FSAB12-ARCH12	
S5 : octobre 2008	*Méthodes numériques*
FSAB1104	**Solution**

Guerre des étoiles.

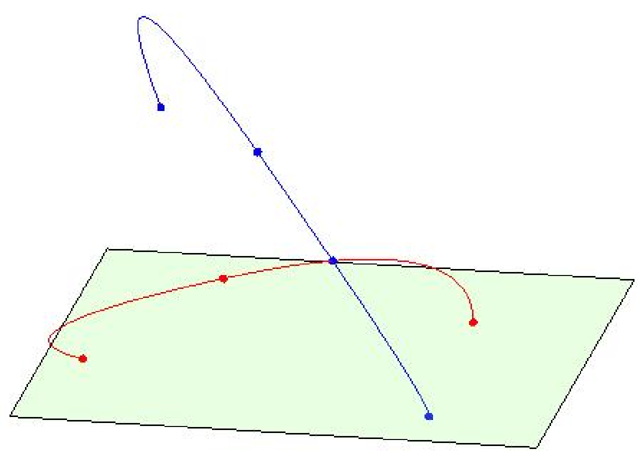
	X_i	Y_i	Z_i
0	0	0	-1
1	0	0	0
2	16	16	18
3	9	9	0

	$\widehat{X}_i$	$\widehat{Y}_i$	$\widehat{Z}_i$
0	9	0	0
1	9	0	β
2	-7	16	β
3	0	9	0

En réponse au tir d'un missile balistique nucléaire, une fusée interceptrice est lancée au même instant. Il s'agit de calculer rapidement le paramètre manquant β afin que l'interception s'effectue comme prévu. En d'autres mots, l'avenir de la planète est entre vos mains. Sur l'intervalle de temps $t \in [T_2, T_4]$, les deux trajectoires sont décrites respectivement par

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{3} B_i^2(t)\mathbf{X}_i, \qquad \widehat{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=0}^{3} B_i^2(t)\widehat{\mathbf{X}}_i,$$

où $B_i^2(t)$ sont les fonctions B-splines de degré deux, avec les noeuds définis par $\mathbf{T} = [T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6] = [-1, -1, -1, 0, 1, 2, 3]$.



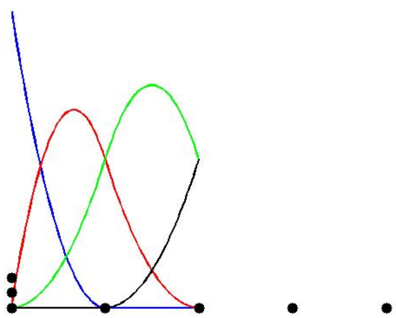
1. Donner les expressions de $B_0^2(t)$, $B_1^2(t)$, $B_2^2(t)$ et $B_3^2(t)$ pour $t = [T_2, T_3] = [-1, 0]$. Afin d'éviter de vous égarer dans une algèbre purement calculatoire, nous vous donnons les expressions de toutes les autres fonctions sur les deux intervalles utiles avec $\mathbf{T} = [-1, -1, -1, 0, 1, 2, 3]$:

	$t \in [-1, 0]$	$t \in [0, 1]$		$t \in [-1, 0]$	$t \in [0, 1]$
$B_0^1(t) =$	0	0	$B_0^2(t) =$	$\ldots$	0
$B_1^1(t) =$	$-t$	0	$B_1^2(t) =$	$\ldots$	$(1 - 2t + t^2)/2$
$B_2^1(t) =$	$(t + 1)$	$(1 - t)$	$B_2^2(t) =$	$\ldots$	$(1 + 2t - 2t^2)/2$
$B_3^1(t) =$	0	t	$B_3^2(t) =$	$\ldots$	$t^2/2$

En observant que sur l'intervalle $[T_2, T_3]$, seules les fonctions $B_1^1(t) = -t$ et $B_2^1(t) = (t+1)$ sont non nulles, on obtient en appliquant posément la définition :

$$\boxed{\begin{array}{lclclcl}
B_0^2(t) & = & 0 & + & \frac{(0-t)}{1} B_1^1(t) & = & t^2 \\
B_1^2(t) & = & \frac{(1+t)}{1} B_1^1(t) & + & \frac{(1-t)}{2} B_2^1(t) & = & (1-2t-3t^2)/2 \\
B_2^2(t) & = & \frac{(1+t)}{2} B_1^2(t) & + & 0 & = & (1+2t+t^2)/2 \\
B_3^2(t) & = & 0 & + & 0 & = & 0
\end{array}}$$

2. Esquisser les fonctions $B_0^2(t)$, $B_1^2(t)$, $B_2^2(t)$ et $B_3^2(t)$ pour $t = [T_2, T_4] = [-1, 1]$.



De manière assez surprenante pour moi, réaliser cette esquisse a souvent semblé une tâche compliquée ! Pourtant, en sachant que

$$\sum_{i=0}^{3} B_i^2(t) = 1$$

sur les deux intervalles, le graphe pouvait être très aisément construit de manière tout-à-fait intuitive des valeurs connues aux noeuds.

3. Calculer la position du missile balistique et de la fusée interceptrice en $t = 0$.

Comme $B_0^2(0) = B_3^2(0) = 0$ et $B_1^2(0) = B_2^2(0) = \frac{1}{2}$, on a : $\boxed{\mathbf{x}(0) = \Big(8, 8, 9\Big) \qquad \widehat{\mathbf{x}}(0) = \Big(1, 8, \beta\Big)}$

4. Donner l'expression paramétrique des deux trajectoires sur l'intervalle de temps $t \in [-1, 0]$.

On obtient mécaniquement :
$$\boxed{\begin{array}{rcrcrcl}
x(t) & = & y(t) & = & \widehat{y}(t) & = & 8(1+2t+t^2) \\
 & & & & \widehat{x}(t) & = & 9t^2 + 9(1-2t-3t^2)/2 - 7(1+2t+t^2)/2 \\
 & & & & z(t) & = & -t^2 + 9(1+2t+t^2) \\
 & & & & \widehat{z}(t) & = & \beta(1-t^2)
\end{array}}$$

5. Calculer l'instant t_* où les projections des deux trajectoires se croisent sur la surface de la terre.
Il suffit de rechercher le temps t_* où : $x(t_*) = \widehat{x}(t_*)$.

$$\begin{array}{rcl}
16(1+2t_*+t_*^2) & = & 18t^2 + 9(1-2t_*-3t_*^2) - 7(1+2t_*+t_*^2) \\
 & \downarrow & \\
23(1+2t_*+t_*^2) & = & 18t^2 + 9(1-2t_*-3t_*^2) \\
32t_*^2 + 64t_* + 14 & = & 0 \\
t_*^2 + 2t_* + \frac{7}{16} & = & 0
\end{array}$$

On conclut donc que $t_* = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - \frac{7}{4}}}{2}$ *et on obtient que :* $\boxed{t_* = -\frac{1}{4}}$

6. Calculer la valeur de β afin que la fusée intercepte bien le missile.

   Il suffit de rechercher le temps β où : $z(t_*) = \widehat{z}(t_*)$.

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{16} + 9\Big(1 - \tfrac{2}{8} + \tfrac{1}{16}\Big) &= \beta\Big(\tfrac{16-1}{16}\Big) \\ &\downarrow \\ 16 &= 3\beta \end{aligned}$$

On conclut donc que : $\boxed{\beta = \frac{16}{3}}$

7. Compléter le programme MATLAB afin d'obtenir de tracer la trajectoire du missile ennemi.

```
function drawTrajectory()
     T = [ -1 -1 -1  0  1  2  3 ]; p = 2;
     X = [  0  0 16  9 ];
     Y = [  0  0 16  9 ];
     Z = [ -1  0 18  0 ];
     t = linspace(-1,1,100);
```

Une manière de compléter le programme serait :

```
for i=0:3
      B(i+1,:) = b(t,T,i,p);
end
x = X * B;
y = Y * B;
z = Z * B;
```

```
     plot3(x,y,z,'-b');
end

function u = b(t,T,j,p)
     i = j+1;
     if p==0
         u = (t>= T(i) & t < T(i+p+1)); return
     end

     u = zeros(size(t));
     if T(i) ~= T(i+p)
         u = u + ((t-T(i)) / (T(i+p) -T(i))) .* b(t,T,j,p-1);
     end
     if T(i+1) ~= T(i+p+1)
         u = u + ((T(i+p+1)-t) ./ (T(i+p+1) -T(i+1))) .* b(t,T,j+1,p-1);
     end
end
```

Définition des fonctions B-splines

Soit les $n+1$ noeuds $T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots \leq T_n$.
Les B-splines de degré p sont les $n-p$ fonctions $B_i^p(t)$. Une fonction B_i^p est nulle sauf dans l'intervalle $[\ T_i, T_{i+1+p}\ [$ où elle définie par la relation de récurence :

$$B_i^p(t) = \frac{(t - T_i)}{(T_{i+p} - T_i)} B_i^{p-1}(t) + \frac{(T_{i+1+p} - t)}{(T_{i+1+p} - T_{i+1})} B_{i+1}^{p-1}(t)$$

avec $i = 0, \ldots, n-p-1$ et en partant de : $B_i^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad t \in [T_i T_{i+1}[\\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$