FSA11-ARCH11 S10 : mai 2003 Math	Nom : Prénom : NOMA :	Réservé au correcteur

Calcul analytique et numérique d'intégrales de volume

Karl et Vincent souhaitent évaluer le rapport $\overline{z} = \dfrac{M_z}{M}$ où $M = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} \rho \; dV$ et $M_z = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} \rho z \; dV$.

La constante ρ est un nombre réel positif, tandis que $\mathcal{C}$ est un cône de hauteur $h = 15\ cm$ et de rayon à la base $R = 10\ cm$. L'axe du cône est l'axe Oz et le sommet du cône est situé à l'origine. De manière plus formelle, le cône est défini par l'expression $\mathcal{C} = \Big\{(x, y, z) \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq \frac{R^2 z^2}{h^2} \text{ et } 0 \leq z \leq h\Big\}$.

Karl ne jure que par l'évaluation analytique et exacte des intégrales de volume. Par contre, Vincent souhaite procéder de manière numérique car il se souvient de la quadrature d'Hammer à trois points pour estimer numériquement une intégrale double sur un triangle $\mathcal{T}$ dont les sommets sont $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$:

$$\underbrace{\int_{\mathcal{T}} f(x, y) \; dx \; dy}_{I} \approx \underbrace{\sum_{k=1}^{3} w_k f(X_k, Y_k)}_{I^h}.$$

où les poids et points d'intégration sont donnés par

	X_k	Y_k	w_k
1	0.5	0.0	1/6
2	0.5	0.5	1/6
3	0.0	0.5	1/6

On vous demande :

1. De donner la valeur absolue du déterminant de la jacobienne lors du passage de coordonnées cartésiennes (x, y, z) aux coordonnées cylindriques (r, θ, z), en sachant que :

$$\begin{array}{rcl} x &=& r\cos(\theta) \\ y &=& r\sin(\theta) \\ z &=& z \end{array}$$

2. De calculer analytiquement M, M_z et $\overline{z}$ et d'en fournir une expression en termes de ρ et de π.
3. De démontrer que la formule de Hammer à trois points permet d'intégrer exactement n'importe quel polynôme à deux variables de degré deux (que l'on peut écrire sous la forme $a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy$ où les coefficients a, b, c, d, e, f sont des réels quelconques).
4. De modifier les poids et les points d'intégration pour intégrer une fonction sur un triangle dont les sommets sont $(0, 0)$, $(10, 15)$ et $(0, 15)$
5. D'utiliser ces poids et points pour estimer M, M_z et $\overline{z}$. avec la quadrature d'Hammer.
6. De proposer des unités et une interprétation physique plausible pour ρ M et $\overline{z}$.

Répondez à chaque sous-question et uniquement à ce qui est demandé. Soyez précis, rigoureux et concis. Toutefois, détaillez vos calculs afin de clairement montrer votre démarche. Pensez à encadrer les résultats principaux pour les mettre en évidence. L'orthographe et le soin de la copie sont aussi des éléments susceptibles d'influencer positivement ou négativement le correcteur.

Solution

1. Le déterminant du jacobien est

$$det \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r\underbrace{\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)}_{=1} = r$$

   et le volume élémentaire en coordonnées cylindriques est donc donné par $r\ dr\ d\theta\ dz$.

2. Calcul analytique des intégrales :

$$\begin{aligned} M &= 2\pi\rho\int_0^{15}\left(\int_0^{2z/3} rdr\right)dz \\ &= 2\pi\rho\int_0^{15}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2z/3} dr \\ &= \pi\rho\int_0^{15}\left(\frac{4z^2}{9}\right)dr \\ &= \pi\rho\left[\frac{4z^3}{27}\right]_0^{15} \\ &= \pi\rho\,(4\times 125) \;=\; 500\pi\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_z &= 2\pi\rho\int_0^{15} z\left(\int_0^{2z/3} r\ dr\right)dz \\ &= 2\pi\rho\int_0^{15} z\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2z/3} dz \\ &= \pi\rho\int_0^{15} z\left(\frac{4z^2}{9}\right)dr \\ &= \pi\rho\left[\frac{z^4}{9}\right]_0^{15} \\ &= \pi\rho\,(45\times 125) \;=\; 5625\pi\rho \end{aligned}$$

   ou encore...

$$\begin{aligned} M &= 2\pi\rho\int_0^{10} r\left(\int_{3r/2}^{15} dz\right)dr \\ &= 2\pi\rho\int_0^{10} r\left[\,z\,\right]_{3r/2}^{15} dr \\ &= 2\pi\rho\int_0^{10} r\left(15-\frac{3r}{2}\right)dr \\ &= 2\pi\rho\left[\frac{15r^2}{2}-\frac{r^3}{2}\right]_0^{10} \\ &= 2\pi\rho\left(\frac{1500}{2}-\frac{1000}{2}\right) \;=\; 500\pi\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_z &= 2\pi\rho\int_0^{10} r\left(\int_{3r/2}^{15} z\ dz\right)dr \\ &= 2\pi\rho\int_0^{10} r\left[\frac{z^2}{2}\right]_{3r/2}^{15} dr \\ &= \pi\rho\int_0^{10} r\left(225-\frac{9r^2}{4}\right)dr \\ &= \pi\rho\left[\frac{225r^2}{2}-\frac{9r^4}{16}\right]_0^{10} \\ &= \pi\rho\left(\frac{22500}{2}-\frac{90000}{16}\right) \;=\; 5625\pi\rho \end{aligned}$$

   On en conclut que $\boxed{\overline{z} \;=\; 11,25}$

3. Il faut montrer que $I = I^h$, quels que soient les coefficients a, b, c, d, e, f. Tout d'abord, nous calculons de manière analytique l'intégrale :

$$\begin{aligned}
I &= \frac{a}{2} + b\int_0^1 x \int_0^{1-x} \; dy\; dx + c\int_0^1 y \int_0^{1-y} \; dx\; dy \\
&\quad +d\int_0^1 x^2 \int_0^{1-x} \; dy\; dx + e\int_0^1 y^2 \int_0^{1-y} \; dx\; dy + f\int_0^1 x \int_0^{1-x} \; y\; dy\; dx \\
&= \frac{a}{2} + b\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + c\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 \\
&\quad +d\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + e\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 + f\left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}\right]_0^1 \\
&= \frac{a}{2} + \frac{b}{6} + \frac{c}{6} + \frac{d}{12} + \frac{e}{12} + \frac{f}{24}
\end{aligned}$$

Nous observons ensuite que l'application de la règle de quadrature de Hammer à trois points fournira exactement la même expression pour I^h. $\square$

4. Il suffit de considérer le changement de variable :

$$\begin{aligned}
x' &= 10x \\
y' &= 15 - 15y
\end{aligned}$$

La valeur absolue du déterminant du jacobien de la transformation est une constante qui vaut 150. On peut alors en déduire les points et poids d'intégration à utiliser pour intégrer une fonction sur le triangle dont les sommets sont $(0, 0)$, $(10, 15)$ et $(0, 15)$

	X'_k	Y'_k	w'_k
1	5.0	15.0	25
2	5.0	7.5	25
3	0.0	7.5	25

5. Comme on vient de le démontrer, l'application de la formule d'Hammer doit fournir la même solution que l'intégration analytique...

$$\begin{aligned}
M &= 2\pi\rho \int_\triangle r dA & M_z &= 2\pi\rho \int_\triangle rz dA \\
&= 2\pi\rho\; 25 \Big(\; 5 + 5 + 0 \;\Big) & &= 2\pi\rho\; 25 \Big(\; 5 \times 7,5 + 5 \times 15 + 0 \times 7,5 \;\Big) \\
&= 500\; \pi\rho & &= 5625\; \pi\rho
\end{aligned}$$

Notons, au passage, que Vincent a dû effectuer nettement moins d'algèbre calculatoire que Karl... Longue vie aux méthodes numériques !

6. En considérant que ρ est la masse volumique du cône exprimée en kg/cm^3, M serait la masse du cône exprimée en kg et $\overline{z}$ serait la composante en z du centre de masse exprimée en cm. Pour des raisons évidentes de symétrie, le centre de masse se situe sur l'axe Oz.