FSAB12-ARCH12	
S8 : novembre 2010	*Méthodes numériques*
FSAB1104	**Solution**

Un plus beau hall Sainte-Barbe...

Soit les points $[T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5] = [-2, -1, 0, 1, 2, 3]$.
Un architecte audacieux propose de définir la hauteur d'une nouvelle toiture pour le bâtiment par l'expression :

$$u(t) = \frac{\sum_{i=0}^{2} B_i^2(t) W_i U_i}{\sum_{i=0}^{2} B_i^2(t) W_i} = \frac{3\alpha(1 + 2t - 2t^2)}{(\alpha + 1) + 2(\alpha - 1)(t - t^2)},$$

	U_i	W_i
0	0	1
1	3	α
2	0	1

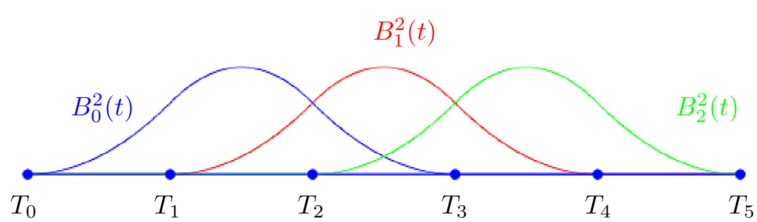
sur l'intervalle $t \in [T_2, T_3] = [0, 1]$.
Les fonctions $B_i^2(t)$ sont les fonctions B-splines de degré deux.
Le paramètre α est un réel strictement positif.

Afin de dimensionner l'installation de chauffage, il s'agira d'estimer avec précision l'intégrale :

$$I = \int_0^1 u(t)\ dt$$

en utilisant une règle de Simpson[1].

1. Esquisser les fonctions $B_0^2(t)$, $B_1^2(t)$ et $B_2^2(t)$ sur l'intervalle $t \in [T_0, T_5] = [-2, 3]$



Il ne faut pas un dessin précis, mais il est requis que les 3 fonctions soient plus ou moins semblables et de classe C_1 (pas de point anguleux !). En outre, la fonction $B_0^2(t)$ est définie sur l'intervalle $[T_0, T_2]$ (ce qui n'est pas l'intervalle $[0, 2]$: idem pour les deux autres fonctions !)

Etonnement, pas mal d'étudiants échouent dans cette question vraiment très facile. Et pourtant, il était permis d'avoir les dessins des fonctions B-splines sur votre formulaire !

[1] Les poids et points de la règle de Simpson sont $w_i = (1/3, 4/3, 1/3)$ et $X_i = (-1, 0, 1)$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

2. Donner l'expression analytique de ces trois fonctions sur l'intervalle $t \in [T_2, T_3] = [0,1]$.
   Comme sur l'intervalle $[0,1]$, seules $B_1^1(t)$ et $B_1^2(t)$ sont non-nulles, on doit juste évaluer :

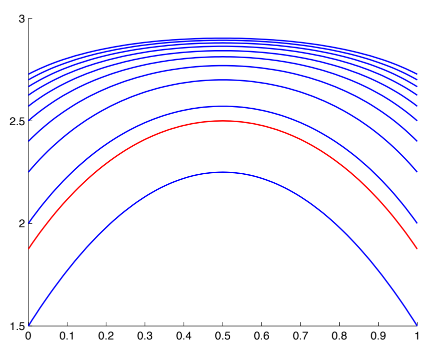
$$
\begin{array}{rclcrclcl}
2B_0^2(t) & = & (1-t)B_1^1(t) & & & = & (1-t)(1-t) & = & 1-2t+t^2 \\
2B_1^2(t) & = & (t+1)B_1^1(t) & + & (2-t)B_2^1(t) & = & (t+1)(1-t)+(2-t)t & = & 1+2t-2t^2 \\
2B_2^2(t) & = & & & tB_2^1(t) & = & t^2 & = & t^2
\end{array}
$$

On conclut que : $$\boxed{B_0^2(t) \;=\; \frac{1-2t+t^2}{2} \qquad B_1^2(t) \;=\; \frac{1+2t-2t^2}{2} \qquad B_2^2(t) \;=\; \frac{t^2}{2}}$$

On peut vérifier le résultat en observant que la somme des trois fonctions vaut un.
On peut aussi noter qu'une bonne partie de la réponse se trouvait dans l'énoncé, puisque :

$$u(t) = \frac{3\alpha B_1^2(t)}{B_0^2(t) + \alpha B_1^2(t) + B_2^2(t)} = \frac{3\alpha(1+2t-2t^2)}{(\alpha+1)+2(\alpha-1)(t-t^2)},$$

3. Calculer la valeur de α afin que la hauteur maximale de la toiture soit $\frac{5}{2}$.



On doit rechercher t_* et α tels que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u(t_*) & = & \frac{5}{2}, \\ u'(t_*) & = & 0. \end{array} \right.$$

Sur base de la symétrie des poids et points de contrôle, on peut immédiatement observer que le maximum sera toujours atteint en $t_* = \frac{1}{2}$. Ensuite, on calcule α en écrivant $u(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$:

$$
\begin{array}{rcl}
\dfrac{3\alpha(1+1-\frac{1}{2})}{(\alpha+1)+2(\alpha-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})} & = & \dfrac{5}{2} \\
& \downarrow & \\
\dfrac{9\alpha}{2} & = & \dfrac{5\alpha}{2} + \dfrac{5}{2} + \dfrac{5\alpha}{4} - \dfrac{5}{4} \\
\dfrac{3\alpha}{4} & = & \dfrac{5}{4}
\end{array}
$$

On conclut donc que : $$\boxed{\alpha \;=\; \tfrac{5}{3}}$$

Le toit est représenté en rouge sur la figure, où les dix autres courbes correspondent aux valeurs de $\alpha = 1, 2 \ldots 10$. On observe bien que le toit est symétrique !

Quoique ce n'était pas formellement demandé, on peut aussi retrouver la valeur de t^* annulant la dérivant première et écrire que :

$$0 = u'(t^*) = \frac{3\alpha(2-4t)\big[(\alpha+1)+2(\alpha-1)(t-t^2)\big] - 3\alpha(1+2t-2t^2)2\alpha(1-2t)}{9\alpha^2(1+2t-2t^2)^2}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En observant que } (1-2t_*+2t_*^2) > 0,$$

$$0 = 6\alpha(1-2t)\big[\alpha(1+2t-2t^2)+(1-2t+2t^2)\big] - 6\alpha^2(1+2t-2t^2)(1-2t)$$

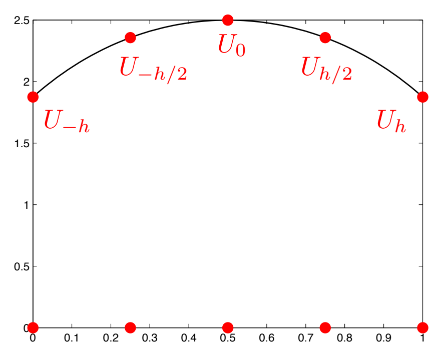
$$0 = (1-2t_*)(1-2t_*+2t_*^2)$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En observant à nouveau que } (1-2t_*+2t_*^2) > 0,$$

$$t_* = \tfrac{1}{2}$$

Bon, je reconnais, c'est un peu calculatoire, mais pas totalement infaisable... Il faut aussi avouer que je pensais que bien plus d'étudiants auraient l'intuition géométrique et éviteraient ce long calcul de dérivée. La majorité des points de cette sous-question était acquis si le problème était correctement posé. Honte aux très nombreux étudiants qui ont tenté avec de (parfois très, très !) longs développements algébriques à trouver α tel que $u'(\frac{5}{2}) = 0$.

4. En utilisant la règle de Simpson avec un intervalle, puis avec deux intervalles, obtenir les estimations I_{2h} et I_h de l'intégrale I. Précisez ce que vaut h dans vos calculs ?



En définissant $h = \frac{1}{2}$, il faut calculer :

$$I_{2h} = \frac{U_{-h} + 4U_0 + U_h}{6},$$

$$I_h = \frac{U_{-h} + 4U_{-h/2} + 2U_0 + 4U_{h/2} + U_h}{12},$$

avec $U_{-h} = u(0)$, $U_0 = u(\frac{1}{2})$ et $U_h = u(1)$.

Il s'agit ensuite calculer les valeurs aux 5 points en tirant profit de la symétrie du toit :

$$U_{-h} = U_h = u(0) = \tfrac{3\alpha}{(\alpha+1)} = \tfrac{15}{8}$$

$$U_0 = u(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{5}{2}$$

$$U_{-h/2} = U_{h/2} = u(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{3\alpha\frac{11}{8}}{(\alpha+1)+2(\alpha-1)\frac{3}{16}} = \tfrac{33\alpha}{(11\alpha+5)} = \tfrac{33}{14}$$

En appliquant ensuite les règles de quadrature :

$$\boxed{\begin{aligned} I_{2h} &= \tfrac{55}{24} \\ I_h &= \tfrac{773}{336} \end{aligned}}$$

La toute dernière étape est très calculatoire. Il ne faut l'entamer que si vous n'avez plus rien d'autre à faire d'utile... Strictement, personne[2] *n'a trouvé la fraction correspondant à I_h. Par contre, quelques étudiants ont obtenu celle correspondant à I_{2h}... Pourtant, beaucoup d'étudiants ont passé un temps inutile à essayer d'obtenir cela, au lieu de répondre aux deux dernières questions...*

5. Donner l'ordre de précision[3] de la méthode composite de Simpson.
   Justifier votre réponse brièvement.

Pour la quadrature composite de Simpson : $\boxed{m \quad = \quad 4}$

On doit intégrer sur chaque intervalle, une erreur $u - u^h$ qui est un polynôme de degré quatre: cela génère une erreur locale sur chaque intervalle en $\mathcal{O}(h^5)$ et une erreur globale $\mathcal{O}(h^4)$ en additionnant les $n = 2/h$ erreurs locales !

6. Donner I_* la combinaison linéaire de I_{2h} et I_h qui sera la meilleure extrapolation de Richardson pour estimer I. Quelle sera l'ordre de précision de I_* ?

Comme il s'agit d'éliminer un terme d'ordre 4 : $\boxed{\dfrac{\Big(16 I_h - I_{2h}\Big)}{15}}$

L'erreur de cette extrapolation sera en $\mathcal{O}(h^6)$, puisqu'il n'y a pas de termes d'erreur de degré impair.

La pondération (approximative) des six sous-questions était respectivement $(2, 3, 3, 5, 3, 5)$. On constate que répondre simplement aux questions 1, 5 et 6 (ne nécessitant absolument aucun calcul !) permet d'obtenir 10/20. Ces trois questions étaient quasiment une simple restitution de la matière et la réponse pouvait normalement être immédiatement déduite de votre formulaire ! La sous-question 3 était plus compliquée qu'escomptée, mais la correction a largement tenu compte de cela : en d'autres mots, j'ai été scandaleusement gentil...

[2] Là, je suis un tout petit peu déçu :-)

[3] Il s'agit de l'exposant n du terme d'erreur écrit sous la forme $\mathcal{O}(h^n)$.