FSAB12-ARCH12	
S8 : novembre 2009	*Méthodes numériques*
FSAB1104	**Solution**

Quadrature composite de Gauss-Lobatto

Il s'agit d'intégrer une fonction sur un intervalle $[-1, 1]$. La quadrature de Gauss-Lobatto à quatre points consiste à remplacer l'intégration exacte I par une somme pondérée de la fonction en quatre points.

$$I \;=\; \int_{-1}^{1} u(x)\;dx \;\approx\; \alpha u(-1) + \beta u(-\zeta) + \beta u(\zeta) + \alpha u(1)$$

Deux des points sont les extrémités de l'intervalle : c'est ce qui caractérise Gauss-Lobatto par rapport à Gauss-Legendre. Les coefficients α, β et ζ sont choisis afin que le degré de précision de la quadrature soit le plus élevé possible. La quadrature composite de Gauss-Lobatto consiste ensuite à diviser l'intervalle $[-1, 1]$ en n sous-intervalles de longueur h. Sur chaque sous-intervalle, on utilise simplement la quadrature de Gauss-Lobatto en y adaptant judicieusement les poids et points d'intégrations

$$I \;\approx\; \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Big(\alpha_h u(X_{1,i}) + \beta_h u(X_{2,i}) + \beta_h u(X_{3,i}) + \alpha_h u(X_{4,i}) \Big)}_{I_h}$$

1. Calculer[1] α, β et ζ afin de permettre l'intégration exacte de tous les polynômes jusqu'au degré 4.

   Il faut que l'intégration exacte d'un polynôme quelconque $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ ou l'application de la quadrature de Gauss-Lobatto soit équivalent.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \;dx \quad &= \quad \alpha\Big(a - b + c - d + e\Big) + \beta\Big(a - b\zeta + c\zeta^2 - d\zeta^3 + e\zeta^4\Big) \\
&\quad\; + \beta\Big(a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3 + e\zeta^4\Big) + \alpha\Big(a + b + c + d + e\Big)\;, \\
2a + \frac{2c}{3} + \frac{2e}{5} \quad &= \quad 2a\Big(\alpha + \beta\Big) + 2c\Big(\alpha + \beta\zeta^2\Big) + 2e\Big(\alpha + \beta\zeta^4\Big)
\end{aligned}$$

   En exigeant que cela soit vrai pour toutes valeurs de a, c et e,

$$\begin{aligned}
1 &= \alpha + \beta \\
1 &= 3\alpha + 3\beta\zeta^2 \\
1 &= 5\alpha + 5\beta\zeta^4
\end{aligned}$$

   On a ainsi trois équations non-linéaires pour obtenir les trois coefficients. Ceci est exactement la démarche suivie pour obtenir la quadrature de Gauss-Legendre et devrait donc être obtenue par tous les étudiants ! Toutefois, un nombre non négligeable d'étudiants n'arrivent pas à intégrer le polynôme sur l'intervalle unité ou concluent que ce sont tous les termes de degré pair qui sont nuls...

[1] Obtenir α, β et ζ peut paraître un peu calculatoire, si on omet d'observer que $(1 - \zeta^4) = (1 - \zeta^2)(1 + \zeta^2)$.

En incluant $\alpha + \beta = 1$ dans les deux autres équations, on déduit que :

$$\begin{array}{rcl} 2 &=& 3\beta(1-\zeta^2) \\ 4 &=& 5\beta(1-\zeta^4) \end{array}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En observant que } (1-\zeta^4) = (1-\zeta^2)(1+\zeta^2),$$

$$\begin{array}{rcl} 2 &=& 3\beta(1-\zeta^2) \\ 4 &=& 5\beta(1-\zeta^2)(1+\zeta^2) \end{array}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En substituant ensuite la première équation dans la seconde :-),}$$

$$6 = 5(1+\zeta^2)$$

On conclut finalement que : $\boxed{\zeta = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \alpha = \frac{1}{6} \qquad \beta = \frac{5}{6}}$

Ici, il n'est pas inutile d'observer que Gauss-Lobatto intégre aussi parfaitement n'importe quel polynôme de degré cinq, puisque tous les termes impairs sont toujours parfaitement intégrés comme on vient de l'observer pour x et x^3 dans le calcul effectué ! Le degré de précision est donc cinq (et non quatre. Eh oui, la question suivante est facile, mais pas totalement stupide !).

2. Définir le degré de précision d'une quadrature.
   Quel est le degré de précision de la quadrature de Gauss-Lobatto ?

   Le degré de précision est le nombre d tel que l'erreur commise soit nulle pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à d mais soit non nulle pour au moins un polynôme de degré $d+1$.

   Pour la quadrature de Gauss-Lobatto : $\boxed{d = 5}$

3. Donner l'expression des poids α_h et β_h en fonction de h, α et β.

   Il suffit d'introduire le rapport des longueurs : $\boxed{\alpha_h = \frac{\alpha h}{2} \qquad \beta_h = \frac{\beta h}{2}}$

   Comme la question était vraiment facile, oublier le facteur deux n'a pas été pardonné :-(

4. Définir l'ordre de précision[2] d'une quadrature.
   Quel est l'ordre de précision de la quadrature composite de Gauss-Lobatto ?

   Une quadrature numérique dont le terme d'erreur $I - I_h$ est $\mathcal{O}(h^m)$ est dite d'ordre m.

   Pour la quadrature composite de Gauss-Lobatto : $\boxed{m = 6}$

   On doit intégrer sur chaque intervalle, une erreur $u - u^h$ qui est un polynôme de degré six: cela génère une erreur locale sur chaque intervalle en $\mathcal{O}(h^7)$ et une erreur globale $\mathcal{O}(h^6)$ en additionnant les $n = 2/h$ erreurs locales ! Globalement, on a toujours $m = d + 1$.

[2]Ce n'est évidemment pas la même chose que le degré de précision !

5. On a effectué le calcul de l'intégrale en utilisant $2n$ et n sous-intervalles et on a obtenu respectivement I_h et I_{2h}. Donner la combinaison linéaire de I_h et I_{2h} qui sera théoriquement la meilleure extrapolation de Richardson pour estimer I.

   Comme il s'agit d'éliminer un terme d'ordre 6 *:* $\boxed{\dfrac{\left(64I_h - I_{2h}\right)}{63}}$

   L'erreur de cette extrapolation sera en $\mathcal{O}(h^8)$*, puisqu'il n'y a pas de termes d'erreur de degré impair.*

6. Ecrire une fonction MATLAB permettant d'intégrer une fonction u sur l'intervalle $[-1, 1]$ en le divisant en n sous-intervalles égaux et en y appliquant la quadrature composite de Gauss-Lobatto.

   ```
   function I = integrateCompositeGaussLobatto(n,u)
   ```

   où `n` est le nombre d'intervalles et `u` est la fonction à intégrer.

   Une implémentation possible est :

   ```
   function I = integrateCompositeGaussLobatto(n,u)
      h = 2/n;
      X = [ -1 -1/sqrt(5) 1/sqrt(5) 1] * h/2 - (1+h/2);
      W = [  1     5          5     1 ] * h/12;
      I = 0;
      for i = 1:n
         I = I + sum(u(X + i*h).*W);
      end
   end
   ```

   L'obtention correcte des abscisses locales en effectuant le changement de variables est la partie essentielle de la réponse demandée. Recopier, dans un vague style matlabien, la formule de l'énoncé en y incluant une matrice `X(i,j)` *non définie est se foutre gentiment de la gueule de correcteur qui a apprécié cela à sa juste mesure : vous voilà prévenus !*

   Ici, il est sans doute plus important d'écrire un code simple, éventuellement peu efficace mais correct. C'est donc plus astucieux qu'essayer d'effectuer une optimisation compliquée et erronée. En d'autres mots, ce n'est pas complètement idiot d'écrire -ici- une simple ou une double boucle car cela permettra d'obtenir de manière sûre et sage tous les points de la sous-question. Rien ne vous empêche ensuite de proposer une seconde version optimisée de votre premier jet afin de convaincre le correcteur que vous êtes un vrai génie de la programmation en MATLAB, mais cela ne concerne qu'un nombre très restreint d'étudiants !

   Un grand nombre d'étudiants font l'impasse du petit programme: c'est une erreur, car il était facile à écrire et intervenait pour près d'un quart dans la pondération de l'interrogation. Eh oui, quoique vous disent certains vieux étudiants attardés, il est très très très difficile de réussir l'examen de méthodes numériques si on ne sait pas du tout réaliser un petit programme !