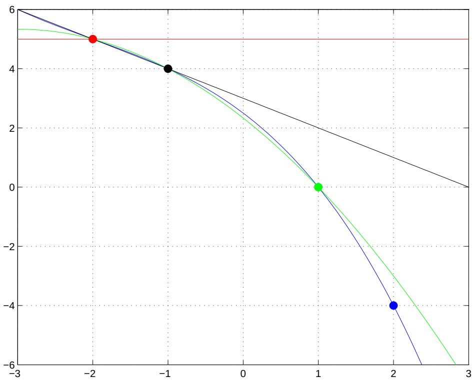
FSA12-ARCH12	
S7 : octobre 2005	*Méthodes numériques*
FSAB1104	**Solution**



Polynômes de Newton

	X_i	U_i
0	-0.02	0.05
1	-0.01	0.04
2	0.01	0.00
3	0.02	-0.04

Il s'agit d'estimer la valeur à l'origine d'une fonction u à partir de quatre points (X_i, U_i) entourant la donnée manquante. Quatre interpolations polynômiales différentes, $u_0(x), u_1(x), u_2(x)$ et $u_3(x)$, ont été obtenues en effectuant des combinaisons linéaires des polynômes de Newton :

$$u_n(x) = \sum_{i=0}^{n} D_{0,i}\ \phi_i(x)$$

avec $\phi_0(x) = 1$ et $\phi_i(x) = (x - X_0)(x - X_1)\dots(x - X_{i-1})$. Les coefficients $D_{0,i}$ sont les différences divisées définies par la relation de récurence :

$$D_{j,0} = u(X_j), \qquad D_{j,1} = \frac{(D_{j+1,0} - D_{j,0})}{(X_{j+1} - X_j)}, \qquad \dots \qquad D_{j,i} = \frac{(D_{j+1,i-1} - D_{j,i-1})}{(X_{j+i} - X_j)}.$$

On vous demande :

1. De calculer $u_0(0)$, $u_1(0)$, $u_2(0)$ et $u_3(0)$.

   Pour obtenir le résultat demandé, il est nettement plus astucieux de multiplier les abscisses et les ordonnées par un facteur 100 et d'ensuite diviser le résultat obtenu par ce même facteur[1]*. Il faut, tout d'abord, évaluer les différences divisées :*

j	$D_{j,0}$	$D_{j,1}$	$D_{j,2}$	$D_{j,3}$
0	5	-1	$-1/3$	$-1/12$
1	4	-2	$-2/3$	
2	0	-4		
3	-4			

et ensuite écrire :

$$\begin{array}{lcrcrcrcrcl}
u_0(0) & = & & & D_{0,0}\ \phi_0(0) & = & & & 5 \times 1 & = & 5 \\
u_1(0) & = & u_0(0) & + & D_{0,1}\ \phi_1(0) & = & 5 & - & 1 \times (0+2) & = & 3 \\
u_2(0) & = & u_1(0) & + & D_{0,2}\ \phi_2(0) & = & 3 & - & 1/3 \times (0+2)(0+1) & = & 7/3 \\
u_3(0) & = & u_2(0) & + & D_{0,3}\ \phi_3(0) & = & 7/3 & - & 1/12 \times (0+2)(0+1)(0-1) & = & 30/12 \ = \ 10/4
\end{array}$$

[1]C'est exactement la même idée qu'exploite le physicien lorqu'il résout un problème exprimé en mètres en convertissant les données en centimètres, pour avoir des nombres plus faciles à manipuler !

En n'omettant pas de convertir les résultats dans les unités adéquates, on obtient[2] *:*

$$\boxed{\begin{array}{rcll} u_0(0) & = & 5.0000 & 10^{-2} \\ u_1(0) & = & 3.0000 & 10^{-2} \\ u_2(0) & = & 2.4167 & 10^{-2} \\ u_3(0) & = & 2.5000 & 10^{-2} \end{array}}$$

2. D'expliquer pourquoi l'erreur d'interpolation $e_n(x) = u(x) - u_n(x)$ peut être estimée par l'expression suivante $u_{n+1}(x) - u_n(x)$. Est-ce que cette estimation de l'erreur sera toujours fiable ?

   On sait que l'erreur d'interpolation est fournie par l'expression :

$$e_n(x) = \frac{u^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\ (x - X_0)(x - X_1)(x - X_2)\cdots(x - X_n).$$

   Comme $u_{n+1}(x) - u_n(x) = D_{0,n+1}\ (x - X_0)(x - X_1)(x - X_2)\cdots(x - X_n)$*, il faut seulement se convaincre que* $D_{0,n+1}$ *pourrait être considérée une estimation de* $(n+1)!\ u^{(n+1)}(X_0)$*, à défaut de pouvoir identifier l'abscisse* ξ*... Pour des abscisses équidistantes*[3]*, on observe :*

$$\begin{array}{lclcll} D_{0,1} & = & (D_{1,0} - D_{0,0})/h & = & (u(X_0+h) - u(X_0))/h & \approx & u'(X_0) \\ D_{0,2} & = & (D_{1,1} - D_{0,1})/2h & = & (u(X_0+2h) - 2u(X_0+h) + u(X_0))/2h^2 & \approx & 2\ u''(X_0) \\ \cdots & & & & & & \end{array}$$

   Cette estimation de l'erreur n'est pas toujours d'un très grande précision, ni très fiable, mais, c'est souvent l'unique estimation disponible.

3. D'écrire une fonction MATLAB <u>non-récursive</u> fournissant les valeurs des différences divisées pour un nombre m de points :

   `function [D] = newton(X,U)`

   où `D` est une matrice carrée de taille m et `X` et `U` sont deux vecteurs de taille m.

```
function [D] = newton(X,U)
m = length(X); D = zeros(m,m); D(1:m,1) = U;
for i=2:m
   for j = 1:m-i+1
       D(j,i) = (D(j+1,i-1) - D(j,i-1))/(X(j+i-1) -X(j))
   end
end
```

   Attention : les matrices dans MATLAB sont numérotées à partir de 1 et non de zéro...

4. De donner une expression polynômiale de la courbe paramétrique NURBS définie par $\mathbf{T} = [0,0,0,0,1,1,1,1]$, $\mathbf{W} = [1,1,1,1]$ et les quatre données du tableau.

   Avec les poids et noeuds donnés, il s'agit d'une courbe de Bézier dont les fonctions de base sont tout simplement les polynômes de Bernstein. L'expression demandée est tout simplement :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 10^{-2}\ \left(-2(1-t)^3 - 3t(1-t)^2 + 3(1-t)t^2 + 2t^3\right) \\ y(t) & = & 10^{-2}\ \left(5(1-t)^3 + 12t(1-t)^2 - 4t^3\right) \end{array}}$$

5. De calculer l'intersection de cette NURBS avec la droite $x = 0$.

   En raison de la symétrie des noeuds et du vecteur X_i*, on peut observer que* $x(1/2) = 0$ *et en déduire immédiatement la valeur demandée :*

$$\boxed{y(1/2) \quad = \quad 10^{-2}\ (5 + 12 - 4)/8 \quad = \quad 13/800}$$

---

[2] Noter qu'il était possible de vérifier (et même de deviner :-) ces valeurs à partir de la figure !

[3] La généralisation à des abscisses non-équidistantes est purement calculatoire et n'est pas requis pour une simple explication. Il n'est pas demandé ici de démontrer, mais juste d'expliquer !