FSA11-ARCH11 - T3 **Evaluation S10** 21 mai 2002	

Solution de tous les questionnaires de MATHEMATIQUES

Pour les questions contenant des affirmations, il vous faut indiquer ci-dessous quelles affirmations sont vraies et lesquelles sont fausses. Vous reporterez ensuite vos réponses sur le formulaire pour le traitement par lecture optique. Respectez les consignes pour cocher une case. Sachez aussi que répondre correctement pour la moitié des affirmations ne signifie pas que vous obtiendrez la moitié des points.

Question 1 (ARCH11) : Matlab (Durée indicative 15 minutes)

(a) On souhaite résoudre le système suivant au moyen de Matlab : $\begin{array}{rcl} 4x - y - 2 & = & 0 \\ 3x + y - 5 & = & 0 \end{array}$

```
A = [ 4 -1; 3 1 ];
B = [ 2  5 ];
```

Quel est la meilleure instruction en termes de précision et d'efficacite afin d'obtenir la solution (x, y) dans le vecteur `X` ?

1.1.	`X = inv(A) * B'`	**1.1.**	☐
1.2.	`X = A \ B'`	**1.2.**	■
1.3.	`X = B - A`	**1.3.**	☐
1.4.	`X = sqrt(A) / B`	**1.4.**	☐
1.5.	`X = solve(A)`	**1.5.**	☐

(b) Adrien a écrit un programme MatLab pour calculer des termes de la suite de Fibonacci.

```
function f = fibo(n)
if(n<=1) error('Argument incorrect'); end
f = zeros(1,n);
f(1:2) = [1 1];
for(i=3:n)
   f(i) = f(i-1)+f(i-2);
end
```

Les affirmations suivantes sont-elles exactes ?

			Vrai	Faux
1.6.	L'instruction `f = zeros(1,n)` crée une matrice de taille $n \times n$ dont tous les éléments ont une valeur nulle.	**1.6.**	☐	■
1.7.	La fonction renvoie les n premiers termes de la suite définie par la relation de récurence $f(i) = f(i-1) + f(i-2)$ avec $f(1) = f(2) = 1$.	**1.7.**	■	☐
1.8.	La fonction `fibo` a comme argument le nombre `n` de termes à calculer.	**1.8.**	■	☐
1.9.	L'instruction `for (i=3:n)` définit une boucle où la variable `i` prend sucessivement les valeurs de $3, 4, 5, 6, 7 \cdots \leq n$.	**1.9.**	■	☐

FSA11-ARCH11 - T3 **Evaluation S10** 21 mai 2002	

Question 1 (FSA11) : Equations non-linéaires (Durée indicative 15 minutes)

(a) On demande de résoudre le système suivant par la méthode de Newton(-Raphson)[1] :

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - y - 1 &= 0 \\ x^2 + x + y^2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

En partant de la condition initiale $(1, 1)$, quelle sera la valeur obtenue après une itération de l'algorithme ?

1.1.	$[9/13, 5/13]$.	**1.1.**	☐
1.2.	$[10/13, 11/13]$	**1.2.**	■
1.3.	$[-3, -4]$	**1.3.**	☐
1.4.	$[16/13, 15/13]$	**1.4.**	☐
1.5.	$[18/169, -1/13]$	**1.5.**	☐

[1] A titre d'indication, la méthode de Newton-Raphson pour une équation scalaire peut être définie comme suit :

> On fournit x_0
>
> Tant que $\Delta x > \epsilon$, on calcule x_{i+1} à partir de x_i avec
>
> $$\begin{aligned} f'(x_i)\overbrace{(x_{i+1} - x_i)}^{\Delta x} &= -f(x_i) \\ x_{i+1} &= x_i + \Delta x \end{aligned}$$
>
> Si on converge, la solution x est le dernier x_{i+1} calculé

(b) Les affirmations suivantes sont-elles exactes ?

			Vrai	Faux
1.6.	La dominance des termes diagonaux de la matrice d'un système d'équations non-linéaires est une condition nécessaire à la convergence de l'algorithme de Jacobi.	**1.6.**	□	■
1.7.	Afin de trouver le maximum ou le minimum d'une fonction non-linéaire de plusieurs variables, chaque itération de l'algorithme de descente de gradient (méthode de la plus grande pente) requiert l'optimisation d'une fonction d'une seule variable.	**1.7.**	■	□
1.8.	Dans le cadre du calcul du maximum ou du minimum d'une fonction non-linéaire de plusieurs variables, la méthode de Newton résulte d'une approximation quadratique de la fonction à optimiser.	**1.8.**	■	□
1.9.	Dans le cadre du calcul du maximum ou du minimum d'une fonction non-linéaire de plusieurs variables, la méthode de Newton remplace l'optimisation de l'amplitude du saut par la résolution d'un système défini par la matrice Hessienne.	**1.9.**	■	□

FSA11-ARCH11 - T3 **Evaluation S10** 21 mai 2002	

Question 2 : Intégrales multiples (Durée indicative 20 minutes)

Soit la demi sphère homogène de rayon $R = 10cm$ et de densité $k = 6gr/cm^3$ définie par

$$B = \left\{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, 0 \leq z\right\}.$$

(a) Calculez J la valeur absolue du déterminant de la jacobienne lors du passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques :

$$\begin{array}{rcl} x & = & r \sin\phi \cos\theta \\ y & = & r \sin\phi \sin\theta \\ z & = & r \cos\phi \end{array}$$

2.1.	$J = r \sin\phi$	**2.1.**	☐
2.2.	$J = r \cos\phi$	**2.2.**	☐
2.3.	$J = r^2 \sin\phi$	**2.3.**	■
2.4.	$J = r^2 \cos\phi$	**2.4.**	☐
2.5.	$J = r \sin\theta$	**2.5.**	☐
2.6.	$J = r \cos\theta$	**2.6.**	☐
2.7.	$J = r^2 \sin\theta$	**2.7.**	☐
2.8.	$J = r^2 \cos\theta$	**2.8.**	☐

(b) Calculez

$$M = \int_B k\ dx\ dy\ dz$$

2.9.	$M = 8\pi\ kg$	**2.9.**	☐
2.10.	$M = 4\pi\ kg$	**2.10.**	■
2.11.	$M = \frac{2}{3}\pi\ kg$	**2.11.**	☐
2.12.	$M = \frac{4}{3}\pi\ kg$	**2.12.**	☐
2.13.	$M = 2\pi\ kg$	**2.13.**	☐
2.14.	$M = 6\pi\ kg$	**2.14.**	☐

(c) Calculez

$$d = \frac{\displaystyle\int_B k\ z\ dx\ dy\ dz}{\displaystyle\int_B k\ dx\ dy\ dz}$$

2.15.	$d = 23,00\ cm$	**2.15.**	☐
2.16.	$d = 10,00\ cm$	**2.16.**	☐
2.17.	$d = 8,75\ cm$	**2.17.**	☐
2.18.	$d = 6,75\ cm$	**2.18.**	☐
2.19.	$d = 5,00\ cm$	**2.19.**	☐
2.20.	$d = 4,75\ cm$	**2.20.**	☐
2.21.	$d = 3,75\ cm$	**2.21.**	■
2.22.	$d = 2,80\ cm$	**2.22.**	☐
2.23.	$d = 1,95\ cm$	**2.23.**	☐

FSA11-ARCH11 - T3 **Evaluation S10** 21 mai 2002	

Question 3 : Equations différentielles ordinaires (Durée indicative 15 minutes)

On considère le problème de Cauchy

> Trouver $u(x)$ tel que
>
> $$\left\{ \begin{array}{rcll} u'(x) & = & \underbrace{-\Big(u(x) \Big)^m + cos(x)}_{f(x,u(x))}, & x > 0 \\ u(0) & = & 0 & \end{array} \right.$$

où m un nombre entier impair. Soit h un paramètre positif donné, soit $X_i = hi, i = 0, 1, 2 \ldots, n$ et soit U_i une appoximation de $u(X_i)$.

(a) On souhaite, d'abord, utiliser la méthode numérique qui s'écrit sous la forme

$$U_{i+1} = U_i + h \underbrace{\left(-U_{i+1}^m + cos(X_{i+1}) \right)}_{F_{i+1}}$$

Pour cette méthode, les affirmations suivantes sont-elles exactes ?

			Vrai	Faux
3.1.	Cette méthode correspond à la méthode de Taylor d'ordre un.	**3.1.**	☐	■
3.2.	Cette méthode est implicite car elle ne permet pas d'obtenir de U_{i+1} directement à partir de U_i	**3.2.**	■	☐
3.3.	Pour calculer U_1, il faut calculer le zéro de la fonction $g(x) = x + hx^m - hcos(h)$.	**3.3.**	■	☐
3.4.	Pour calculer U_1, nous pourrions appliquer la méthode de Newton-Raphson afin de calculer le zéro de la fonction $g(x) = x + hx^m - hcos(h)$.	**3.4.**	■	☐
3.5.	Cette méthode est inconditionnellement stable.	**3.5.**	■	☐
3.6.	L'ordre de précision de ce schéma est deux.	**3.6.**	☐	■

N'oubliez pas de reporter sur la feuille pour lecture optique

(b) Appliquons maintenant la *méthode du trapèze* à notre problème :

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2} \underbrace{\left(-U_{i+1}^m + cos(X_{i+1}) - U_i^m + cos(X_i)\right)}_{F_{i+1}+F_i}$$

Pour cette méthode, les affirmations suivantes sont-elles exactes ?

			Vrai	Faux
3.7.	Cette méthode est inconditionnellement stable.	**3.7.**	■	□
3.8.	L'ordre de précision de cette méthode est deux.	**3.8.**	■	□
3.9.	Le diagramme de stabilité de cette méthode pour le problème $u' = \lambda u$ est donné par $\left\lvert \frac{(1+h\lambda/2)}{(1-h\lambda/2)} \right\rvert \leq 1$.	**3.9.**	■	□
3.10.	Cette méthode n'est pas implicite puisqu'on fait apparaître U_i dans le membre de droite comme dans la méthode d'Euler explicite.	**3.10.**	□	■
3.11.	Cette méthode n'est pas explicite puisqu'on fait apparaître U_{i+1} dans le membre de droite comme dans la méthode d'Euler implicite.	**3.11.**	■	□
3.12.	L'erreur locale d'intégration commise à chaque pas de temps est de l'ordre $\mathcal{O}(h^2)$.	**3.12.**	□	■

(c) Il est possible de donner diverses interprétations de la méthode du trapèze. Quelles sont les interprétations valides du calcul de U_{i+1} ?

			Vrai	Faux
3.13.	Pour obtenir U_{i+1}, on effectue une intégration numérique de la fonction f entre X_i et X_{i+1} en utilisant la méthode du trapèze.	**3.13.**	■	□
3.14.	On calcule U_{i+1} en appliquant une différence décentrée.	**3.14.**	□	■
3.15.	Pour obtenir U_{i+1}, on effectue une combinaison linéaire entre une méthode d'Euler explicite et une méthode d'Euler implicite.	**3.15.**	■	□
3.16.	Pour obtenir U_{i+1}, on effectue une intégration numérique de la fonction u entre X_i et X_{i+1} en utilisant la méthode du trapèze.	**3.16.**	□	■
3.17.	Pour obtenir U_{i+1}, on effectue une intégration numérique de la dérivée de la fonction u entre X_i et X_{i+1} en utilisant la méthode du trapèze.	**3.17.**	■	□
3.18.	Pour obtenir U_{i+1}, on intègre l'interpolation polynomiale de la fonction f passant par X_i et X_{i+1}.	**3.18.**	■	□

N'oubliez pas de reporter sur la feuille pour lecture optique