| **FSA11 - T3** <br> **Evaluation S5** <br> mars 2003 | |
|---|---|

# Solution du questionnaire de MATHEMATIQUES

*Pour les questions contenant des affirmations, il vous faut indiquer ci-dessous quelles affirmations sont vraies et lesquelles sont fausses. Vous reporterez ensuite vos réponses sur le formulaire pour le traitement par lecture optique. Respectez les consignes pour cocher une case. Sachez aussi que répondre correctement pour la moitié des affirmations ne signifie pas que vous obtiendrez la moitié des points.*

**Question 1 : Extrémés** (Durée indicative 15 minutes)

(a) Soit $f$ une fonction continue définie sur une partie du plan :

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \right\}$$

Les affirmations suivantes sont-elles exactes ?

| | | | Vrai | Faux |
|---|---|---|---|---|
| **1.1.** | La fonction $f$ possède toujours un minimum local. | **1.1.** | ■ | □ |
| **1.2.** | La fonction $f$ possède toujours un minimum absolu. | **1.2.** | ■ | □ |
| **1.3.** | Si $f$ possède un minimum local, ce minimum local est unique. | **1.3.** | □ | ■ |
| **1.4.** | Si f possède un minimum absolu, ce minimum absolu est unique. | **1.4.** | ■ | □ |
| **1.5.** | Si f possède un minimum absolu unique, ce minimum est obtenu en un point de la frontière de $D$. | **1.5.** | □ | ■ |

(b) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = (x + y - 2)(x + 3y - 4)$$

Les affirmations suivantes sont-elles exactes ?

| | | | Vrai | Faux |
|---|---|---|---|---|
| **1.6.** | L'ensemble $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ contient un point critique de $f$. | **1.6.** | ■ | □ |
| **1.7.** | L'ensemble $\{(2, 0), (7, -1), (-2, 3), (3, 0)\}$ contient un point critique de $f$. | **1.7.** | □ | ■ |
| **1.8.** | La matrice hessienne de $f$ est définie positive au point $(0, 0)$. | **1.8.** | □ | ■ |
| **1.9.** | La fonction $f$ admet un extremum local en $(1, 1)$. | **1.9.** | □ | ■ |

*N'oubliez pas de reporter sur la feuille pour lecture optique*

**Question 2 : Intégrales multiples** (Durée indicative 15 minutes)

Quelle est la valeur de l'intégrale double

$$I = \int_D x \, dx \, dy$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$ ?

**2.1.** $I = 4/3$

**2.2.** $I = 0$

**2.3.** $I = 10/3$

**2.4.** $I = 7/3$

**2.5.** $I = 8/3$

**2.6.** $I = 25/3$

**2.1.** ☐

**2.2.** ☐

**2.3.** ☐

**2.4.** ☐

**2.5.** ■

**2.6.** ☐

*N'oubliez pas de reporter sur la feuille pour lecture optique*

$$I = \int_{-1}^{1} \left( \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} x \, dx \right) dy$$

$$\Big\downarrow \textit{ En intégrant le long de } x \textit{ pour chaque } y$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=2\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} 2\left(1 - y^2\right) dy$$

$$\Big\downarrow \textit{ En intégrant le long de } y$$

$$= \left[ 2y - \frac{2y^3}{3} \right]_{y=-1}^{y=1} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

**Question 3 : Intégration numérique** (Durée indicative 25 minutes)

Nous souhaitons intégrer par voie numérique des intégrales de la forme suivante

$$I = \int_0^6 u(x)\ dx$$

où $u(x)$ est une fonction quelconque. Dans cette optique, nous divisons l'intervalle $[0,6]$ en $n$ sous-intervalles égaux de largeur $h$ et nous estimons la valeur de l'intégrale comme la somme pondérée des valeurs de la fonction au milieu de l'intervalle. De manière pratique, l'approximation numérique est donc donnée par l'expression suivante

$$I^h = \sum_{i=1}^{n} w_i u(X_i)$$

avec $X_i = ih - \frac{h}{2}$.

(a) Dans le cas où $n = 3$, trouver l'expression des poids $w_1$, $w_2$ et $w_3$ de manière à ce que la règle de quadrature intègre parfaitement un polynome de degré deux. Sur base du résultat de votre calcul, les affirmations suivantes sont-elles exactes ?

| | | | Vrai | Faux |
|---|---|---|---|---|
| **3.1.** | $w_1 = w_2 = w_3$ | **3.1.** | ☐ | ■ |
| **3.2.** | $w_1 = w_3$ | **3.2.** | ■ | ☐ |
| **3.3.** | $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ | **3.3.** | ☐ | ■ |
| **3.4.** | $w_1 = \frac{9}{4}$ | **3.4.** | ■ | ☐ |
| **3.5.** | $w_1 = \frac{3}{4}$ | **3.5.** | ☐ | ■ |
| **3.6.** | $w_2 = 6 - 2w_1$ | **3.6.** | ■ | ☐ |
| **3.7.** | $w_1 = \frac{15}{9}$ | **3.7.** | ☐ | ■ |
| **3.8.** | $w_2 = \frac{18}{12}$ | **3.8.** | ■ | ☐ |
| **3.9.** | $w_2 = 2w_1 = 2w_3$ | **3.9.** | ☐ | ■ |
| **3.10.** | Avec les valeurs de poids trouvées, on intègre également de manière exacte n'importe quel polynôme de degré trois sur l'intervalle $[0,6]$. | **3.10.** | ■ | ☐ |

*N'oubliez pas de reporter sur la feuille pour lecture optique*

*Pour obtenir les poids, il est astucieux de considérer l'intervalle $]-3,3[$, avant d'effectuer les intégrales, car une simple translation de l'intervalle ne modifie pas les poids.*

*Sur cet intervalle, on voit que $X_1 = -2$, $X_2 = 0$ et $X_3 = 2$ (avec $h = 2$ !) et on intègre les fonctions de Lagrange correspondantes :*

$$\begin{aligned}
w_1 &= \int_{-3}^{3} \frac{x(x-2)}{8}\,dx &&= \left[\frac{x^3}{24} - \frac{x^2}{16}\right]_{-3}^{3} &&= \frac{9}{4} \\
w_2 &= \int_{-3}^{3} \frac{(4-x^2)}{4}\,dx &&= \left[x - \frac{x^3}{12}\right]_{-3}^{3} &&= 6 - \frac{27}{6} = \frac{3}{2} \\
w_3 &= \int_{-3}^{3} \frac{x(x+2)}{8}\,dx &&= \left[\frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{16}\right]_{-3}^{3} &&= \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

*On observe bien que*

$$w_1 + w_2 + w_3 = \frac{(9+6+9)}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

*Ce qui est requis pour intégrer correctement une fonction constante ! La symétrie des deux poids $w_1$ et $w_3$ pouvait être directement déduite par un argument de symétrie des abscisses d'intégration...*

(b) Dans le cas ou l'on choisit $w_i = h$ (méthode dite de Poncelet), trouver une expression qui permette de déterminer une borne supérieure de la valeur absolue de l'erreur $E^h = I - I^h$. Sur base de votre résultat, les affirmations suivantes sont-elles exactes ?

| | | | Vrai | Faux |
|---|---|---|---|---|
| **3.11.** | La méthode de Poncelet permet d'intégrer exactement n'importe quel polynôme de degré deux. | **3.11.** | ☐ | ■ |
| **3.12.** | La méthode de Poncelet permet d'intégrer exactement n'importe quel polynôme de degré un. | **3.12.** | ■ | ☐ |
| **3.13.** | Sur chaque intervalle, la fonction à intégrer est approchée par une fonction constante dans cette méthode. | **3.13.** | ■ | ☐ |
| **3.14.** | L'erreur locale commise sur chaque intervalle est un terme en $\mathcal{O}(h^3)$. | **3.14.** | ■ | ☐ |
| **3.15.** | La valeur absolue de l'erreur d'intégration est bornée par l'expression $\frac{C_2 h^2}{4}$ où $C_2$ majore la valeur absolue de la dérivée seconde de la fonction à intégrer. | **3.15.** | ■ | ☐ |
| **3.16.** | La valeur absolue de l'erreur d'intégration est bornée par l'expression $\frac{C_1 h}{24}$ où $C_1$ majore la valeur absolue de la dérivée première de la fonction à intégrer. | **3.16.** | ☐ | ■ |
| **3.17.** | Cette méthode intègre parfaitement n'importe quel polynôme ne comportant que des termes impairs, puisque l'intégration de termes de degré impair sur un intervalle symétrique vaut toujours zéro. | **3.17.** | ☐ | ■ |

*Pour estimer l'erreur locale sur un intervalle, il suffit d'effectuer une développement en série de Taylor en chaque point de l'intervalle d'intégration...*

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-h/2}^{h/2} u(x)dx \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} u(0) \, + x\, u'(0) \, + ... \, dx
\end{aligned}
$$

En observant que l'intégrale du terme linéaire sera nulle..
En définissant $C_2$ comme une borne supérieure de $|u''(x)|$ sur l'intervalle

$$
\begin{aligned}
|I - I_h| &\leq \int_{-h/2}^{h/2} \frac{x^2}{2} C_2 \; dx \\
&\leq \frac{h^3 C_2}{24}
\end{aligned}
$$

*L'erreur globale commise sur* $n = \dfrac{6}{h}$ *intervalles est donc* $\boxed{|E^h| \leq \dfrac{h^2 C_2}{4}}$

*La méthode intègre parfaitement n'importe quel polynôme de degré un et est légèrement plus avantageuse que la méthode des trapèzes (une estimation de moins de la fonction). Il s'agit par contre d'une méthode ouverte et non d'une méthode fermée comme celle des trapèzes.*

*Noter que la dernière affirmation ne serait vraie que pour un intervalle symétrique. Une affirmation correcte serait de dire qu'une règle d'intégration sur un intervalle quelconque qui intégre exactement n'importe quel polynôme de degré* $2n$*, intègrere exactement n'importe quel polynôme de degré* $2n+1$*. Bon, je reconnais, cette affirmation là était un peu vicieuse.... Mais, on sentait bien que c'était pas possible, non !*

(c) En utilisant la régle de quadrature de Poncelet avec $n$ points, obtenir une expression qui majore la valeur absolue de l'erreur d'intégration $E^h = I - I^h$ pour l'estimation numérique l'intégrale suivante [1]:

$$I = \int_0^6 \exp(-x^2) dx$$

Sur base de vos conclusions, les relations suivantes sont-elles exactes pour l'intégrale ci-dessus ?

[1] Juste en passant, il peut être astucieux de regarder la figure de la dernière question afin de trouver la solution de cette question... Mais ce n'est pas indispensable, bien sûr !

| | | | Vrai | Faux |
|---|---|---|---|---|
| **3.18.** | Il est impossible d'estimer une quelconque borne. | **3.18.** | □ | ■ |
| **3.19.** | $\lvert E^h \rvert \leq \frac{h^2}{24}$. | **3.19.** | □ | ■ |
| **3.20.** | $\lvert E^h \rvert \leq \frac{nh^3}{12}$. | **3.20.** | ■ | □ |
| **3.21.** | $\lvert E^h \rvert \geq \frac{h^2}{128}$. | **3.21.** | □ | ■ |
| **3.22.** | $\lvert E^h \rvert \leq \frac{h^2}{2}$. | **3.22.** | ■ | □ |

*Il suffit d'estimer $C_2$ !*

$$
\begin{aligned}
u'(x) &= -2x\exp(-x^2)\\
u''(x) &= (4x^2-2)\exp(-x^2)
\end{aligned}
$$

*La figure d'Alphonse permet d'observer immédiatement que $C_2 = 2$. On peut alors déduire*

$$\boxed{0 \leq \lvert E^h \rvert \leq \frac{h^2}{2} = \frac{nh^3}{12}}\ .$$

**Question 4 : Matlab** (Durée indicative 5 minutes)

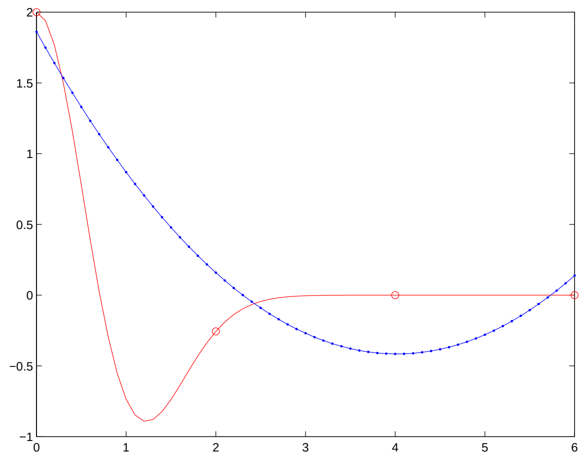
Alphonse a écrit un nouveau programme...

```
function  test_s5()

x = 0:0.1:6;
u = youps(x);
X = [0 2 4 6];
U = youps(X);
uh = polyval(polyfit(X,U,2),x);
plot(x,u,'-r',x,uh,'.-',X,U,'or');

function y = youps(x)

y = - exp(-x.*x).*(4*x.*x-2);
```




... et ensuite, il effectue les commandes suivantes :

```
>> test_s5
>> help polyfit

 POLYFIT Fit polynomial to data.
    POLYFIT(X,Y,N) finds the coefficients of a polynomial P(X) of
    degree N that fits the data, P(X(I))~=Y(I), in a least-squares sense.

    Warning messages result if N is >= length(X), if X has repeated, or
    nearly repeated, points, or if X might need centering and scaling.

    See also POLY, POLYVAL, ROOTS.

>>help polyval
 POLYVAL Evaluate polynomial.
    Y = POLYVAL(P,X), when P is a vector of length N+1 whose elements
    are the coefficients of a polynomial, is the value of the
    polynomial evaluated at X.

        Y = P(1)*X^N + P(2)*X^(N-1) + ... + P(N)*X + P(N+1)

    If X is a matrix or vector, the polynomial is evaluated at all
    points in X.  See also POLYVALM for evaluation in a matrix sense.

   See also POLYFIT, POLYVALM.
```

Sur base des informations fournies, dites quelles affirmations sont correctes

| | | | Vrai | Faux |
|---|---|---|---|---|
| **4.1.** | On recherche le polynôme du second degré $u^h$ qui minimise $$\int_0^6 (u(x) - u^h(x))^2 dx$$ pour la fonction $u(x) = -\exp(-x^2)(4x^2 - 2)$. | **4.1.** | ☐ | ■ |
| **4.2.** | On calcule une interpolation polynomiale du second degré de $u(x) = -\exp(-x^2)(4x^2 - 2)$. | **4.2.** | ☐ | ■ |
| **4.3.** | En exécutant ce programme, on a résolu un système linéaire à trois inconnues. | **4.3.** | ■ | ☐ |
| **4.4.** | En remplacant la ligne 5 par `X = [0 2 6];`, on obtiendrait une interpolation polynomiale sur la figure. | **4.4.** | ■ | ☐ |
| **4.5.** | Si on souhaite travailler avec la fonction $cos(x^2)$, il faudrait remplacer la ligne 12 par `y = cos(x*x);`. | **4.5.** | ☐ | ■ |
| **4.6.** | La figure présente en trait continu la fonction à interpoler en la représentant par une succession de petits segments de droites : la courbe qui apparaît à l'écran n'est rien d'autre qu'une interpolation linéaire par morceaux sur 60 intervalles et non la fonction elle-même. | **4.6.** | ■ | ☐ |
| **4.7.** | Le vecteurs `u` et `uh` ont la même taille à la fin de l'exécution du programme. | **4.7.** | ■ | ☐ |
| **4.8.** | Le vecteur `x` a une taille 60 à la fin de l'exécution du programme. | **4.8.** | ☐ | ■ |
| **4.9.** | Le vecteur `U` a une taille 4 à la fin de l'exécution du programme. | **4.9.** | ■ | ☐ |

*N'oubliez pas de reporter sur la feuille pour lecture optique*