- Ces fonctions sont des solutions valides