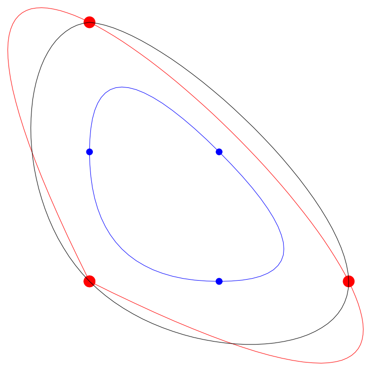
FSAB12-ARCH12	
S7 : octobre 2006	*Méthodes numériques*
FSAB1104	**Solution**



Trois points...

Il y a trois points que la trajectoire inconnue d'une voiture croise en 3 secondes. En $t = 0$, elle se trouvait au premier point, puis au second et au troisième en $t = 1$ et $t = 2$ respectivement. Et finalement, elle repasse au point initial en $t = 3$ et continuera à répéter indéfiniment la même trajectoire...

	T_i	(X_i, Y_i)
0	0.00	(0.00 , 0.00)
1	1.00	(1.00 , 0.00)
2	2.00	(0.00 , 1.00)
3	3.00	(0.00 , 0.00)

Nous allons estimer la représentation paramétrique C^0 de cette trajectoire avec une interpolation polynomiale, une approximation B-spline uniforme C^1 de degré deux et une interpolation C^2 avec des splines cubiques usuelles. Plus précisément, on vous demande de :

1. Développer l'expression de l'interpolation polynomiale paramétrique : $(x_L(t), y_L(t))$. En déduire ensuite la position atteinte en $t = \frac{1}{2}$

   L'interpolation polynomiale paramétrique :

$$x_L(t)) = \sum_{i=0}^{3} X_i \phi_i(t) \qquad\qquad y_L(t)) = \sum_{i=0}^{3} Y_i \phi_i(t)$$

$$= \phi_1(t) \qquad\qquad = \phi_2(t)$$

$$= \frac{(t-0)(t-2)(t-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \qquad\qquad = \frac{(t-0)(t-1)(t-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}$$

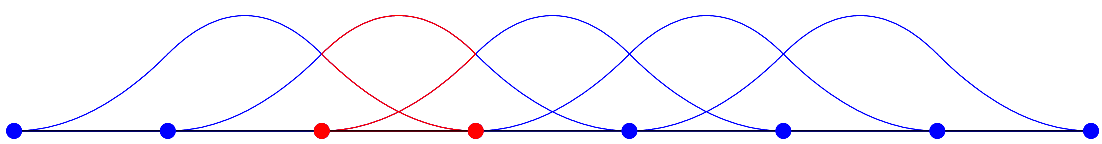
$$= \frac{t(t-2)(t-3)}{2} \qquad\qquad = \frac{t(t-1)(t-3)}{-2}$$

   En $t = \frac{1}{2}$, on en déduit la position : $(\frac{15}{16}, -\frac{5}{16})$.

   Un nombre non négligeable d'étudiants obtiennent ce résultat en faisant usage d'une algèbre surdimensionnée et complexe et s'arrêtent péniblement ici... Et pourtant, l'utilisation de polynômes de Lagrange simplifie largement les calculs : il n'est ni demandé, ni nécessaire, ni utile de développer les expressions. En général, c'est même une source d'erreurs de calcul.

2. Représenter graphiquement les fonctions de base B-splines de degré deux associées aux noeuds $\mathbf{T} = [-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5]$

   Il suffit d'esquisser l'allure des 5 fonctions de base qui interviennent :



3. Développer l'expression de l'approximation B-spline uniforme $(x_B(t), y_B(t))$ lorsque $t \in [0,1]$. A nouveau, en déduire la position atteinte en $t = \frac{1}{2}$.

   En définissant $(X_4, Y_4) = (X_1, Y_1)$, l'approximation B-spline de degré deux s'écrit :

$$
\begin{aligned}
x_S(t)) &= \sum_{i=0}^{4} X_i B_i^2(t) & \qquad y_L(t)) &= \sum_{i=0}^{4} Y_i B_i^2(t) \\
&\downarrow & &\downarrow \\
&= B_1^2(t) & &= B_2^2(t)
\end{aligned}
$$

   Pour développer cette expression sur l'intervalle $[0,1[$, il faut uniquement évaluer les deux fonctions B-splines : $B_1^2(t)$ et $B_2^2(t)$.

$$
\begin{aligned}
B_1^2(t) &= \frac{(t+1)}{2}\, B_1^1(t) + \frac{(2-t)}{2} B_2^1(t) & \qquad B_2^2(t) &= \frac{t}{2}\, B_2^1(t) \\
&\downarrow \quad \textit{Comme } B_1^1(t) = (1-t) \textit{ et } B_2^1(t) = t. & &\downarrow \quad \textit{Comme } B_2^1(t) = t. \\
&= \frac{1 + 2t - 2t^2}{2} & &= \frac{t^2}{2}
\end{aligned}
$$

   On obtient donc :

$$
x_B(t) = \frac{1 + 2t - 2t^2}{2} \qquad\qquad y_B(t) = \frac{t^2}{2}
$$

   En $t = \frac{1}{2}$, on en déduit la position : $(\frac{3}{4}, \frac{1}{8})$. En parcourant dans un autre ordre les points de contrôle dans un autre ordre, deux autres positions peuvent être déduites et sont également correctes... (et donc, acceptées par le correcteur)

4. Compléter le programme MATLAB ci-dessous afin d'obtenir une interpolation C^2 avec des splines cubiques usuelles.

   Pour assurer au mieux une continuité C^2, une facon de procéder est d'ajouter au début et à la fin du vecteurs des données, les coordonnées des deux derniers et des deux premiers points... Notons qu'il s'agit d'une solution très similaire à celle que l'on a adoptée pour l'approximation B-splines !

```
function curve()
X = [0 1 0 0];
Y = [0 0 1 0];
T = [0 1 2 3];

% ===================================
n = length(X);
Xs = [X(n-1) X(n) X X(1) X(2)];
Ys = [Y(n-1) Y(n) Y Y(1) Y(2)];
Ts = -2:5;    t  =  0:0.01:3;
% ===================================

plot(spline(Ts,Xs,t),spline(Ts,Ys,t),'-k');
end
```

   De manière très sympathique, un très grand nombre d'étudiants avaient retenu du dernier cours qu'il fallait allonger de cette facon, les vecteurs `X` et `Y`... Malencontreusement, ils procèdent souvent de même avec le vecteur `T`, ce qui n'est pas du tout indiqué et démontrent qu'ils n'ont rien compris au concept de courbe paramétrique. Ce qui provoque évidemment le désespoir du malheureux enseignant face à la faiblesse de ses modestes explications :-)