EPL	
S8 : novembre 2014	*Méthodes numériques*
FSAB1104	**Solution**

La règle de Charles :-)

Pour calculer une intégrale sur l'intervalle $[-h, h]$, notre ami Charles vient de découvrir avec joie une nouvelle formule dite non-indexée :

$$\int_{-h}^{h} u(x)\ dx \ \approx\ \frac{h}{2}\Big(3U_{-h/3} + U_h\Big)$$

L'implémentation sous MATLAB de cette quadrature sur l'intervalle $[-1, 1]$ peut s'écrire :

```
function I = QuadratureCharles(u)
X = [-1.0/3.0 1.0];
W = [ 1.5     0.5];
I = sum(u(X).*W);
end
```

Charles introduit alors une nouvelle méthode composite de crise pour effectuer l'intégration numérique d'une fonction sur $[-1, 1]$. On partage cet intervalle en n sous-intervalles égaux de longueur $2h$ avec $h = 1/n$. Sur chaque sous-intervalle, on utilise la règle dite non-indexée. En utilisant 10 et 20 sous-intervalles, Charles a obtenu I_{2h} et I_h comme estimation de l'intégrale I de $u(x)$ sur $[-1, 1]$ avec $h = 1/10$.

Charles ignore quasiment tout de la mystérieuse fonction $u(x)$ qui contiendrait le nombre de numéros INAMI qui seront attribués aux étudiants en médecine de dernière année, en fonction d'une variable encore plus mystérieuse x. Par contre, son amie Maggie lui a dit qu'il existe des constantes C_i qui bornent les valeurs absolues de la dérivée i-ème sur l'intervalle considéré.

1. En effectuant des développements en série de Taylor autour de l'origine,
   obtenir l'ordre de précision de I_h obtenue avec la méthode composite de Charles

   On écrit tout simplement

   $$u(x) = U_0 + xU_0' + \frac{x^2}{2}U_0'' + \frac{x^3}{6}U_0''' + \frac{x^4}{24}U_0'''' + \ldots$$

   Pour obtenir l'ordre de l'erreur locale sur chaque intervalle,
   il faut utiliser tout simplement ce développement dans les deux parties de la formule de Charles.

   Dans une première étape, on intègre ce développement sur l'intervalle $[-h, h]$.

   $$\int_{-h}^{h} u(x)dx \quad = \quad 2h\ U_0 + \frac{h^3}{3}\ U_0'' + \frac{h^5}{60}\ U_0'''' \ldots$$

Dans une seconde étape, on utilise ce développement pour exprimer $U_{-h/3}$ et U_h.

$$
\begin{aligned}
\tfrac{h}{2}\Big(3U_{-h/3}+U_h\Big) &= \frac{h}{2}\,3\quad\Big[\,U_0-\frac{h}{3}\,U_0^{'}+\frac{h^2}{18}\,U_0^{''}-\frac{h^3}{27\times 6}\,U_0^{'''}+\frac{h^4}{81\times 24}U_0^{''''}\ldots\Big]\\
&\quad+\frac{h}{2}\quad\Big[\,U_0+h\,U_0^{'}+\frac{h^2}{2}\,U_0^{''}+\frac{h^3}{6}\,U_0^{'''}+\frac{h^4}{24}\,U_0^{''''}\ldots\Big]\\
&\Big\downarrow\\
&= 2h\,U_0+\frac{h}{2}\left[\frac{h^2}{6}+\frac{h^2}{2}\right]U_0^{''}+\frac{h}{2}\left[\frac{h^3}{6}-\frac{h^3}{54}\right]U_0^{'''}+\frac{h}{2}\left[\frac{h^4}{27\times 24}+\frac{h^4}{24}\right]U_0^{''''}\ldots\\
&= 2h\,U_0+\frac{h^3}{3}\,U_0^{''}+\frac{2h^4}{27}\,U_0^{'''}+\frac{7h^5}{324}\,U_0^{''''}\ldots
\end{aligned}
$$

On conclut :

$$
\boxed{\begin{aligned}\int_{-h}^{h}u(x)dx &= \tfrac{h}{2}\Big(3U_{-h/3}+U_h\Big)-\tfrac{2h^4}{27}\,U_0^{'''}\ldots\\ &\text{\textit{L'ordre de la méthode composite de Charles est trois !}}\end{aligned}}
$$

De manière inhabituelle, la totalité de la difficulté de cette interrogation consistait à faire minutieusement cette première question. Si cela était fait avec soin, tout le reste était obtenu de manière quasi immédiate.

Notons toutefois que le calcul des termes en h^5 n'était utile que pour la toute dernière question réservée aux étudiants qui voulaient absolument obtenir le maximum : il n'était donc pas essentiel de consacrer immédiatement toute son énergie à calculer par exemple le dernier facteur...

2. Obtenir l'expression de l'erreur $I - I_h$ en fonction de h et des constantes de Maggie.

On obtient immédiatement :

$$
\boxed{\begin{aligned}I-I_h &= n\,\frac{2h^4}{27}C_3\\ &\Big\downarrow\ \text{\textit{Car on a nh = 1 :-)}}\\ &= \frac{2h^3}{27}C_3\end{aligned}}
$$

3. Quel est le degré de précision de la méthode composite de Charles ?

Comme le terme d'erreur fait intervenir une dérivée troisième uniquement, on intègre exactement un polynôme de degré deux. On pourrait ici penser qu'on gagnera automatiquement un degré car l'intégrale d'un terme impair en x^3 est nulle. Il n'en est rien ici car la règle de Charles est assez mal foutue et n'est pas symétrique : intégrer x^3 avec Charles sur un intervalle symétrique ne produit pas un résultat nul ! Cela n'a évidemment aucun rapport avec l'indexation, mais cela prouve qu'écrire des formules d'intégration non symétrique et non indexée est nul :-)

En d'autres mots, Charles a perdu le degré bonus. Degré bonus qu'un paquet d'étudiants lui attribuaient stupidement avec une gentillesse bien sympathique mais totalement inappropriée. Finalement, était bien valable la règle usuelle disant que le degré de précision est obtenu en prenant l'ordre de précision diminué :-)

Il suffit donc juste de dire : **Le degré de précision de la méthode composite est deux !**

4. Ecrire une fonction MATLAB :

   `I = CompositeCharles(u,n)`

   qui divise $[-1,1]$ en n sous-intervalles égaux et qui applique la règle de Charles à deux points dans chaque sous-intervalle pour obtenir I_h avec $h = 1/n$.

   Une implémentation possible est :

```
function I = compositeCharles(u,n)
    h = 1/n;  I = 0.0;
    X = -[4*h/3.0+1.0 1.0];
    W =  (h/2.0)*[3.0 1.0];
    for i=1:n
        X = X + 2*h;
        I = I + sum(u(X).*W);
    end
end
```

   Il n'est pas indispensable d'avoir le code le plus efficace, mais il doit être correct : ce qui est important est la gestion de la translation des abscisses sur chaque intervalle de la méthode composite. Il est possible de vectoriser le code en créant directement un vecteur avec toutes les abscisses, mais ce n'était pas vraiment indispensable :-)

5. Calculer α et β afin que la combinaison linéaire $I_{extr} = \alpha I_{2h} + \beta I_h$ fournisse la meilleure estimation possible de l'intégrale exacte.

   Comme il s'agit d'éliminer un terme d'ordre 3, on écrit :

$$\boxed{I_{extr} \quad = \quad \frac{\Big(8I_h - I_{2h}\Big)}{7}}$$

   L'erreur de cette extrapolation sera en $\mathcal{O}(h^4)$,
   car il y a des termes impairs dûs au caractère non-symétrique de la formule de Charles.

6. (***) Donner l'expression de l'erreur de I_{extr}.

Il suffit de faire la combinaison linéaire du terme d'erreur en h^4 respectivement pour h et $2h$.

$$I - I_{extr} \quad = \quad \left[\frac{8}{7}\frac{7}{324}h^4 - \frac{1}{7}\frac{7}{324}(2h)^4\right]C_4 - \left[\frac{8}{7}\frac{1}{60}h^4 - \frac{1}{7}\frac{1}{60}(2h)^4\right]C_4$$

$$\downarrow$$

$$= \quad \left[\frac{8}{420} - \frac{8}{324}\right] h^4\ C_4 \ = \ \left[\frac{2}{105} - \frac{2}{81}\right] h^4\ C_4 \ = \ -\frac{48}{8505}\ h^4\ C_4$$

Et on conclut donc : $\boxed{E_{extr} \;=\; \dfrac{48}{8505}\; h^4\; C_4}$

Après réflexion et grâce à Charlotte Frenkel, je puis maintenant comprendre qu'aucun étudiant a trouvé cette jolie fraction :-)

La pondération (approximative) des six sous-questions était respectivement $(6, 3, 2, 3, 3, 3)$.
L'interrogation était sans doute plus difficile que les années précédentes. L'essentiel devait être fait dès la première sous-question : il n'y avait pas vraiment de questions faciles, même si l'éternelle extrapolation de Richardson et le degré de précision étaient des points qui pouvaient être facilement obtenus.. Conclusion, la plupart des étudiants échouent sur une question qui est finalement une application assez élémentaire du développement de Taylor. Ceci dit, l'enseignant a peut-être été un peu plus pervers en rédigeant la question que d'habitude !

Finalement, la moyenne n'est vraiment pas très bonne et le taux d'échecs est largement supérieur à l'habitude, bien qu'il y a quelques étudiants qui ont vraiment très bien réussi cette interrogation (au dessus de 17/20 :-)
Preuve que la question était sans doute trop difficile, personne n'a obtenu 20/20 : ce qui n'est plus arrivé depuis près de dix ans ! Donc, si vous avez échoué, vous pouvez toujours vous dire que c'est la faute du professeur qui était trop vicieux. Mais, essayez aussi de comprendre pourquoi vous êtes tombés dans le piège d'une question qui était écrite de manière un peu complexe et où on ne savait plus très bien ce que représentait h*. La prochaine fois, il ne faudra plus vous faire avoir :-)*