EPL	
S7 : mars 2019	*Méthodes numériques*
LEPL1104	**Solution**

La quadrature d'Aang

Pour calculer une intégrale d'une fonction $u(x)$ mystérieuse sur $[0,1]$, Aang dispose d'une quadrature magique :

$$\int_0^h u(x)\ dx\ \approx\ h\Big(\alpha\ U_0 + \beta\ U_{h/4}\Big)$$

Malencontreusement, Aang a oublié les valeurs de α et β. Pour effectuer son intégrale, Aang divise l'intervalle $[0,1]$ en n sous-intervalles égaux de longueur h avec $h = 1/n$. Sur chaque sous-intervalle, il va utiliser la quadrature magique. En utilisant 5 et 10 sous-intervalles, Aang pourra ainsi obtenir I_{2h} et I_h comme estimations de l'intégrale I de $u(x)$ sur $[0,1]$ avec $h = \frac{1}{10}$.

Aang ignore tout de la fonction $u(x)$ à intégrer, mais il connaît des constantes C_i qui bornent les valeurs absolues de la dérivée i-ème sur l'intervalle $[0,1]$.

1. Déterminer α et β afin que cette quadrature soit exacte pour tout polynôme de degré un.

   On considère tout simplement l'intégration d'un polynôme quelconque $u(x) = ax + b$:

$$\int_0^h ax + b\ dx \quad = \quad h\Big(\alpha\ b + \beta\ (a\frac{h}{4} + b\Big) \qquad \forall\ a,b$$

$$\downarrow$$

$$a\ \frac{h^2}{2} + b\ h \quad = \quad a\ \beta\frac{h^2}{4} + b(\alpha+\beta)\ h \qquad \forall\ a,b$$

On conclut immédiatement :
$$\boxed{\begin{array}{rcr} \alpha & = & -1 \\ \beta & = & 2 \end{array}}$$

Pas mal d'étudiants n'arrivent pas à obtenir ces deux coefficients, alors que ce calcul est assez élémentaire et est évidemment essentiel pour répondre aux questions suivantes. Observez que $\alpha+\beta = 1$: ce qui était bien la condition requise pour intégrer un polynôme constant : un beaucoup trop grand nombre d'étudiants obtiennent des coefficients qui ne satisfont pas cette condition élémentaire... C'est totalement impardonnable. Quelques étudiants décident unilatéralement de prendre une règle des trapèzes : c'est faire preuve de beaucoup de liberté avec l'énoncé et cela n'est évidemment pas pardonnable, non plus !

Il est donc essentiel de passer suffisamment de temps sur cette première sous-question (facile !) avant de rédiger n'importe quoi pour la suite !

2. Ecrire le développement de Taylor d'ordre cinq autour de l'origine pour estimer $u(h/4)$.

   On écrit tout simplement

$$u(\frac{h}{4}) = U_0 + \frac{h}{4}\ U_0^{'} + \frac{h^2}{2\times 4^2}\ U_0^{''} + \frac{h^3}{6\times 4^3}\ U_0^{'''} + \frac{5^4}{24\times 4^4}\ U_0^{''''} + \frac{h^5}{120\times 4^5}\ U_0^{'''''} \ldots$$

   Comme vous disposiez exceptionnellement d'un calculatrice, il était possible de calculer tous les coefficients, quoique ce n'était pas explicitement demandé :-) En outre, cela ne servait strictement à rien de calculer 120×4^5 : oui, c'est un gros nombre et alors ? Cette question était vraiment simple, mais il faut impérativement écrire le développement requis, pas juste le développement de $u(x)$ à l'origine ou le développement de $u(0)$ autour de x... Cette question est aussi un peu perfide, car certains étudiants en ont déduit de manière abusive que l'ordre de précision devrait être proche de cinq : quatre ou six par exemple. Ce genre d'analyse psychologique de l'interrogateur doit être effectuée avec délicatesse : ici, vous verrez, l'ordre cinq est totalement arbitraire et la méthode d'Aang bien mal foutue au passage ne sera pas aussi précise.

3. Déduire l'expression analytique d'une borne du terme d'erreur $I - I_h$
   de la méthode composite de Aang en fonction de h et C_i.

   Dans une première étape, on intégre le développement de Taylor $u(x)$ sur l'intervalle $[0,h]$.

$$\begin{aligned}\int_0^h u(x)dx &= \int_0^h U_0 + xU_0^{'} + \frac{x^2}{2}U_0^{''} + \frac{x^3}{6}U_0^{'''} + \frac{x^4}{24}U_0^{''''} + \ldots\ dx \\ &= h\ U_0 + \frac{h^2}{2}\ U_0^{'} + \frac{h^3}{6}\ U_0^{''} + \frac{h^4}{24}\ U_0^{'''} \ldots\end{aligned}$$

   Ensuite, on utilise le début du développement obtenu précédemment pour exprimer $U_{h/4}$.
   Non, non, il n'était pas nécessaire de mettre tous les termes jusqu'à l'ordre cinq !

$$\begin{aligned}h\Big[2U_{h/4} - U_0\Big] &= h\Big[\ 2U_0 + \frac{h}{2}\ U_0^{'} + \frac{h^2}{16}\ U_0^{''} + \frac{h^3}{192}U_0^{'''} \cdots - U_0\Big] \\ &= h\ U_0 + \frac{h^2}{2}\ U_0^{'} + \frac{h^3}{16}\ U_0^{''} + \frac{h^4}{192}\ U_0^{'''} \ldots\end{aligned}$$

   Pour obtenir l'erreur de la méthode composite d'Aang, il faut alors additionner toutes les erreurs sur chaque sous-intervalle et écrire :

$$I - I_h \quad < \quad \sum_{k=1}^{n} C_2\Big[\frac{h^3}{6} - \frac{h^3}{16}\Big] + C_3\Big[\frac{h^4}{24} - \frac{h^4}{192}\Big] \cdots$$

$$I - I_h \quad < \quad \sum_{k=1}^{n} C_2 h^3\Big[\frac{8-3}{48}\Big] + C_3 h^4\Big[\frac{8-1}{192}\Big] \cdots$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{Car le nombre d'intervalles } n = 1/h$$

$$I - I_h \quad < \quad \frac{5C_2h^2}{48} + \frac{7C_3h^3}{192} \cdots$$

On conclut finalement : $\boxed{I - I_h \quad = \quad \frac{5C_2h^2}{48}}$

La totalité de la difficulté de cette interrogation consistait à faire minutieusement cette question centrale. Si cela était fait avec soin, tout le reste était obtenu de manière quasi immédiate.

Notons toutefois que le calcul des termes en h^3 n'était utile que pour la toute dernière question réservée aux étudiants qui voulaient absolument obtenir le maximum : il n'était donc pas essentiel de consacrer immédiatement toute son énergie à calculer tous les termes en rouge...

4. Donner l'ordre de précision de la méthode composite de Aang.

On écrit simplement : $\boxed{\textit{L'ordre de la méthode composite d'Aang est deux !}}$

5. Ecrire une fonction `python` :

   `I = quadratureCompositeAang(u,n,alpha,beta)`

   qui divise $[0, 1]$ en n sous-intervalles égaux et qui utilise la quadrature magique
   à deux points dans chaque sous-intervalle pour calculer I_h.
   Il est totalement inutile de mettre des commentaires dans ce (très court) programme :-)

   Une implémentation possible est :

```
import numpy as np

def quadratureCompositeAang(u,n,alpha,beta):
  h = 1/n
  X = np.arange(0,n)*h
  return (alpha*np.sum(u(X)) + beta*np.sum(u(X+h/4)))*h
```

   Il n'est pas indispensable d'avoir le code le plus efficace, mais il doit être correct : ce qui est important est la gestion de la translation des abscisses sur chaque intervalle de la méthode composite. En général, la plupart des étudiants écrivent des choses totalement fantaisistes à cet égard ! Le code a été vectorisé en créant directement deux vecteurs avec toutes les abscisses, mais ce n'était pas vraiment indispensable :-) Utiliser `linspace` *n'était pas judicieux, car on ne souhaitait pas la dernière abscisse dans le tableau...*

6. Calculer γ et δ afin que la combinaison linéaire $I_{extr} = \gamma I_{2h} + \delta I_h$
   fournisse la meilleure estimation possible de l'intégrale exacte.

Comme il s'agit d'éliminer un terme d'ordre 2, on écrit : $\boxed{I_{extr} \quad = \quad \frac{\left(4I_h - I_{2h}\right)}{3}}$

L'erreur de cette extrapolation sera en $\mathcal{O}(h^3)$,
car il y a des termes impairs dûs au caractère non-symétrique
et totalement mal foutu de la formule d'An.

7. (***) Donner l'expression de l'erreur de I_{extr}.

   Il suffit de faire la combinaison linéaire des termes d'erreur en h^3 respectivement pour h et $2h$.

$$I - I_{extr} = C_3\Big[\frac{4}{3}\frac{7}{192}h^3 - \frac{1}{3}\frac{7}{192}(2h)^3\Big]$$

$$\downarrow$$

$$= C_3\Big[\frac{7}{3}\;\frac{8-4}{192}\Big]\;h^3 \;=\; -\frac{7}{144}\;h^3\;C_3$$

Et on conclut donc : $\boxed{E_{extr} \;=\; \frac{7}{144}\;h^3\;C_3}$

Si,si : quelques étudiants ont trouvé cette jolie fraction,
la question était nettement plus simple qu'en 2014 au passage :-)

La pondération (approximative) des sept sous-questions était respectivement $(4, 2, 3, 3, 2, 4, 3)$. *Avoir 10/20 n'est donc pas une performance très glorieuse, car quelques sous-questions sont vraiment élémentaires. L'interrogation était plutôt simple par rapport aux années précédentes : il n'y avait aucune astuce particulière et l'interrogation était fortement inspirée d'une question faite en séance d'exercices. Et pourtant, la moyenne est particulièrement basse !*

Malencontreusement, beaucoup d'étudiants n'arrivent même pas à obtenir les deux coefficients α *et* β*... Le nombre de feuilles blanches est aussi très interpellant : est-ce que l'interrogation de physique était vraiment plus facile ?*