Solution du questionnaire de MATHEMATIQUES

Pour les questions contenant des affirmations, il vous faut indiquer ci-dessous quelles affirmations sont vraies et lesquelles sont fausses. Vous reporterez ensuite vos réponses sur le formulaire pour le traitement par lecture optique. Respectez les consignes pour cocher une case. Sachez aussi que répondre correctement pour la moitié des affirmations ne signifie pas que vous obtiendrez la moitié des points.

Question 1 : Extrémés (Durée indicative 10 minutes)

(a) Soit f une fonction continue définie sur une partie du plan :

$$D = \Big\{ (x, y) : \; -1 \leq x \leq 1, \; -1 \leq y \leq 1 \Big\}$$

Les affirmations suivantes sont-elles exactes ?

			Vrai	Faux
1.1.	La fonction f possède toujours un maximum absolu.	**1.1.**	■	□
1.2.	Si f possède un maximum absolu, ce maximum est unique.	**1.2.**	■	□
1.3.	Si f possède un maximum unique, ce maximum est toujours obtenu en un point unique.	**1.3.**	□	■

(b) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = (x + y - 1)(x + 2y - 3)$$

Les affirmations suivantes sont-elles exactes ?

			Vrai	Faux
1.4.	La fonction f admet un minimum local égal à 0 en un des points suivants $(2, 0)$, $(-1, 2)$, $(2, -1)$, $(3, 0)$.	**1.4.**	□	■
1.5.	La fonction f admet un extrémum local égal à 0 en un des points suivants $(2, 0)$, $(-1, 2)$, $(2, -1)$, $(3, 0)$.	**1.5.**	□	■
1.6.	L'ensemble $\{(2, 0), (2, -1), (3, -2)\}$ contient un point critique de f.	**1.6.**	□	■

(c) On considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Cette affirmation est-elle exacte ?

			Vrai	Faux
1.7.	Si les dérivées partielles de f existent au point (a, b) et sont toutes les deux bornées, alors le graphe de f admet un plan tangent au point $(a, b, f(a, b))$.	**1.7.**	□	■

N'oubliez pas de reporter sur la feuille pour lecture optique

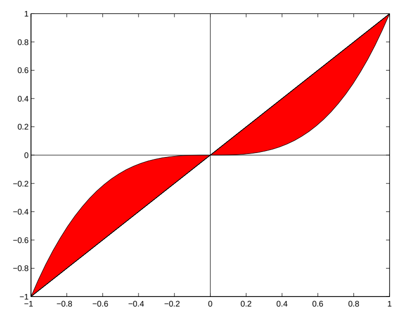
$\boxed{\textbf{Question 2 : Intégrales multiples}}$ (Durée indicative 20 minutes)

Soit A la partie du plan $\mathbb{R}^2$ comprise entre les courbes $y = x^3$ et $y = x$, $(-1 \leq x \leq 1)$.

(a) Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left[\int_{x^3}^{x} (x+1)y \, dy \right] dx$.

(b) Calculer $J = \displaystyle\int_A (x+1)y \, dx \, dy$.

(c) Trouver une fonction f telle que $\displaystyle\int_A f(x,y) dx \, dy = \underbrace{\int_{-1}^{1} \left[\int_{x^3}^{x} (x+1)y \, dy \right] dx}_{I}$.



$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} \left[\int_{x^3}^{x} (x+1)y \, dy \right] dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x+1) \left[\frac{y^2}{2} dy \right]_{y=x^3}^{y=x} dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x+1) \left(\frac{x^6}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx
\end{aligned}
$$

Les puissances impaires auront une contribution nulle...,

$$
= \int_{-1}^{1} \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^7}{2} + \dots \right) dx = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) = \frac{4}{21}
$$

$$
\begin{aligned}
J &= \int_A (x+1)y \, dx \, dy = \int_{-1}^{0} \left[\int_{x}^{x^3} (x+1)y \, dy \right] dx + \int_{0}^{1} \left[\int_{x^3}^{x} (x+1)y \, dy \right] dx \\
&= \int_{-1}^{0} (x+1) \left[\frac{y^2}{2} dy \right]_{y=x}^{y=x^3} dx + \int_{0}^{1} (x+1) \left[\frac{y^2}{2} dy \right]_{y=x^3}^{y=x} dx \\
&= \int_{-1}^{0} (x+1) \left(\frac{x^6}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_{0}^{1} (x+1) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{2} \right) dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left(\frac{x^7}{2} + \frac{x^6}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_{0}^{1} \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{2} - \frac{x^6}{2} \right) dx \\
&= \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{14} + \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{16} - \frac{1}{14} \right) = \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

Une telle fonction est : $f(x,y) = (x+1)|y|$

Question 3 : Intégration numérique (Durée indicative 25 minutes)

Introduisons trois nombres réels w_0, w_1, w_2 (les poids) ainsi que les trois abscisses suivantes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_0 & = & -\alpha, \\ X_1 & = & 0, \\ X_2 & = & \alpha. \end{array} \right.$$

où α un nombre réel donné tel que $0 < \alpha < 1$. Dans l'optique d'intégrer une fonction $u(x)$ définie sur l'intervalle $[-1, 1]$, nous introduisons finalement la formule de quadrature :

$$I^h = \sum_{i=0}^{2} w_i \, u(X_i) \tag{1}$$

(a) Trouver une expression des trois nombres w_0, w_1, w_2 en fonction de α de sorte de la formule de quadrature (1) soit telle que

$$I^h = \int_{-1}^{1} u(x)dx$$

si u est un polynôme quelconque de degré 2. Sur base de vos résultats, les affirmations suivantes sont-elles exactes ?

			Vrai	Faux
3.1.	$w_0 = w_1 = w_2$.	**3.1.**	☐	■
3.2.	$w_0 = w_2$	**3.2.**	■	☐
3.3.	$w_0 + w_1 + w_2 = 1$	**3.3.**	☐	■
3.4.	$w_0 = \frac{1}{3}$	**3.4.**	☐	■
3.5.	$w_0 = \frac{1}{3\alpha}$	**3.5.**	☐	■
3.6.	$w_1 = 2 - 2w_0$	**3.6.**	■	☐
3.7.	$w_0 = \frac{5\alpha^2}{3}$	**3.7.**	☐	■
3.8.	$w_1 = \frac{-2}{3\alpha^2} + 2$	**3.8.**	■	☐
3.9.	$w_1 = \frac{-2\alpha^2}{3} + 2$	**3.9.**	☐	■
3.10.	Avec les valeurs de poids trouvés, on a également $I^h = \int_{-1}^{1} u(x)dx$ si la fonction u est un polynôme quelconque de degré 3.	**3.10.**	■	☐

$w_0 + w_1 + w_2 = 2$ *afin de pouvoir intégrer correctement la fonction* $u(x) = 1$
$w_0 = w_2$ *afin de pouvoir intégrer correctement la fontion* $u(x) = x$
Il suffit alors de considérer l'intégration de la fonction $u(x) = x^2$

$$\int_{-1}^{1} x^2 \; dx = \frac{2}{3} = w_0\alpha^2 + w_2\alpha^2 = 2w_0\alpha^2 \quad \longrightarrow \quad w_0 = w_2 = \frac{1}{3\alpha^2} \;\; et \;\; w_1 = 2 - \frac{2}{3\alpha^2}$$

Notons que l'on intégre aussi exactement n'importe quel polynôme de degré 3 !

(b) Existe-t-il une valeur de α telle que la formule de quadrature soit exacte pour les polynômes de degré 4 ? Si oui, calculer α et sur base de votre résultat, les relations suivantes sont-elles exactes ?

			Vrai	Faux
3.11.	Il est impossible de trouver un tel α.	**3.11.**	□	■
3.12.	$\alpha = \sqrt{3/5}$.	**3.12.**	■	□
3.13.	$\alpha = \sqrt{1/3}$.	**3.13.**	□	■
3.14.	$\alpha = \sqrt{5/3}$.	**3.14.**	□	■
3.15.	$\alpha = \sqrt{3}$.	**3.15.**	□	■
3.16.	$\alpha = \frac{1}{2}$.	**3.16.**	□	■
3.17.	Avec la valeur de α trouvée, on a également $I^h = \int_{-1}^{1} u(x)dx$ si la fonction u est un polynôme quelconque de degré 5.	**3.17.**	■	□

Même principe ! Il suffit alors de considérer l'intégration de la fonction $u(x) = x^4$

$$\int_{-1}^{1} x^4 \; dx = \frac{2}{5} = w_0\alpha^4 + w_2\alpha^4 = \frac{2}{3\alpha^2}\alpha^4 \longrightarrow \alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Notons que l'on intégre aussi exactement n'importe quel polynôme de degré 5 !

(c) En utilisant la régle de quadrature que vous venez de définir en calculant α et les valeurs de w_0, w_1 et w_2, calculer une estimation I^h de l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{3x^2}{(4 - x^3)^2} dx$$

Sur base du résultat de votre calcul, les relations suivantes (pour les valeurs numériques, on considère seulement les 3 premiers chiffres derrière la virgule) sont-elles exactes ?

			Vrai	Faux
3.18.	Cette intégrale n'est pas définie.	**3.18.**	□	■
3.19.	$I^h = 2\dfrac{(16 + \alpha^6)}{(16 - \alpha^6)^2}$.	**3.19.**	■	□
3.20.	$I^h = 0,1302$.	**3.20.**	■	□
3.21.	$I^h = 0,1333$.	**3.21.**	□	■
3.22.	$I^h = \frac{2}{15}$.	**3.22.**	□	■

Il faut utiliser les résultats précédents et les appliquer

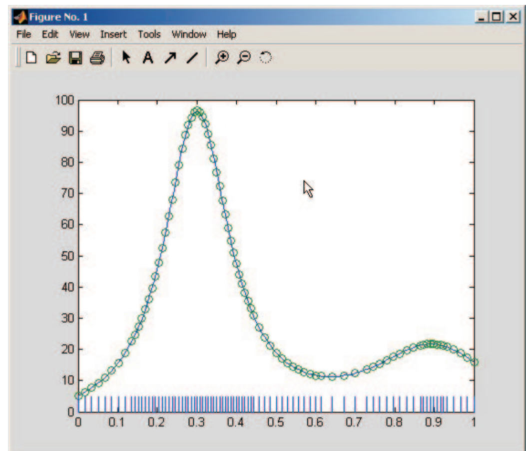
$$I^h = \frac{1}{3\alpha^2}\frac{3\alpha^2}{(4-\alpha^3)^2} + \frac{1}{3\alpha^2}\frac{3\alpha^2}{(4+\alpha^3)^2} = \frac{(4+\alpha^3)^2 + (4-\alpha^3)^2}{(16-\alpha^6)^2} = \frac{2(16+\alpha^6)}{(16-\alpha^6)^2}$$

On obtient $I^h = 0,1302$ *en prenant* $\alpha = \sqrt{3/5}$

Attention I^h *est une bonne approximation, mais n'est pas égale à l'intégrale exacte*

$I = \dfrac{2}{15} = 0,1333$ *!*

Question 4 : Matlab (Durée indicative 5 minutes)



Alphonse a écrit un nouveau programme...

```
function  test_s5()
global X;
X = [];
[I n] = quad('myhumps',0,1,0.00001,0)
x = linspace(0,1,100);
plot(x,humps(x),'-',X,humps(X),'o'); hold on;
for i=1:n
    plot([X(i) X(i)],[0 5],'-');
end

function y = myhumps(x)
global X;
y = humps(x);
X = [X x];
```

... et ensuite, il effectue les commandes suivantes :

```
>> test_s5
I =
   29.8583
n =
   85
>> help quad

 QUAD   Numerically evaluate integral, adaptive Simpson quadrature.
    Q = QUAD(FUN,A,B) tries to approximate the integral of function
    FUN from A to B to within an error of 1.e-6 using recursive
    adaptive Simpson quadrature.  The function Y = FUN(X) should
    accept a vector argument X and return a vector result Y, the
    integrand evaluated at each element of X.

    Q = QUAD(FUN,A,B,TOL) uses an absolute error tolerance of TOL
    instead of the default, which is 1.e-6.  Larger values of TOL
    result in fewer function evaluations and faster computation,
    but less accurate results.

    [Q,FCNT] = QUAD(...) returns the number of function evaluations.

    Use array operators .*, ./ and .^ in the definition of FUN
    so that it can be evaluated with a vector argument.

    See also QUADL, DBLQUAD...
>>
```

Sur base des informations fournies, dites quelles affirmations sont correctes

			Vrai	Faux
4.1.	Pour intégrer numériquement la fonction $\cos(x^2)$, il faudrait remplacer la ligne 12 par `y = cos(x^2)` .	**4.1.**	☐	■
4.2.	Pour intégrer numériquement la fonction $x^2 e^x$, il faudrait remplacer la ligne 12 par `y = (x.^2).*exp(x)`	**4.2.**	■	☐
4.3.	L'intégrale de la fonction `humps` entre 0 et 1 vaut $29,8583$ avec une précision relative de 10^{-5}	**4.3.**	■	☐
4.4.	Pour intégrer un polynôme de degré trois, la fonction `quad` pourrait se contenter de n'utiliser que 3 évaluations du polynôme. Toutefois, en pratique, il en effectue davantage... car rien ne lui signale que la fonction à intégrer serait un tel polynôme.	**4.4.**	■	☐
4.5.	Il a été nécessaire d'évaluer 85 fois la fonction `humps` pour obtenir le résultat espéré.	**4.5.**	■	☐
4.6.	La figure indique la position des abcisses où on a calculé la fonction `humps` : la méthode adaptative va inclure davantage d'intervalles aux endroits où l'intégrand semble varier rapidement.	**4.6.**	■	☐
4.7.	Les lignes `global X` indiquent que la variable `X` est commune aux deux fonctions. Par défaut, toutes les variables de Matlab sont locales au sein de la fonction dans laquelle elles sont définies.	**4.7.**	■	☐
4.8.	Le vecteur `X` a une taille 100 à la fin de l'exécution du programme.	**4.8.**	☐	■
4.9.	Le vecteur `x` a une taille 100 à la fin de l'exécution du programme.	**4.9.**	■	☐

N'oubliez pas de reporter sur la feuille pour lecture optique