

# QU'EST-CE L'ADMISSIBILITÉ DE NELSON MARTINS-FERREIRA?

TIM VAN DER LINDEN

RÉSUMÉ. In his Ph.D. thesis [MF08a], Nelson Martins-Ferreira introduced a technical condition (for a certain type of diagram in a category) which he called *admissibility*. His first aim was to efficiently describe internal categorical structures, but the flexibility of the condition allowed him to use it for expressing commutativity conditions as well.

Admissibility allowed us to conveniently describe the so-called *Smith is Huq* condition [MFVdL12, HVdL13] and its close relationship with weighted commutativity [GJU14, MFVdL14]. We were, however, not entirely happy to be using a pure technical definition which at first sight does not seem to have a conceptual meaning. Clearly it should model *commuting* in some sense, but *for which kind of objects?*

The aim of my talk is to explain that admissibility is indeed a commutativity condition, namely for the same objects that answer the question raised in [MFMUVdL15].

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. La condition d'admissibilité; les structures catégoriques internes	2
3. La commutativité pondérée	4
4. Conditions en termes des commutateurs de Higgins	5
5. Les idéaux et les relations scindées surjectives	8
6. Références	10

## 1. INTRODUCTION

L'*admissibilité* est une condition technique, en fait une pièce de terminologie, introduite par Nelson Martins-Ferreira dans sa thèse de doctorat [MF08a]<sup>1</sup>. Nelson avait besoin d'une manière pour exprimer que dans une certaine situation, une certaine flèche existe. Je donnerai les détails plus tard. Le but de mon exposé est de faire de la publicité pour cette condition technique en donnant des exemples concrets, mais aussi de fournir une explication conceptuelle.

Pourquoi cette condition m'intéresse-t-elle? Elle est d'une flexibilité énorme, qui a permis à Nelson de décrire des structures catégoriques internes (c'était son but dans [MF08a]) tout comme des conditions de commutativité (à la Smith ou à la Huq). Dans notre travail sur les catégories internes avec Manfred Hartl [HVdL13], c'était exactement ce qu'il nous fallait pour pouvoir décrire la condition *Smith = Huq* en termes de commutateurs de Higgins. Puis, dans [MFVdL14], on s'est aperçu

---

*Date:* 13 novembre 2015.

Merci aux participants au Séminaire Itinérant de Catégories du 31 octobre 2015.

1. Étudiant de George Janelidze à Aveiro (Portugal). Pendant son travail de doctorat les Janelidze ont déménagé vers l'Afrique du Sud, et il a donc présenté et défendu sa thèse à Cape Town.

qu'aussi le *commutateur pondéré* de [GJU14] peut être exprimé en utilisant la notion d'admissibilité.

Ce qui nous embêtait en utilisant cette terminologie est le manque d'une explication conceptuelle. Il était clair que d'une certaine manière, l'admissibilité doit modeler *la commutativité*—le fait que deux choses commutent—mais *pour quel genre d'objet?* On était très content donc d'apprendre, en étudiant les idéaux en collaboration avec Nelson Martins-Ferreira, Andrea Montoli et Aldo Ursini dans l'article [MFMUVdL15], qu'en effet une telle explication conceptuelle existe. En fait, la réponse à cette question-ci est exactement la même que celle à la question posée dans [MFMUVdL15].

## 2. LA CONDITION D'ADMISSIBILITÉ; LES STRUCTURES CATÉGORIQUES INTERNES

Dans sa thèse [MF08a], Nelson travaille dans le cadre d'une catégorie qui est pointée, régulière et faiblement de Mal'tsev [MF08b].

**Définition 2.1.** Une catégorie finiment complète  $\mathbb{C}$  est **faiblement de Mal'tsev** si, pour tout produit fibré d'épimorphismes scindés

$$\begin{array}{ccc} A \times_B C & \begin{array}{c} \xleftarrow{e_2} \\ \xrightarrow{\pi_2} \end{array} & C \\ \begin{array}{c} \uparrow \pi_1 \\ \downarrow \pi_1 \end{array} & \begin{array}{c} \xleftarrow{e_1} \\ \xrightarrow{e_1} \end{array} & \\ A & \begin{array}{c} \xleftarrow{r} \\ \xrightarrow{f} \end{array} & B \\ & & \begin{array}{c} \downarrow g \\ \uparrow s \end{array} \end{array}$$

les morphismes  $e_1 = \langle 1_A, s \circ f \rangle$  et  $e_2 = \langle r \circ g, 1_C \rangle$ , induits par la propriété universelle du produit fibré, sont conjointement épimorphes.

Rappelons que  $\mathbb{C}$  est une catégorie de Mal'tsev si et seulement si  $(e_1, e_2)$  sont conjointement *fortement* épimorphes [Bou96, BB04]. Dans la suite on travaille donc dans une catégorie pointée, régulière et faiblement de Mal'tsev  $\mathbb{C}$ .

**Définition 2.2.** Un **diagramme d'admissibilité** (aussi appelé **cerf-volant**, ou **kite** en anglais, par Nelson) est un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccccc} A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{r} \end{array} & B & \begin{array}{c} \xleftarrow{g} \\ \xrightarrow{s} \end{array} & C \\ & \searrow \alpha & \downarrow \beta & \swarrow \gamma & \\ & & D & & \end{array} \quad (\mathbf{A})$$

où  $f \circ r = 1_B = g \circ s$  et  $\alpha \circ r = \beta = \gamma \circ s$ .

En prenant le produit fibré de  $f$  avec  $g$ , on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \begin{array}{c} \nearrow \pi_2 \\ \searrow \pi_2 \end{array} & & \begin{array}{c} \nearrow s \\ \searrow s \end{array} & \\ A \times_B C & \begin{array}{c} \xrightarrow{e_2} \\ \xleftarrow{e_2} \end{array} & & B & \xrightarrow{\beta} D \\ & \begin{array}{c} \nearrow e_1 \\ \searrow e_1 \end{array} & & \begin{array}{c} \nearrow f \\ \searrow f \end{array} & \\ & & A & \begin{array}{c} \xrightarrow{r} \\ \xleftarrow{r} \end{array} & \\ & & & & \nearrow \alpha \end{array}$$

**Définition 2.3.** Le triple  $(\alpha, \beta, \gamma)$  est **admissible relatif à**  $(f, r, g, s)$  s'il existe un morphisme  $\varphi: A \times_B C \rightarrow D$  tel que  $\varphi \circ e_1 = \alpha$  and  $\varphi \circ e_2 = \gamma$ . On dit aussi alors que le **cerf-volant (A) est admissible** (il vole).

**Lemme 2.4.** *Un tel morphisme  $\varphi$  (que dans la suite on appellera un **connecteur**) est forcément unique.*

*Démonstration.* Si aussi  $\psi \circ e_1 = \alpha$  and  $\psi \circ e_2 = \gamma$ , alors  $\psi \circ e_1 = \varphi \circ e_1$  et  $\psi \circ e_2 = \varphi \circ e_2$ . On a donc  $\varphi = \psi$  car  $e_1$  et  $e_2$  sont conjointement épimorphes.  $\square$

**Remarque 2.5.** Dans le cadre faiblement de Mal'tsev, l'admissibilité est donc une condition, et non une structure additionnelle, d'un cerf-volant donné.

Comme exemple d'application de cette terminologie dans l'étude des structures catégoriques internes, mentionnons le théorème suivant [MF08a] (déjà connu sous une autre forme [CPP92]—voir la prochaine section).

**Théorème 2.6.** *Un graphe réflexif*

$$C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d} \\ \xleftarrow{e} \\ \xrightarrow{c} \end{array} C_0 \qquad d \circ e = 1_{C_0} = c \circ e$$

*est une catégorie interne si et seulement si le cerf-volant*

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{d} \\ \xleftarrow{e} \end{array} & C_0 & \begin{array}{c} \xleftarrow{c} \\ \xrightarrow{e} \end{array} & C_1 \\ & \searrow & \downarrow e & \swarrow & \\ & & C_1 & & \end{array}$$

*est admissible.*

*Démonstration.* La condition d'admissibilité nous donne une flèche

$$m: C_1 \times_{C_0} C_1 \rightarrow C_1$$

telle que  $m \circ \langle 1_{C_1}, e \circ d \rangle = 1_{C_1}$  et  $m \circ \langle e \circ c, 1_{C_1} \rangle = 1_{C_1}$ . Ce  $m$  est donc une structure de graphe multiplicatif sur le graphe réflexif donné, qui « envoie une paire

$$(x, y) \qquad \cdot \xleftarrow{x} \cdot \xleftarrow{y} \cdot$$

sur sa composée  $m(x, y)$  ». Cette multiplication a déjà des unités à gauche et à droite. Il suffit maintenant de montrer que dans une catégorie faiblement de Mal'tsev, tout graphe multiplicatif est une catégorie interne: que la multiplication est automatiquement associative, et que  $d \circ m = d \circ \pi_2$  et  $c \circ m = c \circ \pi_1$ .

On montre, par exemple, que  $d \circ m = d \circ \pi_2$  en constatant que les flèches  $d \circ m$  et  $d \circ \pi_1$  sont toutes les deux connecteur du cerf-volant

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{d} \\ \xleftarrow{e} \end{array} & C_0 & \begin{array}{c} \xleftarrow{c} \\ \xrightarrow{e} \end{array} & C_1 \\ & \searrow d & \parallel & \swarrow d & \\ & & C_0 & & \end{array}$$

En effet,

$$\begin{cases} (d \circ m) \circ \langle 1_{C_1}, e \circ d \rangle = d = d \circ e \circ d = (d \circ \pi_2) \circ \langle 1_{C_1}, e \circ d \rangle, \\ (d \circ m) \circ \langle e \circ c, 1_{C_1} \rangle = d = d \circ 1_{C_1} = (d \circ \pi_2) \circ \langle e \circ c, 1_{C_1} \rangle. \end{cases}$$

Le résultat suit donc du Lemme 2.4.  $\square$

C'est de telle manière que Nelson Martins-Ferreira utilise l'admissibilité dans sa thèse [MF08a].

## 3. LA COMMUTATIVITÉ PONDÉRÉE

Bien sûr la Définition 2.3 a été fort inspirée par la notion de connecteur entre deux relations d'équivalence [BG02, BB04], et l'approche à la théorie des commutateurs de Borceux et Bourn en général. En effet, simplement par définition, étant donné deux congruences

$$R \begin{array}{c} \xrightarrow{r_1} \\ \xleftarrow{i_R} \\ \xrightarrow{r_2} \end{array} X \begin{array}{c} \xleftarrow{s_2} \\ \xleftarrow{i_S} \\ \xrightarrow{s_1} \end{array} S$$

sur un objet  $X$ , les relations  $R$  et  $S$  *commutent dans le sens de Smith* (ou sont *connectées* dans la terminologie de [BB04], voir aussi [Smi76, Ped95]) si et seulement si le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} R & \begin{array}{c} \xrightarrow{r_1} \\ \xleftarrow{i_R} \end{array} & X & \begin{array}{c} \xleftarrow{s_1} \\ \xleftarrow{i_S} \end{array} & S \\ & \searrow r_2 & \parallel & \swarrow s_2 & \\ & & X & & \end{array}$$

est un cerf-volant admissible. (En fait, dans [BB04], on inverse les rôles de  $r_1$  et  $r_2$ ; par symétrie de  $R$  on obtient une notion équivalente.) De la même manière, étant donné un cospan

$$K \xrightarrow{k} X \xleftarrow{l} L$$

sur un objet  $X$ , les flèches  $k$  et  $l$  *commutent dans le sens de Huq* (*collaborent* dans [Bou04], voir aussi [Huq68, BB04]) si et seulement si le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} K & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} & 0 & \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & L \\ & \searrow k & \downarrow & \swarrow l & \\ & & X & & \end{array}$$

est un cerf-volant admissible.

Les deux notions ont été unifiées dans l'article [GJU14] où on introduit le concept de *commutativité pondérée* dans le cadre d'une catégorie homologique finiment cocomplète [BB04].

**Définition 3.1.** Dans une catégorie homologique finiment cocomplète, un **cospan pondéré** est un triple de morphismes

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ & \downarrow w & \\ X & \xrightarrow{x} D \xleftarrow{y} & Y \end{array} \quad (\mathbf{B})$$

dans lequel  $(x, y)$  joue le rôle de cospan et  $w$  est le poids. Considérons le produit fibré

$$\begin{array}{ccc}
 & & W + Y \\
 & \nearrow^{\pi_2} & \\
 (W + X) \times_W (W + Y) & & \\
 & \searrow_{\pi_1} & \\
 & & W + X \\
 & & \nearrow_{(1_W \ 0)} \\
 & & W
 \end{array}$$

et le diagramme extérieur

$$\begin{array}{ccccc}
 W + X & \xrightarrow{\langle 1_{W+X}, \iota_W \circ (1_W \ 0) \rangle} & (W + X) \times_W (W + Y) & \xleftarrow{\langle \iota_W \circ (1_W \ 0), 1_{W+Y} \rangle} & W + Y \\
 & \searrow_{(w \ x)} & \downarrow \varphi & \swarrow_{(w \ y)} & \\
 & & D & & 
 \end{array}$$

induits. Dans [GJU14] on dit que les morphismes  $x$  et  $y$  **commutent au-dessus de  $w$**  si et seulement si une flèche  $\varphi$  (appelée une **multiplication interne**) existe telle que le diagramme reste commutatif.

**Remarque 3.2.** Il est immédiatement clair par définition que les morphismes  $x$  et  $y$  commutent au-dessus de  $w$  si et seulement si le cerf-volant

$$\begin{array}{ccccc}
 W + X & \xrightarrow{(1_W \ 0)} & W & \xleftarrow{(1_W \ 0)} & W + Y \\
 & \searrow_{\iota_W} & \downarrow w & \swarrow_{\iota_W} & \\
 & & D & & 
 \end{array}$$

est admissible. Il est aussi possible (mais un peu plus difficile) de montrer que, réciproquement, l'admissibilité peut être exprimée comme une commutativité pondérée: voir [MFVdL14].

**Remarque 3.3.** Comme l'explique l'article [GJU14], et tout en accord avec la remarque précédente, en prenant  $W = 0$  on retrouve les paires collaborantes ( $x$  et  $y$  commutent au-dessus de 0 ssi ils commutent dans le sens de Huq), et  $w = 1_D$  capte les congruences commutantes dans le sens de Smith (les normalisations respectives  $x$  et  $y$  de deux congruences  $R$  et  $S$  sur  $D$  commutent au-dessus de  $1_D$  si et seulement si  $R$  et  $S$  sont connectées, point de vue menant vers le *commutateur d'Ursini* [Man12]).

#### 4. CONDITIONS EN TERMES DES COMMULATEURS DE HIGGINS

Restant pour le moment dans le cadre d'une catégorie homologique finiment cocomplète, on donne une analyse de l'admissibilité en termes du commutateur (binaire et ternaire) de Higgins [Hig56, MM10, HL13, HVdL13].

**Définition 4.1.** Étant donné deux sous-objets  $k: K \rightarrow X$  et  $l: L \rightarrow X$  d'un objet  $X$ , leur **commutateur de Higgins**  $[K, L] \leq X$  est l'image du morphisme induit

$$K \diamond L \xrightarrow{\iota_{K,L}} K + L \xrightarrow{(k \ l)} X,$$

où

$$K \diamond L = \text{Ker}\left(\begin{pmatrix} 1_K & 0 \\ 0 & 1_L \end{pmatrix} : K + L \rightarrow K \times L\right).$$

**Remarque 4.2.** Comme expliqué dans [GJU14], le commutateur binaire de Higgins peut être vu comme un commutateur pondéré.

**Remarque 4.3.** L'objet  $K \diamond L$  (et aussi l'objet  $K \diamond L \diamond M$  défini en bas) est un exemple d'un *co-smash produit* [CJ03].

**Définition 4.4.** Si  $m: M \rightarrow X$  est un troisième sous-objet de  $X$ , alors le **commutateur ternaire (de Higgins)**  $[K, L, M] \leq X$  est défini comme l'image de la flèche composée

$$K \diamond L \diamond M \xrightarrow{\iota_{K,L,M}} K + L + M \xrightarrow{(k \ l \ m)} X,$$

où  $\iota_{K,L,M}$  est le noyau du morphisme

$$K + L + M \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_K & i_L & 0 \\ i_K & 0 & i_M \\ 0 & i_L & i_M \end{pmatrix}} (K + L) \times (K + M) \times (L + M).$$

Le théorème suivant [HVdL13] exprime d'admissibilité des cerfs-volants en termes des commutateurs de Higgins.

**Théorème 4.5.** *Le cerf-volant*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightleftharpoons[f]{g} & B & \xrightleftharpoons[s]{r} & C \\ & \searrow \alpha & \downarrow \beta & \swarrow \gamma & \\ & & D & & \end{array}$$

est admissible si et seulement si

$$[\overline{K}, \overline{L}] = 0 = [\overline{K}, \overline{L}, \overline{B}]$$

où

$$\begin{array}{ccccccc} K & \xrightarrow{\ker(f)} & A & \xrightleftharpoons[f]{g} & B & \xrightleftharpoons[s]{r} & C & \xleftarrow{\ker(g)} & L \\ & \searrow & \searrow \alpha & \downarrow \beta & \swarrow \gamma & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\ & & \overline{K} & \xrightarrow{\overline{k}} & D & \xleftarrow{\overline{l}} & \overline{L} & & \end{array}$$

$\overline{k}: \overline{K} \rightarrow D$  est l'image de  $\alpha \circ \ker(f)$ ,  $\overline{l}: \overline{L} \rightarrow D$  est l'image de  $\gamma \circ \ker(g)$  et  $\overline{B}$  est l'image de  $\beta$ .  $\square$

Comme une conséquence immédiate du Théorème 2.6, on trouve [HVdL13] une version générale de la caractérisation des catégories internes, valide dans les groupes [Lod82, Mac98] où le commutateur ternaire est invisible, car inclus dans le commutateur binaire:

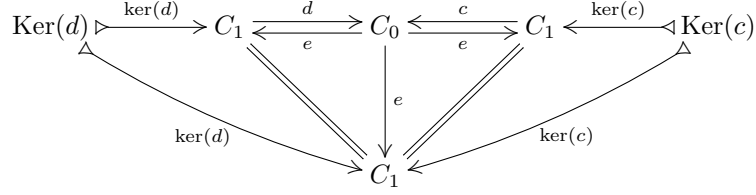
**Corollaire 4.6.** *Un graphe réflexif*

$$C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d} \\ \xleftarrow{e} \\ \xrightarrow{c} \end{array} C_0 \quad d \circ e = 1_{C_0} = c \circ e$$

est une catégorie interne si et seulement si

$$[\text{Ker}(d), \text{Ker}(c)] = 0 = [\text{Ker}(d), \text{Ker}(c), \text{Im}(e)]$$

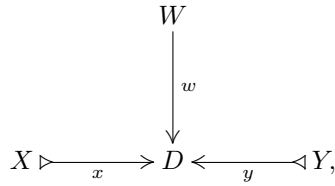
où



et  $\text{Im}(e)$  est l'image de  $e$ . □

La commutativité pondérée s'exprime de façon suivante [MFVdL14].

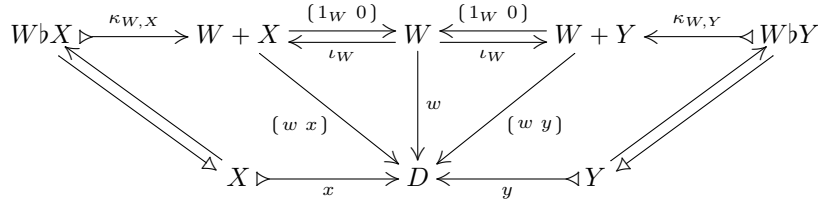
**Corollaire 4.7.** *Étant donné un cospan pondéré*



où  $x$  et  $y$  sont des monomorphismes normaux, alors  $x$  et  $y$  commutent au-dessus de  $w$  si et seulement si

$$[X, Y] = 0 = [X, Y, \text{Im}(w)].$$

*Démonstration.* Dans le diagramme



le monomorphisme normal  $x$  est l'image de  $(w \ x) \circ \kappa_{W,X}$ , tandis que  $y$  est l'image de  $(w \ y) \circ \kappa_{W,Y}$ . En effet, le morphisme  $WbX \rightarrow X$  existe car  $x$  est un noyau, et il est scindé par  $\eta_X : X \rightarrow WbX$ , composante de l'unité de la comonade  $Wb(-)$ . □

Rappelons [BB04, MFVdL12] qu'une catégorie homologique satisfait la condition **Smith** = **Huq** si et seulement si deux congruences  $R, S$  sur un objet  $X$  commutent dans le sens de Smith quand leurs normalisations

$$k = r_2 \circ \text{ker}(r_1) : K = \text{Ker}(r_1) \rightarrow X$$

et

$$l = s_2 \circ \text{ker}(s_1) : L = \text{Ker}(s_1) \rightarrow X$$

commutent dans le sens de Huq.

**Corollaire 4.8.** *La catégorie donnée satisfait Smith = Huq si et seulement si pour toute paire de sous-objets normaux  $K$  et  $L$  d'un objet  $X$ ,*

$$[K, L] = 0 \quad \Rightarrow \quad [K, L, X] = 0.$$

*Démonstration.* Ceci suit ou bien du corollaire précédent en tenant compte du fait que la commutativité pondérée caractérise les commutativités de Smith et de Huq (voir Remarque 3.3), ou bien directement du Théorème 4.5 en utilisant l'expression de commutativité de Smith ou de Huq en termes d'admissibilité (début de la Section 3). □

## 5. LES IDÉAUX ET LES RELATIONS SCINDÉES SURJECTIVES

Selon [JMU07], un **idéal** dans une catégorie pointée régulière est l'image directe d'un noyau le long d'un épimorphisme régulier. Cette définition coïncide avec celle proposée dans les variétés [Hig56, Mag67, Urs72].

Dans l'article [MFMUVdL15] on explique qu'un morphisme  $i: I \rightarrow Y$  est un idéal précisément quand il existe une *relation scindée surjective* de laquelle il est la normalisation. Rappelons-nous la définition:

**Définition 5.1.** Un **span scindé à gauche** de  $X$  vers  $Y$  est un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ d \nearrow & & \searrow c \\ X & & Y \\ e \nwarrow & & \end{array} \quad (\text{C})$$

où  $d \circ e = 1_X$ . Un span scindé à gauche  $(d, c, e)$  est appelé une **relation scindée à gauche** quand le span  $(d, c)$  conjointement monomorphe.

Un **span surjectif** de  $X$  vers  $Y$  est un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ d \nearrow & & \searrow c \\ X & & Y \end{array}$$

où  $c$  est un épimorphisme régulier. Un span surjectif  $(d, c)$  est une **relation surjective** quand le span  $(d, c)$  conjointement monomorphe.

La **normalisation** (la **classe de zéro**) d'un span  $(d, c)$  est la flèche

$$c \circ \ker(d): \text{Ker}(d) \rightarrow Y.$$

Une flèche  $i: I \rightarrow Y$  est donc un idéal si et seulement si un diagramme comme (C) existe tel que  $d$  et  $c$  sont conjointement monomorphes,  $c$  est un épimorphisme régulier et  $c \circ \ker(d) = i$ .

Retournons maintenant à la condition d'admissibilité dans une catégorie pointée, régulière et faiblement de Mal'tsev. Quand (A) est un cerf-volant admissible, alors

$$\alpha \circ r = \varphi \circ e_1 \circ r = \varphi \circ e_2 \circ s = \gamma \circ s,$$

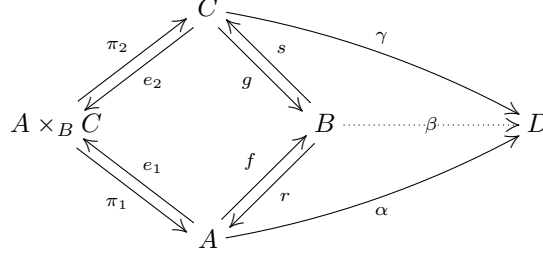
et donc la flèche  $\beta = \alpha \circ r = \gamma \circ s$  dans (A) est déterminée. Ceci mène naturellement vers la définition suivante, où le diagramme (A) est remplacé par le diagramme plus simple (D).

**Définition 5.2.** On dira que deux spans scindés à gauche  $(f, \alpha, r)$  et  $(g, \gamma, s)$  de  $B$  vers  $D$  comme dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftrightarrow{f} & B & \xleftrightarrow{g} & C \\ & \xleftarrow{r} & & \xleftarrow{s} & \\ & \searrow \alpha & & \swarrow \gamma & \\ & & D & & \end{array} \quad (\text{D})$$



se **centralisent** ou **commutent** s'il existe un morphisme (forcément unique)  $\varphi: A \times_B C \rightarrow D$ , appelé le **connecteur**, du produit fibré  $A \times_B C$



de  $f$  et  $g$  vers l'objet  $D$  tel que  $\varphi \circ e_1 = \alpha$  et  $\varphi \circ e_2 = \gamma$ .

Il est clair que cette condition est équivalente à l'admissibilité du cerf-volant **(A)**. Ceci explique donc l'admissibilité en termes conceptuels: clairement c'est une condition de commutativité, mais sans la notion de span scindé il était impossible d'exprimer *ce qui commute* exactement.

**Remarque 5.3.** Bien sûr, cette notion de commutativité de spans scindés est aussi flexible que l'admissibilité. Elle est une extension immédiate de la notion de deux relations d'équivalence connectées dans le sens de [BB04]. Par exemple, dans une catégorie homologique finiment cocomplète, la commutativité pondérée peut être exprimée de manière suivante. Étant donné un cospan pondéré  $(x, y, w)$  comme dans **(B)**, les morphismes  $x$  et  $y$  commutent au-dessus de  $w$  si et seulement si les spans scindés à gauche  $((1_w \ 0), (w \ x), \iota_W)$  et  $((1_w \ 0), (w \ y), \iota_W)$

$$\begin{array}{ccccc}
 W + X & \xrightarrow{(1_w \ 0)} & W & \xleftarrow{(1_w \ 0)} & W + Y \\
 & \xleftarrow{\iota_W} & & \xrightarrow{\iota_W} & \\
 & & & & \\
 & \searrow (w \ x) & & \swarrow (w \ y) & \\
 & & D & & 
 \end{array}$$

commutent.

On finit en mentionnant un théorème de [MFMUVdL15] qui explique pourquoi dans le cadre d'une catégorie semi-abélienne, il était possible de décrire la condition  $Smith = Huq$  en termes d'admissibilité de cerfs-volants—une notion a priori plus générale que la commutativité (dans le sens de Smith) des congruences. En effet, dans une catégorie semi-abélienne, les idéaux et les noyaux coïncident; tandis que, par le résultat principal de [BMFVdL13], la condition (i) est exactement  $Smith = Huq$ .

**Théorème 5.4.** *Dans une catégorie pointée, régulière et faiblement de Mal'tsev  $\mathbb{C}$ , les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *tout foncteur noyau  $\text{Ker}: \text{Pt}_X(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  reflète la commutativité des paires de flèches qui ont un idéal comme image;*
- (ii) *une paire de relations surjectives scindées à gauche commute dès que ses normalisations commutent;*
- (iii) *une paire de spans surjectifs scindés à gauche commute dès que ses normalisations commutent.*  $\square$

## 6. RÉFÉRENCES

- [BB04] F. Borceux and D. Bourn, *Mal'cev, protomodular, homological and semi-abelian categories*, Math. Appl., vol. 566, Kluwer Acad. Publ., 2004.
- [BG02] D. Bourn and M. Gran, *Centrality and normality in protomodular categories*, Theory Appl. Categ. **9** (2002), no. 8, 151–165.
- [BMFVdL13] D. Bourn, N. Martins-Ferreira, and T. Van der Linden, *A characterisation of the “Smith is Huq” condition in the pointed Mal'tsev setting*, Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. **LIV** (2013), no. 3, 163–183.
- [Bou96] D. Bourn, *Mal'cev categories and fibration of pointed objects*, Appl. Categ. Structures **4** (1996), 307–327.
- [Bou04] ———, *Commutator theory in regular Mal'cev categories*, Galois Theory, Hopf Algebras, and Semiabelian Categories (G. Janelidze, B. Pareigis, and W. Tholen, eds.), Fields Inst. Commun., vol. 43, Amer. Math. Soc., 2004, pp. 61–76.
- [CJ03] A. Carboni and G. Janelidze, *Smash product of pointed objects in lextensive categories*, J. Pure Appl. Algebra **183** (2003), 27–43.
- [CPP92] A. Carboni, M. C. Pedicchio, and N. Pirovano, *Internal graphs and internal groupoids in Mal'cev categories*, Proceedings of Conf. Category Theory 1991, Montreal, Am. Math. Soc. for the Canad. Math. Soc., Providence, 1992, pp. 97–109.
- [GJU14] M. Gran, G. Janelidze, and A. Ursini, *Weighted commutators in semi-abelian categories*, J. Algebra **397** (2014), 643–665.
- [Hig56] P. J. Higgins, *Groups with multiple operators*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **6** (1956), no. 3, 366–416.
- [HL13] M. Hartl and B. Loiseau, *On actions and strict actions in homological categories*, Theory Appl. Categ. **27** (2013), no. 15, 347–392.
- [Huq68] S. A. Huq, *Commutator, nilpotency and solvability in categories*, Q. J. Math. **19** (1968), no. 2, 363–389.
- [HVdL13] M. Hartl and T. Van der Linden, *The ternary commutator obstruction for internal crossed modules*, Adv. Math. **232** (2013), no. 1, 571–607.
- [JMU07] G. Janelidze, L. Márki, and A. Ursini, *Ideals and clots in universal algebra and in semi-abelian categories*, J. Algebra **307** (2007), 191–208.
- [Lod82] J.-L. Loday, *Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups*, J. Pure Appl. Algebra **24** (1982), 179–202.
- [Mac98] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, second ed., Grad. Texts in Math., vol. 5, Springer, 1998.
- [Mag67] R. Magari, *Su una classe equazionale di algebre*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **75** (1967), 277–312.
- [Man12] S. Mantovani, *The Ursini commutator as normalized Smith–Pedicchio commutator*, Theory Appl. Categ. **27** (2012), 174–188.
- [MF08a] N. Martins-Ferreira, *Low-dimensional internal categorical structures in weakly Mal'cev sesquicategories*, Ph.D. thesis, University of Cape Town, 2008.
- [MF08b] ———, *Weakly Mal'cev categories*, Theory Appl. Categ. **21** (2008), no. 6, 91–117.
- [MFMUVdL15] N. Martins-Ferreira, A. Montoli, A. Ursini, and T. Van der Linden, *What is an ideal a zero-class of?*, Pré-Publicações DMUC **15-05** (2015), 1–14.
- [MFVdL12] N. Martins-Ferreira and T. Van der Linden, *A note on the “Smith is Huq” condition*, Appl. Categ. Structures **20** (2012), no. 2, 175–187.
- [MFVdL14] ———, *A decomposition formula for the weighted commutator*, Appl. Categ. Structures **22** (2014), 899–906.
- [MM10] S. Mantovani and G. Metere, *Normalities and commutators*, J. Algebra **324** (2010), no. 9, 2568–2588.
- [Ped95] M. C. Pedicchio, *A categorical approach to commutator theory*, J. Algebra **177** (1995), 647–657.
- [Smi76] J. D. H. Smith, *Mal'cev varieties*, Lecture Notes in Math., vol. 554, Springer, 1976.
- [Urs72] A. Ursini, *Sulle varietà di algebre con una buona teoria degli ideali*, Boll. Unione Mat. Ital. **4** (1972), no. 6, 90–95.