FSA11-ARCH11	
S5 : mai 2004	*Mathématiques et méthodes numériques*
Math	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

Calcul analytique et numérique d'intégrales doubles

Michel et Vincent souhaitent évaluer l'intégrale double

$$I = \int_{\mathcal{C}} xy \; dx \; dy$$

où $\mathcal{C}$ est le quart de disque, de rayon unitaire, centré à l'origine et situé dans le premier quadrant. Nous noterons l'origine $O = (0, 0)$ et définissons les trois points $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ et C le milieu de l'arc de cercle délimitant le domaine $\mathcal{C}$.

Michel préfère, de loin, utiliser l'évaluation analytique des intégrales doubles. Par contre, Vincent souhaite procéder de manière numérique car il connait la quadrature d'Hammer à trois points pour estimer numériquement une intégrale double sur un triangle OAB :

$$\underbrace{\int_{OAB} f(x, y) \; dx \; dy}_{J} \approx \underbrace{\sum_{k=1}^{3} w_k f(X_k, Y_k)}_{J^h}.$$

où les poids et points d'intégration sont donnés par

	X_k	Y_k	w_k
1	0.5	0.0	1/6
2	0.5	0.5	1/6
3	0.0	0.5	1/6

On vous demande :

1. De donner la valeur absolue du déterminant de la jacobienne lors du passage de coordonnées cartésiennes (x, y) aux coordonnées polaires (r, θ).
2. De calculer analytiquement I.
3. D'utiliser la quadrature de Hammer pour calculer $I_\Delta = \displaystyle\int_{OAB} xy \; dx \; dy$
4. De fournir l'erreur commise par l'utilisation de la règle de Hammer pour le calcul de I_Δ.
5. De modifier les poids et les points d'intégration de la quadrature de Hammer pour intégrer une fonction sur un triangle dont les sommets sont $(0, 0)$, (a, b) et (c, d)
6. D'utiliser la quadrature de Hammer pour calculer $I_{\Delta/2} = \displaystyle\int_{OAC} xy \; dx \; dy + \int_{OCB} xy \; dx \; dy$
7. De proposer une combinaison linéaire de I_Δ et $I_{\Delta/2}$ afin d'obtenir la meilleure estimation de I, en sachant que I_Δ et $I_{\Delta/2}$ peuvent être vues comme des estimations de I dont l'erreur est de l'ordre du carré des cordes AB et AC respectivement. Justifier votre réponse.

Répondez à chaque sous-question et uniquement à ce qui est demandé. Soyez précis, rigoureux et concis. Toutefois, détaillez vos calculs afin de clairement montrer votre démarche. Pensez à encadrer les résultats principaux pour les mettre en évidence. L'orthographe et le soin de la copie sont aussi des éléments susceptibles d'influencer positivement ou négativement le correcteur.

Solution

1. Sachant que le passage de coordonnées cartésiennes (x, y) aux coordonnées polaires (r, θ), est donné par :

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\cos(\theta) \\ y & = & r\sin(\theta) \end{array}$$

   le déterminant du jacobien est

$$det \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix} = r \underbrace{\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)}_{=1} = r$$

   et la surface élémentaire en coordonnées polaire est donc donné par $r\ dr\ d\theta$.

2. Calcul analytique de l'intégrale double (deux solutions possibles) :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \overbrace{r\cos(\theta)}^{x}\ \overbrace{r\sin(\theta)}^{y}\ \overbrace{rdrdz}^{dxdy} \\ &= \int_0^1 r^3 \left(\frac{\sin(2\theta)}{2} d\theta \right) dr \\ &= \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \left(\frac{\sin(2\theta)}{2} d\theta \right) \\ &= \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} \left[-\frac{\cos(2\theta)}{4} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \ = \ \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\ dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x \left[\int \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \ = \ \frac{1}{8} \end{aligned}$$

3. L'application de la règle de Hammer fournit le résultat :

$$I_\Delta = \int_{OAB} xy\ dx\ dy = \frac{1}{6}\left(0 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{24}$$

4. L'évaluation de I_Δ par la règle de Hammer fournit un résultat exact. On peut le vérifier en calculant analytiquement l'intégrale !

5. Il suffit de considérer le changement de variable :

$$\begin{array}{rcl} x' & = & ax + cy \\ y' & = & bx + dy \end{array}$$

   La valeur absolue du déterminant du jacobien de la transformation est une constante qui vaut $J = |ad - bc|$. On peut alors en déduire les points et poids d'intégration à utiliser pour intégrer une fonction sur le triangle dont les sommets sont $(0, 0)$, (a, b) et (c, d)

	X'_k	Y'_k	w'_k
1	a/2	b/2	$J/6$
2	(a+c)/2	(b+d)/2	$J/6$
3	c/2	d/2	$J/6$

6. Les coordonnées du point C sont évidemment $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Il est alors possible d'utiliser le résultat précédent pour évaluer les deux intégrales. Le jacobien de la transformation vaut dans les deux cas $1/\sqrt{2}$.

   - $\displaystyle\int_{OAC} xy\ dx\ dy = \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(0 + \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)\right) = \frac{1}{24}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$
   - $\displaystyle\int_{OCB} xy\ dx\ dy = \int_{OAC} xy\ dx\ dy$ (par symétrie !)

   On obtient finalement $\boxed{I_{\Delta/2} \quad = \quad \frac{1}{24}\left(1+\sqrt{2}\right)}$.

7. Sachant que I_Δ et que $I_{\Delta/2}$ sont des approximations dont les erreurs sont proportionnelles au carré des cordes AB et AC, on note h comme longueur de la corde correspondante et on en calcule le carré pour obtenir les facteurs de pondération de l'extrapolation...

$I_\Delta \ = \ \frac{1}{24}$	$h \ = \ \sqrt{2}$	$h^2 \ = \ 2$
$I_{\Delta/2} \ = \ \frac{1}{24}\left(1+\sqrt{2}\right)$	$h \ = \ \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \ = \ \sqrt{2-\sqrt{2}}$	$h^2 \ = \ 2-\sqrt{2}$

   Il est alors possible d'utiliser l'esprit de l'extrapolation de Richardson et d'effectuer la combinaison linéaire suivante :

$$\begin{aligned}\left(\frac{2I_{\Delta/2} - (2-\sqrt{2})I_\Delta}{2-(2-\sqrt{2})}\right) \quad &= \quad \frac{1}{24}\left(\frac{2\times(1+\sqrt{2}) - (2-\sqrt{2})\times 1}{2-(2-\sqrt{2})}\right)\\ &= \quad \frac{1}{24}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad = \quad \frac{1}{8}\end{aligned}$$

   On obtient le résultat exact ! Notons que ceci est un heureux hasard numérique. En appliquant exactement la même technique pour le calcul de π, cela ne fournira qu'une estimation numérique de précision de $\mathcal{O}(h^3)$...