FSAB1104 : solution de l'examen de janvier 2015

1 Un petit logarithme :-)

Pour obtenir une estimation de ln(2), nous allons calculer

$$I = \int_a^b \frac{1}{x}\ dx$$

en utilisant la méthode composite des trapèzes avec $[a, b] = [1, 2]$.

1. Démontrer que la règle d'intégration du trapèze sur un intervalle $[a, b]$ correspond à l'intégration d'une interpolation polynomiale $u^h(x)$ de la fonction à intégrer $u(x)$.

   Tout d'abord, on écrit simplement l'interpolation linéaire passant par a et b :

   $$u^(x) = U_a\ \frac{b-x}{b-a} + U_b\ \frac{x-a}{b-a}$$

   Et ensuite, on effectue l'intégration de cette interpolation...

   $$\begin{aligned} I_h &= \int_a^b u^h(x)dx &&= \frac{U_a}{b-a}\int_a^b b-x\ dx + \frac{U_b}{b-a}\int_a^b x-a\ dx \\ & &&= \frac{U_a}{b-a}\left[bx - \frac{x^2}{2}\right]_a^b + \frac{U_b}{b-a}\left[\frac{x^2}{2} - ax\right]_a^b \\ & &&= \frac{U_a}{b-a}\ \frac{(b-a)^2}{2} + \frac{U_b}{b-a}\ \frac{(b-a)^2}{2} \end{aligned}$$

   On retrouve bien la règle du trapèze : $\boxed{I_h \quad = \quad (U_a + U_b)\ \frac{(b-a)}{2}}$

   Une explication basée sur un petit dessin d'un trapèze est admise, mais un propos totalement vague n'est pas accepté. Faire le calcul pour l'exemple du logarithme ne répond pas à la question !

2. Obtenir une jolie fraction proche de ln(2) en utilisant cette quadrature avec deux intervalles.

   $$\int_a^b \frac{1}{x}\ dx \quad \approx \quad \frac{b-a}{4}\left(u(a) + 2u\left(\frac{a+b}{2}\right) + u(b)\right)$$

   $$\ln(2) \quad = \quad \int_1^2 \frac{1}{x}\ dx \quad \approx \quad \frac{1}{4}\left(1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right) \quad = \quad \frac{1}{4}\left(\frac{6+8+3}{6}\right)$$

On conclut tout simplement : $\boxed{\ln(2) \quad \approx \quad \dfrac{17}{24}}$

La calcul est élémentaire, mais il faut vraiment obtenir le résultat final et de manière très surprenante, tous les étudiants n'arrivent pas à obtenir cela !

3. Sachant que l'erreur d'intégration de la méthode composite des trapèzes satisfait la relation

$$|E^h| \ \leq \frac{C_2(b-a)}{12}\ h^2,$$

calculer le nombre d'intervalles requis à utiliser pour obtenir une erreur absolue inférieure ou égale à 10^{-8} pour le calcul d'une estimation de $\ln(2)$. Justifier votre réponse !

En sachant que $nh = (b-a)$, il suffit de choisir n tel que :

$$|E^h| \ \leq \ \frac{C_2(b-a)^3}{12n^2} \quad \leq \quad 10^{-8}$$

$\Big\downarrow$ *Car la valeur maximale de $u''(x) = \dfrac{2}{x^3}$ vaut 2 sur l'intervalle $[1,2]$.*

$$\frac{1}{6n^2} \quad \leq \quad 10^{-8}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\frac{10^4}{\sqrt{6}} \quad \leq \quad n$$

Et on obtient le nombre requis d'intervalles : $\boxed{n \quad \geq \quad 4083}$

Le calcul est élémentaire et il était vraiment requis ici de réellement estimer C_2 par une valeur numérique. Le correcteur a été très déçu par la difficulté que rencontrent vraiment beaucoup trop d'étudiants pour dériver deux fois un logarithme et borner cette dérivée sur un intervalle élémentaire. Il faut donc bien obtenir une valeur numérique du bon ordre et faire tout le calcul !

2 Charlie veut faire de l'ordre trois !

Charlie veut résoudre une équation différentielle de degré trois :

$$u'''(t) - 2u''(t) + u'(t) = \cos(t)$$

avec les conditions initiales $u(0) = u'(0) = u''(0) = 1$.

1. Ecrire ce problème comme un système de trois équations différentielles du premier ordre.
Les trois fonctions inconnues seront notées $u(t)$, $v(t)$ et $w(t)$ respectivement.
Préciser les trois conditions initiales.

   En définissant $v(t) = u'(t)$ et $w(t) = u''(t)$,

on obtient immédiatement :
$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & v(t) \\ v'(t) & = & w(t) \\ w'(t) & = & 2v(t) - w(t) + \cos(t) \end{array}\right.}$$

Les conditions initiales sont $u(0) = v(0) = w(0) = 1$.

2. Ecrire les relations de récurrence permettant d'obtenir U_{i+1}, V_{i+1} et W_{i+1} à partir de U_i, V_i et W_i pour une méthode d'Euler explicite avec un pas de temps h. Les données initiales sont notées U_0, V_0 et W_0. Le temps correspondant à l'itération i est $T_i = ih$.

Le schéma d'Euler explicite est :
$$\boxed{\begin{array}{rcl} U_{i+1} & = & U_i + hV_i \\ V_{i+1} & = & V_i + hW_i \\ W_{i+1} & = & W_i + h\Big(2W_i - V_i + \cos(T_i)\Big) \end{array}}$$

Les conditions initiales sont $U_0 = V_0 = W_0 = 1$. Il existe d'autres possibilités en faisant des combinaisons linéaires des trois équations, mais il faut vraiment être un peu tordu pour imaginer cela. C'est une extension purement mécanique d'un exemple fait au cours et cela a posé pas mal de difficultés à beaucoup d'étudiants.

3. Ajouter les termes adéquats à ces trois relations pour avoir une méthode de Taylor d'ordre deux.

Pour obtenir une méthode de Taylor d'ordre deux, il faut ajouter :
$$\begin{array}{rl} \cdots & + \quad \dfrac{h^2}{2}V_i' \\ \cdots & + \quad \dfrac{h^2}{2}W_i' \\ \cdots & + \quad \dfrac{h^2}{2}\Big(2W_i' - V_i' - \sin(T_i)\Big) \end{array}$$

Comme $v'(t) = w(t)$ et $w'(t) = 2v(t) - w(t) + \cos(t)$, on peut écrire simplement :
$$\begin{array}{rl} \cdots & + \quad \dfrac{h^2}{2}W_i \\ \cdots & + \quad \dfrac{h^2}{2}\Big(2W_i - V_i + \cos(T_i)\Big) \\ \cdots & + \quad \dfrac{h^2}{2}\Big(2\Big(2W_i - V_i + \cos(T_i)\Big) - W_i - \sin(T_i)\Big) \end{array}$$

Le schéma de Taylor est donc défini par :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} U_{i+1} & = & U_i + hV_i + \dfrac{h^2}{2} W_i \\[2ex] V_{i+1} & = & V_i + hW_i + \dfrac{h^2}{2}\Big(2W_i - V_i + \cos(T_i)\Big) \\[2ex] W_{i+1} & = & W_i + h\Big(2W_i - V_i + \cos(T_i)\Big) + \dfrac{h^2}{2}\Big(3W_i - 2V_i + 2\cos(T_i) - \sin(T_i)\Big) \end{array}}$$

Il est indispensable de faire le calcul complet et d'obtenir une expression correcte du terme en rouge pour être crédité de l'ensemble des points. Ici,l'algèbre est élémentaire et vous aviez largement le temps de la faire avec calme et précision. Certains étudiants devraient noter la dérivée du cosinus sur leur formulaire :-)

Attention, la méthode de Heun est équivalent à la méthode de Taylor d'ordre deux uniquement pour des problèmes linéaires homogènes : ce qui n'est pas le cas ici. Me raconter plein de jolies histoires et me donner un programme MATLAB Heun à la place de ce qui est demandé, n'était pas une bonne idée... Se méfier des réponses qui semblent trop simples, même si parfois les énoncés des examens souffrent de petites coquilles de l'enseignant !

4. Ecrire le programme MATLAB qui effectue `n` itérations de la méthode de Taylor d'ordre deux. Le vecteur `T` de taille $n+1$ contiendra l'ensemble de temps discrets et la matrice `U` de taille $3 \times (n+1)$ contiendra l'ensemble des valeurs discrètes des fonctions u, v et w.

```
function [T,U] = taylorSystem(n,h)
```

Une implémentation possible est :

```
function [T,U] = taylorSystem(n,h)
T = h*(0:n);
U = ones(3,n+1);
for i = 1:n
    u = U(1,i); v = U(2,i); w = U(3,i); t = T(i);
    f = 2*w - v + cos(t); df = 2*f - w - sin(t);
    U(1,i+1) = U(1,i) + h*v + h*h*w/2;
    U(2,i+1) = U(2,i) + h*w + h*h*f/2;
    U(3,i+1) = U(3,i) + h*f + h*h*df/2;
end
```

Fournir l'implémentation d'une autre méthode n'était vraiment pas une bonne idée et ne rapportait rien ! C'est juste une perte de temps et d'énergie. Il était essentiel d'observer qu'il fallait fournir `f` *et* `df`*. C'était aussi utile de veiller à ne pas calculer deux fois la dérivée* `f`*. Se contenter d'écrire la méthode d'Euler explicite est évidemment totalement insuffisant !*

Même si vous n'avez pas tous les termes requis dans la question précédente, il est possible d'écrire la plus grande partie réellement utile de ce programme !

5. (**) Ecrire les relations de récurrence de la méthode de Taylor d'ordre trois fera le bonheur complet de Charlie !

Pour obtenir une méthode de Taylor d'ordre trois, il faut ajouter :

$$\begin{aligned}
\cdots &+ \frac{h^3}{6} W_i' \\
\cdots &+ \frac{h^3}{6}\Big(2W_i' - V_i' - \sin(T_i)\Big) \\
\cdots &+ \frac{h^3}{6}\Big(3W_i' - 2V_i' - 2\sin(T_i) - \cos(T_i)\Big)
\end{aligned}$$

Comme $v'(t) = w(t)$ et $w'(t) = 2v(t) - w(t) + \cos(t)$, on peut écrire simplement :

$$\begin{aligned}
\cdots &+ \frac{h^3}{6}\Big(2W_i - V_i + \cos(T_i)\Big) \\
\cdots &+ \frac{h^3}{6}\Big(2\Big(2W_i - V_i + \cos(T_i)\Big) - W_i - \sin(T_i)\Big) \\
\cdots &+ \frac{h^3}{6}\Big(3\Big(2W_i - V_i + \cos(T_i)\Big) - 2W_i - 2\sin(T_i) - \cos(T_i)\Big)
\end{aligned}$$

Les trois termes supplémentaires sont donc :

$$\boxed{\begin{aligned}
\cdots &+ \frac{h^3}{6}\Big(2W_i - V_i + \cos(T_i)\Big) \\
\cdots &+ \frac{h^3}{6}\Big(3W_i - 2V_i + 2\cos(T_i) - \sin(T_i)\Big) \\
\cdots &+ \frac{h^3}{6}\Big(4W_i - 3V_i + 2\cos(T_i) - 2\sin(T_i)\Big)
\end{aligned}}$$

Il est indispensable de faire le calcul complet et d'obtenir une expression correcte du terme en rouge pour être crédité de l'ensemble des points : pas mal d'étudiants y sont parvenus. Oui, c'est de l'algèbre un peu bêtifiante, je le reconnais bien volontiers, mais il faut vraiment de tout pour faire le bonheur de Charlie. Notons au passage que les deux premiers termes d'ordre trois sont simplement les deux derniers termes d'ordre deux. Il ne fallait donc en réalité que calculer deux termes en tout et pour tout pour faire le bonheur complet de Charlie !

3 Une méthode spéciale pour des intégrales pondérées

Considérons l'intégrale pondérée d'une fonction u quelconque multipliée par le cosinus. En d'autres mots, on peut dire que le cosinus est *la fonction de pondération*

Il s'agit maintenant de trouver des méthodes numériques particulières pour ce type d'intégrale en écrivant une formule de quadrature sous la forme :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} u(x)\ \cos(x)\ dx \ = \ I \ \approx \ I^h \ = \ a_1\ u(X_1) + a_2\ u(X_2)$$

où les deux abscisses X_1 et X_2, ainsi que les deux poids a_1 et a_2 doivent être choisis judicieusement. Les bornes d'intégration sont toujours $-\pi/2$ et $\pi/2$.

Le degré de précision pondérée de ces méthodes numériques est défini comme le nombre entier positif d tel que l'erreur d'intégration pondérée d'un polynôme u soit nulle pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à d mais soit non nulle pour au moins un polynôme de degré $d+1$.

1. (***) I Montrer qu'il est impossible que le degré de précision pondérée de la méthode proposée puisse être supérieur ou égal à quatre.

   Il suffit de prendre comme polynôme :

   $$u(x) = (x - X_1)^2 (x - X_2)^2$$

   qui est une fonction toujours positive sur l'intervalle et qui ne s'annule qu'en X_1 et X_2. La fonction cosinus étant strictement positive sur l'intervalle, on en déduit que l'intégrale exacte doit être strictement positive, alors que la formule de quadrature fournira toujours un résultat nul. Ce contre exemple démontre de manière indiscutable qu'il était impossible que le degré de précision pondérée soit égal à quatre !

   Moi qui pensait naïvement que c'était simple. Un seul étudiant a trouvé mon contre-exemple : toutes mes félicitations à ce petit malin qui a malheureusement piteusement échoué dans la suite de la question. Bon, il était aussi possible qu'observer qu'on avait quatre paramètres et qu'un polynôme de degré quatre a cinq degrés de libertés : il est possible de montrer que la cinquième relation ne sera quasiment jamais satisfaite...

   C'était vraiment compliqué et j'aurais dû mettre la question tout à la fin, mais j'espérais que vous trouviez le contre exemple plus facilement : eh oui :-)
   J'ai donc ajouté des étoiles dans la solution : ce qui n'était pas présent dans l'énoncé.

2. Déterminer les valeurs des poids et des points pour que le degré de précision pondérée soit trois.

   Il faut calculer les deux poids et abscisses afin que la quadrature fournisse des valeurs exactes pour $u(x) = 1$, $u(x) = x$, $u(x) = x^2$ et $u(x) = x^3$. C'est exactement le même raisonnement que nous avons fait pour Gauss-Legendre, il faut uniquement ajouter le cosinus et bien observer que ce cosinus est toujours positif, pair (et donc symétrique) sur l'intervalle considéré. On fera donc les mêles simplifications et on obtiendra un résultat très proche de ce qu'on a obtenu avec Gauss-Legendre.

   $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\ dx = a_1 + a_2 \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\ \cos(x)\ dx = a_1X_1 + a_2X_2$$

   $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\ \cos(x)\ dx = a_1X_1^2 + a_2X_2^2 \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3\ \cos(x)\ dx = a_1X_1^3 + a_2X_2^3$$

   Ecrire les équations était une partie importante de la réponse, il suffisait ensuite de calculer les quatre intégrales.

   - *Les deux intégrales impliquant x et x^3 sont nulles par symétrie !*
   - *Normalement, on obtient très facilement :*

     $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\ dx = \Big[\sin(x)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2$$

   - *La dernière intégrale est un tout peu plus compliquée à obtenir :*

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\ dx &= \Big[x^2 \sin(x)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2x\ \sin(x)\ dx \\
&= \frac{\pi^2}{2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2x\ \sin(x)\ dx \\
&= \frac{\pi^2}{2} + \Big[2x \cos(x)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\ \cos(x)\ dx \\
&= \frac{\pi^2}{2} + 4
\end{aligned}$$

Les quatre équations sont :
$$\boxed{\begin{aligned}
2 &= a_1 + a_2 \\
0 &= a_1 X_1 + a_2 X_2 \\
\frac{\pi^2}{2} + 4 &= a_1 X_1^2 + a_2 X_2^2 \\
0 &= a_1 X_1^3 + a_2 X_2^3
\end{aligned}}$$

Avec $X_1 = -X_2$ et $a_1 = a2 = 1$, la dernière et les deux premières équations sont satisfaites. La troisième équation se réduit simplement à

$$\frac{\pi^2}{2} + 4 = 2X_1^2$$

On obtient finalement :
$$\boxed{X_1 = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 2}, \qquad X_2 = -\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 2},}$$

Si beaucoup d'étudiants échouent à cette question un peu plus compliquée, il y a quand-même un nombre non négligeable (plus ou moins un quart des étudiants) qui arrivent au résultat final correct. Cela a plutôt été une bonne surprise pour moi. Par contre, honte à tous ceux qui sont incapables d'intégrer la fonction cosinus entre $-\pi/2$ et $\pi/2$: ça c'est vraiment pas bien du tout et il y a un nombre vraiment incompréhensible d'étudiants qui ne savent pas (ne veulent pas ?) faire cela une fois comme on dit chez moi :-)

3. Ecrire un programme MATLAB qui implémente cette méthode pour une fonction `u`. Les autres arguments `a` et `X` sont des vecteurs de taille deux contenant les poids et les abscisses de la méthode.

   C'était honteusement simple....

   ```
   function I = weightedIntegral(u,a,X)
   I = u(X(1))*a(1) + u(X(2))*a(2);
   end;
   ```

   Les étudiants qui ont implémenté une méthode composite n'ont pas été pénalisés. Quelques petits futés ont remarqué que c'était une idée stupide de vouloir faire une méthode composite : c'est très bien vu. Bon, avoir voulu ajouter cette dernière sous-question était une mauvaise idée. Oui, oui je le reconnais et donc il n'y avait quasiment aucun point associé à cette sous-question :-)