

EPL	
S8 : novembre 2012	<i>Méthodes numériques</i>
FSAB1104	Solution

Quadrature de Gauss-Legendre

Soit les abscisses $(X_0, X_1, X_2) = (-\alpha, 0, \alpha)$, où α est un nombre réel donné tel que $0 < \alpha < 1$.

Soit trois nombres réels w_0, w_1, w_2 . On estime alors l'intégrale de $u(x)$ sur un intervalle avec la quadrature de Gauss-Legendre avec 3 points de la manière suivante :

$$I_h = \sum_{i=0}^2 w_i u(X_i) \approx \int_{-1}^1 u(x) dx = I$$

L'implémentation sous MATLAB de cette quadrature peut s'écrire :

```
function I = GaussLegendre(u)
X = [-0.774596669241483 0.000000000000000 0.774596669241483];
W = [ 0.555555555555556 0.888888888888889 0.555555555555556];
I = sum(u(X).*W);
end
```

1. Trouver une expression des trois nombres w_0, w_1, w_2 en fonction de α afin que la quadrature soit exacte pour tout polynôme quelconque de degré 2.

$$\text{Il faut exiger que : } \begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 &= 2 \\ -w_0\alpha + w_2\alpha &= 0 \\ w_0\alpha^2 + w_2\alpha^2 &= 2/3 \end{cases}$$

La première équation est requise pour intégrer exactement un terme constant.

La seconde équation permet d'intégrer exactement x .

La dernière équation correspond à x^2 .

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} = w_0\alpha^2 + w_2\alpha^2 = 2w_0\alpha^2 \longrightarrow$$

$$w_0 = w_2 = \frac{1}{3\alpha^2} \quad w_1 = 2 - \frac{2}{3\alpha^2}$$

Notons que l'on intègre aussi exactement n'importe quel polynôme de degré 3 !

2. Obtenir α tel que la quadrature soit exacte pour tout polynôme de degré 4.

C'est exactement le même principe.

$$\int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5} = w_0\alpha^4 + w_2\alpha^4 = \frac{2}{3\alpha^2}\alpha^4 \longrightarrow$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Notons à nouveau que l'on intègre aussi exactement n'importe quel polynôme de degré 5 !

3. Ecrire une fonction MATLAB :

```
I = CompositeGaussLegendre(u,n)
```

qui divise $[-1, 1]$ en n sous-intervalles égaux et qui applique la règle de Gauss-Legendre à trois points dans chaque sous-intervalle pour obtenir une estimation $I_{h/n}$ de I .

L'unique difficulté consiste à modifier les abscisses et les poids sur chaque intervalle !

Il faut effectuer un petit changement de variable pour les abscisses et adapter les poids (ou le résultat final).

Une implémentation simple pourrait être :

```
function I = CompositeGaussLegendre(u,n)

    Xgl = [-0.774596669241483 0.000000000000000 0.774596669241483];
    Wgl = [0.555555555555556 0.888888888888889 0.555555555555556];
    X = linspace(-1,1,n+1); h = 2/n; I=0;
    for i=1:n
        Xloc = X(i) + h/2 + Xgl * h/2;
        Wloc = Wgl * h/2;
        I = I + sum(u(Xloc).*Wloc);
    end

end
```

Les étudiants astucieux observeront qu'il est possible de vectoriser le code pour le rendre plus efficace. Attention, cela rend parfois votre réponse fautive et donc vous fait tout perdre ! Ce n'était pas demandé et donc se contenter d'une implémentation simple est souvent bien sûr :-)

4. Donner l'ordre de précision¹ de Gauss-Legendre composite à 3 points. Justifier votre réponse brièvement.

Pour la quadrature composite de Gauss-Legendre à trois points :

$$m = 6$$

Comme on intègre exactement un polynôme de degré cinq, on doit intégrer, sur chaque intervalle, une erreur $u - u^h$ qui est un polynôme de degré six: cela génère une erreur locale sur chaque intervalle en $\mathcal{O}(h^7)$ et une erreur globale $\mathcal{O}(h^6)$ en additionnant les $n = 2/h$ erreurs locales !

C'était presque exactement la même question que les deux années précédentes... et comme d'habitude, le même pourcentage des étudiants échouent à cette question :-)

5. Considérons I_h et $I_{h/2}$ obtenus par Gauss-Legendre composite avec 1 et 2 sous-intervalles. Donner I_* la combinaison linéaire de I_h et $I_{h/2}$ qui sera la meilleure extrapolation de Richardson. Quelle sera l'ordre théorique de précision de I_* ?

Comme il s'agit d'éliminer un terme d'ordre 6 :

$$\frac{(64I_{h/2} - I_h)}{63}$$

L'erreur de cette extrapolation sera en $\mathcal{O}(h^8)$, puisqu'il n'y a pas de termes d'erreur de degré impair. La règle de Gauss-Legendre est, en effet, une formule parfaitement symétrique. Si la réponse fournie ici est (in-)cohérente avec un résultat erroné à la question précédente, le correcteur en tient compte, bien évidemment.

¹Il s'agit de l'exposant m du terme d'erreur écrit sous la forme $\mathcal{O}(h^m)$.

6. Donner l'expression de I_h en fonction² de α lorsqu'on applique Gauss-Legendre composite à 3 points avec un unique intervalle $[-1, 1]$ pour la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{x+2}$$

Il suffit tout simplement d'écrire :

$$I_h = \frac{1}{3\alpha^2} \left(\frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{2+\alpha} \right) + \left(2 - \frac{2}{3\alpha^2} \right) \frac{1}{2}$$

7. Calculer maintenant α afin que l'erreur $E_h = |I - I_h|$ soit minimale pour cette fonction g . Est-ce que cette valeur peut ou doit être identique à celle obtenue plus haut ?

L'erreur est minimale lorsqu'elle est nulle :-)

Il suffit donc juste de calculer l'intégrale exacte de g et d'imposer que $I = I_h$.

En d'autres mots, on recherche α tel que :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x+2} dx = \ln(3) = \frac{1}{3\alpha^2} \left(\frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{2+\alpha} \right) + 1 - \frac{1}{3\alpha^2}$$

↓

$$3\alpha^2(4 - \alpha^2) \ln(3) = 4 + 3\alpha^2(4 - \alpha^2) - 4 + \alpha^2$$

$$3\alpha^2(4 - \alpha^2) \ln(3) = 3\alpha^2(4 - \alpha^2) + \alpha^2$$

$$3(4 - \alpha^2) \ln(3) = 3(4 - \alpha^2) + 1$$

$$3(4 - \alpha^2) \ln(3) = 3(4 - \alpha^2) + 1$$

$$(12\ln(3) - 13) = (3\ln(3) - 3) \alpha^2$$

On conclut finalement :

$$\alpha = \sqrt{\frac{12\ln(3) - 13}{3\ln(3) - 3}}$$

Il n'y a vraiment strictement aucune raison pour que cette valeur corresponde à la valeur habituelle de Gauss-Legendre. On impose ici de pouvoir intégrer g et non plus un quelconque polynôme...

Observons que la valeur trouvée tombe dans l'intervalle $[0, 1]$: ce qui n'était pas évident a priori !

La pondération (approximative) des sept sous-questions était respectivement (3, 3, 3, 2, 4, 2, 3).

Conclusion : même en vous permettant de venir avec un formulaire, même en rédigeant une question très courte, même en s'inspirant largement des tuyaux des années précédentes, même en n'introduisant aucune monstruosité calculatoire, l'enseignant arrive, comme d'habitude, à vous surprendre :-)

²Il ne faut donc PAS remplacer α par l'expression trouvée plus haut :-)