

EPL	
S6 : octobre 2013	<i>Méthodes numériques</i>
FSAB1104	Solution

The so-called U law

Dans une toute petite entreprise artisanale de fabrication de coqs décoratifs, on observe que le coût unitaire de production dépend du nombre de coqs produits par jour. Pour optimiser la gestion de notre dynamique artisan wallon, nous utilisons le *fameux modèle U* des économistes où le coût pour produire n coqs est supposé se composer d'une partie fixe a et d'une partie variable bn^2 .

	Coqs produits	Coût unitaire
i	N_i	U_i
1	1	40 €
2	2	10 €
3	4	30 €

On approxime donc $u(n)$ qui est le coût de fabrication d'un coq pour une production de n unités par :

$$u^h(n) = \frac{a}{n} + b n$$

1. Ecrire la fonction $J(a, b)$ à minimiser afin que u^h soit une approximation au sens de moindres carrés de u pour un nombre quelconque m de données N_i et U_i .

Il suffit d'écrire :

$$J(a, b) = \sum_{i=1}^m \left(U_i - \frac{a}{N_i} - b N_i \right)^2$$

2. En déduire le système à résoudre pour obtenir a et b , pour un nombre quelconque m de données.

Les deux équations que doivent satisfaire a et b sont obtenues en minimisant la fonction $J(a, b)$:

$$\frac{\partial J}{\partial a}(a, b) = 0 \quad \longrightarrow \quad 2 \sum_{i=1}^m \left(U_i - \frac{a}{N_i} - b N_i \right) \frac{1}{N_i} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial b}(a, b) = 0 \quad \longrightarrow \quad 2 \sum_{i=1}^m \left(U_i - \frac{a}{N_i} - b N_i \right) N_i = 0$$

Le système linéaire est donc :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \frac{1}{N_i^2} & m \\ m & \sum_{i=1}^m N_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \frac{U_i}{N_i} \\ \sum_{i=1}^m U_i N_i \end{bmatrix}$$

Remplacer m par le chiffre 1 est considéré comme une erreur impardonnable ! La question est très simple et il faut donc une réponse parfaitement correcte. Par contre, il n'était pas exigé d'écrire le système sous forme matricielle, même si c'était vachement plus simple.

3. Ensuite, calculer les coefficients du système pour les données fournies ($m = 3$).

On obtient mécaniquement :

$$\begin{bmatrix} \frac{21}{16} & 3 \\ 3 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{210}{4} \\ 180 \end{bmatrix}$$

Oui, oui, oui : il faut vraiment calculer les coefficients ! Cela avait l'air bêtement calculatoire, mais c'est vraiment une bonne question, car le correcteur a vraiment été étonné par le nombre (vraiment très) élevé d'étudiants qui pensent -par exemple- que

$$\sum_{i=1}^m \frac{U_i}{N_i} = \frac{\sum_{i=1}^m U_i}{\sum_{i=1}^m N_i}$$

4. Calculer les valeurs numériques des paramètres a et b pour les données fournies ($m = 3$).

Il suffit de faire une combinaison linéaire adéquate des lignes pour résoudre le système.

$$\begin{bmatrix} 21 & 48 \\ 3 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 840 \\ 180 \end{bmatrix}$$

En retirant 7 la seconde ligne de la première :-)

$$\begin{bmatrix} 0 & -99 \\ 3 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -420 \\ 180 \end{bmatrix}$$

$$b = \frac{420}{99} = \frac{140}{33}$$

On obtient alors :

$$a = \frac{18}{3} - \frac{21}{3} \frac{140}{33} = \frac{1000}{33}$$

Oui, c'est un peu calculatoire, j'en conviens.

Mais, avec un peu de minutie et de calme, c'est super facile.

J'ai été agréablement surpris que plus d'étudiants qu'initialement espéré ont obtenu ce résultat !

Notez que comme pas mal d'examens se font sans calculatrice, il faut vraiment s'entraîner à pouvoir faire manuellement ce type d'algèbre élémentaire :-)

5. Ecrire une fonction MATLAB afin d'obtenir les paramètres de l'approximation.
Les vecteurs N et U contiennent les données et sont de taille $1 \times m$.

Une implémentation possible est donnée par :

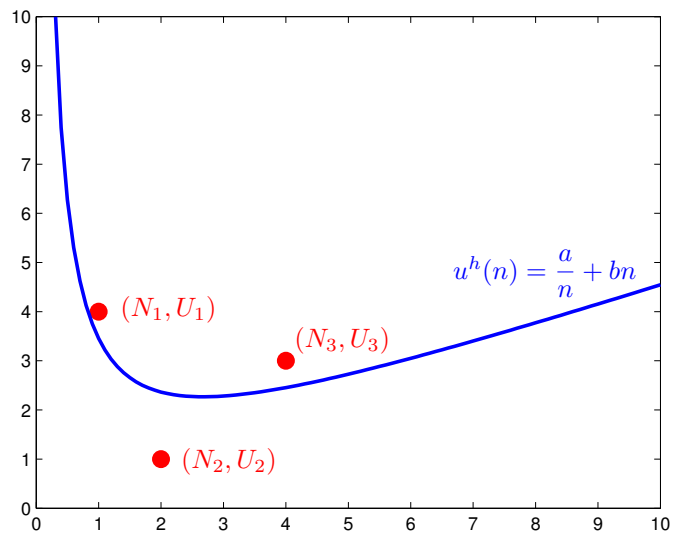
```
function [a,b] = theUlaw(N,U)
m = length(N);
A = [sum(1./(N.*N)) m ; m sum(N.*N)];
b = [sum(U./N) ; sum(U.*N)];
x = A \ b;
a = x(1); b = x(2);
```

Toutefois comme l'opérateur \backslash fournit directement une solution aux moindres carrés, une autre implémentation parfaitement valable est donnée par :

```
function [a,b] = theUlaw(N,U)
A = [1./N' N'];
x = A \ U';
a = x(1); b = x(2);
```

Attention : l'écriture $[a \ b] = A \backslash U'$ est incorrecte !

Quelques étudiants ont ainsi raté le vingtième point à cause de cette petite erreur de syntaxe.



6. Finalement, quel est le nombre optimal de coqs à produire par jour en fonction de a et b ?
Ne pas calculer la valeur numérique ici !

Il suffit de trouver n qui annule la dérivée du coût unitaire.

$$\left(u_h\right)'(n) = -\frac{a}{n^2} + b = 0$$

Le nombre optimal de coq est donc :

$$n = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{50}{7}}$$

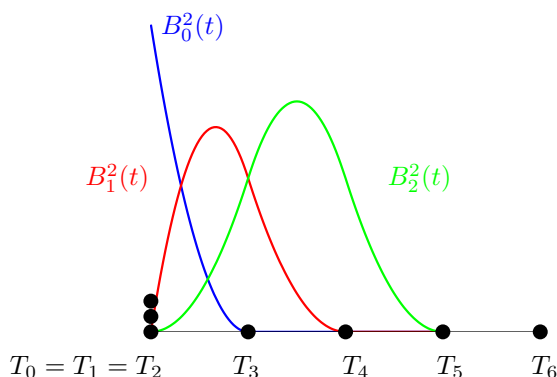
La valeur numérique (non demandée) est 2.67 coqs : il faut donc produire deux ou trois coqs.

Ce qui était assez évident en regardant les données !

Pas mal d'étudiants ne répondent pas à cette question qui était pourtant totalement élémentaire !

Pour rappel, les points faciles à gagner ne sont pas d'office à la première sous-question !

7. Esquisser¹ les fonctions $B_0^2(t)$, $B_1^2(t)$ et $B_2^2(t)$ pour les noeuds $[T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6] = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 4]$.
Sur votre dessin, indiquer les valeurs des ordonnées lorsque les abscisses correspondent aux noeuds.



Il ne faut pas un dessin précis, mais il est requis que les 3 fonctions n'aient pas de point d'inflexion. Il faut que $B_0^2(0) = 1$ et que la courbe $B_2^2(t)$ soit approximativement symétrique.

Comme d'habitude, pas mal d'étudiants échouent dans cette question...

La pondération (approximative) des sept sous-questions était respectivement (1, 3, 3, 3, 4, 2, 4).

Conclusion : l'interrogation était vraiment assez facile et ne portait que sur le tout début de la matière du cours. Pourtant, beaucoup d'étudiants échouent sur une question qui est une simple variation du premier exercice élémentaire sur l'approximation. Beaucoup d'étudiants font aussi des erreurs d'algèbre totalement impardonnables.

Finalement, la moyenne n'est pas exceptionnelle, bien qu'il y a un nombre assez élevé d'étudiants qui ont vraiment très bien réussi cette interrogation (au dessus de 17/20 :-)

Le roi des bleus 2012 a obtenu 5/20, mais il est déjà en seconde bac : ce qui n'est pas mal.

¹Certains esprits mesquins me feront remarquer que ceci n'a strictement aucun rapport avec le reste de la question. D'abord, c'est faux car le coq wallon peut être modélisé par des NURBS.

Ensuite, pensez à tous ces étudiants qui ont passé la nuit à étudier ces stupides NURBS et qui auraient été déçus :-)

Et puis, finalement pourquoi pas ?