FSAB12-ARCH12	
S8 : novembre 2011	*Méthodes numériques*
FSAB1104	**Solution**

Y-a-t-il un but ?

Soit les points $[T_0, T_1, T_2] = [-1, 0, 1]$. Nous souhaitons calculer l'énergie cinétique d'un tir de votre joueur de football favori. La trajectoire $\mathbf{x}(t)$ du tir est définie dans le plan par :

$$x(t) \quad = \quad \sum_{i=0}^{2} \phi_i(t)\ X_i \qquad \text{et} \qquad y(t) \quad = \quad \sum_{i=0}^{2} \phi_i(t)\ Y_i$$

	X_i	Y_i
0	-α	-2
1	0	0
2	0	2

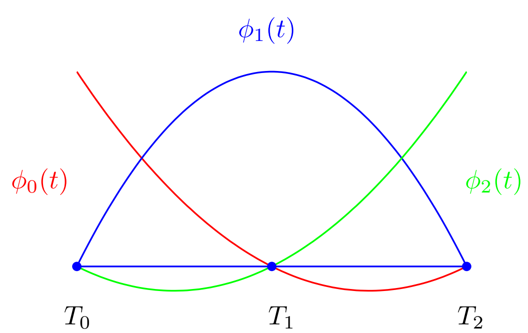
sur l'intervalle $t \in [T_0, T_2] = [-1, 1]$. Les fonctions $\phi_i(t)$ sont les polynômes de Lagrange de degré deux associés aux abscisses T_i. Le paramètre α est un réel strictement positif.

Afin d'identifier un éventuel cas de dopage, il s'agit d'estimer avec précision l'énergie cinétique du tir :

$$I = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \ dt$$

en utilisant une règle de Gauss-Legendre avec deux points.

1. Esquisser graphiquement les fonctions $\phi_0(t)$, $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$ sur l'intervalle $t \in [T_0, T_2] = [-1, 1]$



Il ne faut pas un dessin précis, mais il est requis que les 3 fonctions ressemblent à une parabole et n'aient pas de point d'inflexion. Il faut aussi que les trois fonctions valent l'unité aux noeuds auxquelles elles sont associées.

Etonnement, un très grand nombre d'étudiants échouent dans cette question vraiment très facile, tout en parvenant à obtenir l'expression analytique correcte des fonctions.

Quelques étudiants dessinent les fonctions B-splines (non, ça c'était l'année passée !).
D'autres dessinent des polynômes de degré manifestement trop élevé !
Certains dessins sont même vraiment proches de l'art abstrait :-)

2. Donner l'expression analytique de ces trois fonctions $\phi_0(t)$, $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$.

Ces fonctions sont : $\boxed{\phi_0(t) = \dfrac{t(t-1)}{2} \qquad \phi_1(t) = (1-t)(1+t) \qquad \phi_2(t) = \dfrac{t(t+1)}{2}}$

Il n'est ni nécessaire, ni conseillé de développer ces expressions. Par contre, fournir la formule générale des polynômes de Lagrange sans même remplacer les valeurs de noeuds n'est pas acceptable.

De manière assez prévisible, quelques étudiants prennent α comme une valeur pour les noeuds, en appliquant de manière purement lexicographique la formule des notes de cours : non, non, non, ici on effectue deux interpolations $x(t)$, $y(t)$ et non l'interpolation de $y(x)$. Evidemment, ils obtiennent ensuite des choses assez farfelues avec deux noeuds identiques et des dénominateurs nuls...

3. Donner les deux abscisses d'intégration de la règle de Gauss-Legendre sur l'intervalle $[-1, 1]$.
Donner les quatre abscisses d'intégration[1] lorsqu'on considère les deux intervalles $[-1, 0]$ et $[0, 1]$.

Les deux abscisses de Gauss-Legendre sur $[-1,1]$ sont : $\boxed{T_i \quad = \quad \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

Pour les deux intervalles $[-1,0]$ et $[0,1]$, on utilise le changement de variable $t = \pm 1/2 + \xi/2$,

et on obtient les quatre abscisses : $\boxed{T_i \quad = \quad \dfrac{1}{2}\left(\pm 1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

Pas mal d'étudiants n'arrivent pas à trouver les abscisses de Gauss-Legendre pour deux intervalles : et pourtant, c'était l'objet du dernier problème MATLAB !

4. En utilisant cette règle avec un intervalle, puis avec deux intervalles,
obtenir les estimations I_{2h} et I_h de l'intégrale I, en fonction du paramètre α.
Donner la valeur de h.

En écrivant et en dérivant la représentation paramétrique de la courbe,

$$\begin{array}{rclcrclcl}
x(t) & = & -\frac{\alpha}{2}\, t(t-1) & \quad et \quad & y(t) & = & -t(t-1) + t(t+1) & = & 2t \\
& \downarrow & & & & \downarrow & & & \\
x'(t) & = & -\alpha\ (t - \frac{1}{2}) & \quad et \quad & y'(t) & = & 2 & &
\end{array}$$

Il faut donc intégrer : $\boxed{2I \quad = \quad \int_{-1}^{1} \left(\alpha^2 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + 4 \right) dt \quad = \quad 8 + \alpha^2 \int_{-1}^{1} \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 dt}$

[1] Deux abscisses sur chacun des deux intervalles, cela fait bien quatre abscisses :-)

En observant[2] *qu'il faut intégrer un polynôme du second degré et que notre règle de Gauss-Legendre intègre exactement ce type de polynôme, il suffisait de calculer l'intégrale exacte et de conclure en écrivant que* $I = I_{2h} = I_h$.

Pour vous en convaincre, le calcul est effectué de manière analytique et avec la règle de Gauss-Legendre sur un et deux intervalles. On obtient toujours le même résultat :-) La résolution analytique est -au passage- la manière la plus facile et la plus efficace d'obtenir le résultat sans erreur.

$$
\begin{aligned}
2I &= 8 + \alpha^2 \left[\tfrac{t^3}{3} - \tfrac{t^2}{2} + \tfrac{t}{4} \right]_{-1}^{1} \\
&= 8 + \alpha^2 \left[\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2} \right] \; = \; 8 + \alpha^2 \; \tfrac{7}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2I_{2h} &= 8 + \alpha^2 \left[\left(\tfrac{-1}{\sqrt{3}} - \tfrac{1}{2} \right)^2 + \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}} - \tfrac{1}{2} \right)^2 \right] \\
&= 8 + \alpha^2 \left[\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{\sqrt{3}} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{\sqrt{3}} \right] \; = \; 8 + \alpha^2 \; \tfrac{7}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2I_h &= 8 + \tfrac{1}{2} \; \alpha^2 \left[\left(\tfrac{-1}{2\sqrt{3}} - 1 \right)^2 + \left(\tfrac{1}{2\sqrt{3}} - 1 \right)^2 + \left(\tfrac{-1}{2\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\tfrac{1}{2\sqrt{3}} \right)^2 \right] \\
&= 8 + \tfrac{1}{2} \; \alpha^2 \left[1 + \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{\sqrt{3}} + 1 + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{\sqrt{3}} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{12} \right] \; = \; 8 + \tfrac{1}{2} \; \alpha^2 \; \tfrac{28}{12} \; = \; 8 + \alpha^2 \; \tfrac{7}{6}
\end{aligned}
$$

en définissant $h = 1$. *Ne pas oublier le facteur des poids* $\frac{1}{2}$, *lorsqu'on a deux intervalles !*

On conclut donc : $\boxed{I \; = \; I_h \; = \; I_{2h} \; = \; 4 + \dfrac{7\alpha^2}{12}}$

C'était un tout petit peu calculatoire, mais parfaitement faisable avec un peu de calme et de rigueur. Quelques étudiants soigneux obtiennent deux valeurs identiques et sont complètement perturbés par le fait d'avoir une réponse correcte qu'ils pensent erronée. Que dire alors des étudiants qui ont recommencé leurs calculs jusqu'à obtenir deux solutions différentes alors qu'ils avaient bien obtenu la bonne valeur ? Il n'est donc ni inutile, ni stupide d'avoir confiance en vous et d'assumer ce que vous pensez être la bonne réponse !

5. Donner l'ordre de précision[3] de la méthode composite de Gauss-Legendre.
   Justifier votre réponse brièvement.

Pour la quadrature composite de Gauss-Legendre à deux points : $\boxed{n \; = \; 4}$

Comme on intégre exactement un polynôme de degré trois, doit intégrer sur chaque intervalle, une erreur $u - u^h$ *qui est un polynôme de degré quatre: cela génère une erreur locale sur chaque intervalle en* $\mathcal{O}(h^5)$ *et une erreur globale* $\mathcal{O}(h^4)$ *en additionnant les* $n = 2/h$ *erreurs locales !*

[2]Un seul étudiant sur 299 a eu le culot d'écrire cela et il a droit à toutes mes félicitations :-) Et là, franchement j'en suis le premier sidéré ! J'espérais quand-même que quelques étudiants se seraient souvenu qu'appliquer Gauss-Legendre pour intégrer un polynôme n'est pas la meilleure idée, comme je l'avais indiqué au cours.

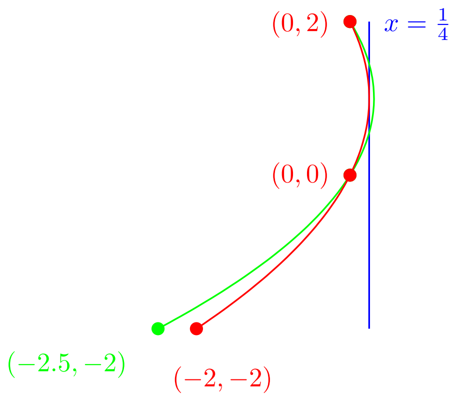
[3]Il s'agit de l'exposant n du terme d'erreur écrit sous la forme $\mathcal{O}(h^n)$.

6. Donner I_* la combinaison linéaire de I_{2h} et I_h qui sera la meilleure extrapolation de Richardson pour estimer I. Quelle sera l'ordre théorique de précision de I_* ?

Comme il s'agit d'éliminer un terme d'ordre 4 : $\boxed{\dfrac{\left(16 I_h - I_{2h}\right)}{15}}$

L'erreur de cette extrapolation sera en $\mathcal{O}(h^6)$, puisqu'il n'y a pas de termes d'erreur de degré impair. La règle de Gauss-Legendre est, en effet, une formule parfaitement symétrique.
Formellement, toutes les combinaisons convexes seraient acceptables puisque les deux valeurs sont identiques et exactes[4]

7. Calculer la valeur minimale de α afin que le ballon entre dans le but adverse défini par $x = \frac{1}{4}$?



On doit rechercher t_* et α tels que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t_*) & = & \frac{1}{4}, \\ x'(t_*) & = & 0. \end{array} \right.$$

Comme $x'(t) = -\alpha\ (t - \frac{1}{2})$, on obtient $t_* = \frac{1}{2}$.
Ensuite, on calcule α en écrivant :

$$x(\tfrac{1}{2}) \ = \ -\frac{\alpha}{2}\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) \ = \ \frac{1}{4}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\alpha}{8} \ = \ \frac{1}{4}$$

On conclut donc que : $\boxed{\alpha \ = \ 2}$

La pondération (approximative) des sept sous-questions était respectivement $(2, 2, 3, 6, 2, 2, 3)$. La plupart des étudiants arrivent à répondre aux trois premières questions et s'effondrent sur la quatrième, alors qu'analyser la suite des sous-questions leur aurait permis de sauter avantageusement l'obstacle. Réfléchir à la sous-question 5 permettait -en effet- de découvrir que la sous-question 4 était perfidement simple !

Conclusion : même en vous permettant de venir avec un formulaire, même en rédigeant une question très proche de celle de l'année passée, même en n'introduisant aucune monstruosité calculatoire, l'enseignant arrive, comme d'habitude, à vous surprendre :-)

[4] Toutefois, personne n'a eu l'audace de répondre cela en le justifiant ainsi : ce qui aurait été parfaitement accepté par le correcteur... Comme quoi, vous êtes encore tous beaucoup, beaucoup trop soumis à l'autorité académique !