| | |
|---|---|
| **FSAB12-ARCH12** | |
| **S5 : octobre 2007** | *Méthodes numériques* |
| **FSAB1104** | **Solution** |

# Approximation de Fourier...

| | $X_i$ | $U_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | $\pi/4$ | 1 |
| 2 | $\pi/2$ | 3 |
| 3 | $3\pi/4$ | 2 |
| 4 | $\pi$ | 1 |
| 5 | $5\pi/4$ | 1 |
| 6 | $3\pi/2$ | 0 |
| 7 | $7\pi/4$ | 0 |

Nous disposons d'un ensemble de huit données d'une fonction inconnue $u(x)$ dont nous souhaitons calculer une approximation au sens des moindres carrés $u^h(x)$ à partir de trois fonctions de base sinusoïdales

$$u^h(x) = \sum_{i=0}^{2} a_i \sin(ix)$$

*L'énoncé rédigé par un être perfide était nettement plus simple qu'il n'y paraissait !*
*Comme* $\sin(0) = 0$*, l'approximation numérique se réduit à l'expression :*

$$u^h(x) = a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x)$$

*et la valeur* $a_0$ *peut donc être n'importe quel réel possible et ne nécessite rien de plus à dire.*

1. Ecrire la fonction $J(a_0, a_1, a_2)$ qu'il faut minimiser pour résoudre un tel problème.

   $$J(a_1, a_2) = \sum_{i=0}^{7} \left( U_i - \sum_{j=1}^{2} \sin(jX_i)\ a_j \right)^2.$$

2. En déduire le système à résoudre pour obtenir les trois coefficients $a_i$.

   *Il suffit d'annuler les dérivées partielles de* $J$ *par rapport aux deux paramètre* $a_1$ *et* $a_2$ *afin d'obtenir :*

   $$\left[ \begin{array}{cc} \sum_{i=0}^{7} \sin(X_i)\sin(X_i) & \sum_{i=0}^{m} \sin(X_i)\sin(2X_i) \\ \sum_{i=0}^{7} \sin(X_i)\sin(2X_i) & \sum_{i=0}^{m} \sin(2X_i)\sin(2X_i) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \sum_{i=0}^{7} \sin(X_i)U_i \\ \sum_{i=0}^{7} \sin(2X_i)U_i \end{array} \right].$$

3. Le calcul de cet approximation peut être interprété comme celui d'une projection orthogonale pour un produit scalaire $< f, g >$ défini pour deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ : quel est ce produit scalaire ? Ensuite, démontrer (graphiquement, éventuellement :-) que les trois fonctions de base $\sin(ix)$ forment une base orthogonale pour ce produit scalaire.

   *Le produit scalaire correspondant est défini comme suit.*

   $$< f, g >= \sum_{i=0}^{7} f(X_i)g(X_i).$$

*Les deux équations de l'approximation peuvent être écrites comme :*

$$
\begin{aligned}
< \sin(x), u(x) - u^h(x) > &= 0, \\
< \sin(2x), u(x) - u^h(x) > &= 0.
\end{aligned}
$$

*Ce qui correspond bien au calcul de la projection orthogonale de* $u(x)$ *dans le sous-espace généré par les fonctions* $\sin(x)$ *et* $\sin(2x)$.

*Il est vraiment aisé de vérifier que pour un tel produit scalaire, les fonctions* $\sin(x)$ *et* $\sin(2x)$ *sont orthogonales et que la matrice ci-dessus sera diagonale. Il est évident que la fonction nulle sera orthogonale à n'importe quelle fonction... Il n'est toutefois pas exact de dire que l'ensemble* $\{0, \sin(x), \sin(2x)\}$ *forment une base orthogonale d'une espace vectoriel de dimension trois, car la fonction nulle peut être obtenue en multipliant n'importe quel sinus par une constante nulle. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle* $a_0$ *est indéterminé.*

4. Calculer les valeurs des coefficients $a_i$.

   *Le système linéaire devient simplement*

$$
\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

   *On obtient immédiatement les deux valeurs demandées* $a_1 = (3+\sqrt{2})/4$ *et* $a_2 = 0$.

5. Compléter le programme MATLAB ci-dessous afin d'obtenir l'approximation demandée.

   *Voici un exemple de programme utilisant les données. Il est évidemment possible de faire mieux en mettant le nombre de fonctions de base comme un paramètre et non une constante codée (2 en l'occurence, pas cela n'était pas demandé.)*

```
function mySinusApproximation()
X = [0 1 2 3 4 5 6 7] * pi / 4;
U = [0 1 3 2 1 1 0 0];
x = linspace(0,2*pi,100);
a = [sin(X) * U' sin(2*X) * U' ] /4;
uh = a * sin([1 2]' * x);
plot(x,uh);
end
```

*Il est intéressant d'observer le grand nombre d'étudiants, de tuteurs et de surveillants qui trouvent cette question trop simple et remplacent d'autorité la fonction nulle soit par une fonction identité, soit par une fonction* $\sin(3x)$. *Le correcteur étant particulièrement compréhensif, il n'a tenu aucune rigueur à ce souci légitime d'amélioration d'une question que vous trouviez trop simple :-)*

*Par contre, l'introduction de matrices de Vandermonde, d'approximations polynomiales ou de produits scalaires définis sur base d'une intégrale l'a laissé de nettement moins bonne humeur. Toutes mes félicitations aux quelques étudiants qui ont obtenu la bonne solution (éventuellement d'un énoncé modifié). Bravo aussi à tous ceux qui ont osé dire que l'ensemble* $\{0, \sin(x), \sin(2x)\}$ *n'est pas une base. Il faut écrire ce que vous pensez, pas essayez de deviner ce que voudrait lire le correcteur !.*