FSAB1104 : solution de l'examen de janvier 2016

1 Orbite d'une planète mystérieuse

Une planète se déplace suivant une orbite décrite par un paramètre inconnu a. On dispose toutefois de $n = 3$ mesures approchées du rayon de l'orbite R_i pour diverses valeurs de l'angle Θ_i et on connaît la relation exacte liant le rayon et l'angle de l'orbite :

$$r(\theta) = \frac{10}{6 - a\cos(\theta) + \cos(\theta)}$$

Θ_i	R_i
0	5
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5}{3}$
π	0

On veut obtenir la meilleure estimation de a afin de minimiser la somme du carrés des n écarts $R_i - r(\Theta_i)$.

1. Ecrire l'équation $K(a) = 0$ que l'on doit annuler pour obtenir a en termes des n données.

   Il s'agit de minimiser la fonction suivante :

$$J(a) = \sum_{i=1}^{n} \left(R_i - \frac{10}{(6 - a\cos\Theta_i + \cos\Theta_i)} \right)^2$$

   et d'annuler sa dérivée première :

$$0 \quad = \quad J'(a) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} 2 \left(R_i - \frac{10}{(6 - a\cos\Theta_i + \cos\Theta_i)} \right) \left(\frac{10\cos\Theta_i}{(6 - a\cos\Theta_i + \cos\Theta_i)^2} \right)$$

   La réponse est donc
$$\boxed{K(a) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i \cos\Theta_i}{(6 - a\cos\Theta_i + \cos\Theta_i)^2} - 6 \sum_{i=1}^{n} \frac{10\cos\Theta_i}{(6 - a\cos\Theta_i + \cos\Theta_i)^3}}$$

   Ecrire $J(a)$ et non $K(a)$ est évidemment une erreur pour une question vraiment élémentaire :-)

2. Mettre en oeuvre la méthode de Newton-Raphson pour la résolution de cette équation à partir d'une estimation initiale a_0. Plus précisément, on vous demande de décrire comment on obtient une nouvelle estimation a_{k+1}, en termes des n données R_i et Θ_i et d'une estimation précédente a_k.

   Le schéma de Newton-Raphson s'écrit :

   On calcule a_{k+1} à partir de a_k avec

$$\boxed{\begin{aligned} K'(a_k)\ \Delta a &= -K(a_k) \\ a_{k+1} &= a_k + \Delta a \end{aligned}}$$

   avec la dérivée :
$$K'(a) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{2R_i \cos^2\Theta_i}{(6 - a\cos\Theta_i + \cos\Theta_i)^3} - 6 \sum_{i=1}^{n} \frac{30\cos^2\Theta_i}{(6 - a\cos\Theta_i + \cos\Theta_i)^4}$$

3. Calculer la valeur a_1 en partant de $a_0 = 5$.

   Il suffit de calculer :

$$\begin{array}{rcl} K(5) & = & \left(\frac{5}{4}\right) - \left(\frac{10}{8} - \frac{10}{1000}\right) \quad = \quad \frac{1}{100} \\ K'(5) & = & \left(\frac{10}{8}\right) - \left(\frac{30}{16} + \frac{30}{10000}\right) \quad = \quad \frac{-3-635}{1000} \quad = \quad -\frac{314}{500} \end{array}$$

   On peut finalement en déduire que : $\frac{1}{100}\ \Delta a \quad = \quad -\frac{314}{500}$.

   et écrire que : $\boxed{a_1 \quad = \quad 5 + \frac{5}{314} \quad = \quad \frac{1575}{314} \quad = \quad 5.016}$

   L'algèbre n'était vraiment pas calculatoire et était parfaitement faisable :-)
   Un nombre tout-à-fait honnête d'étudiants a obtenu la fraction finale.

Finalement, une option astucieuse choisie par quelques étudiants consistait à directement résoudre toute la question avec les données. Cela revient à écrire :

$$J(a) \quad = \quad \left(5 - \frac{10}{(7-a)}\right)^2 + \left(\frac{10}{(5+a)}\right)^2 \quad = \quad 25 - \frac{100}{(7-a)} + \frac{100}{(7-a)^2} + \frac{100}{(5+a)^2}$$

et à annuler la dérivée première :

$$0 \quad = \quad J'(a) \quad = \quad -\frac{100}{(7-a)^2} + \frac{200}{(7-a)^3} - \frac{200}{(5+a)^3}$$

Les étudiants qui ont procédé de la sorte n'ont pas été pénalisés, même si ce n'est pas l'approche qu'avait imaginé le concepteur de la question. Globalement, les calculs sont un peu plus simples surtout si on divise $K(a)$ par un facteur 50 avant de faire la somme des fractions ! Par contre, l'approche est moins générale et cette résolution peut donner l'impression d'être très calculatoire et un peu simpliste, j'en conviens :-)

2 Le train arrivera-t-il ?

Avec la condition initiale $u(0) = 2$, considérons le problème de Cauchy :

$$u'(t) = \underbrace{u(t) + \exp(2t)}_{f(t,u)}$$

1. Donner la solution analytique du problème de Cauchy.

   La solution du problème homogène est $C\exp(t)$ et une solution particulière du problème non-homogène est $exp(2t)$. La condition initiale permet de déduire immédiatement que $C = 1$.

   On conclut donc : $\boxed{u(t) \quad = \quad \exp(t) + \exp(2t)}$

   C'est vraiment une question élémentaire : ne pas trouver ceci est totalement impardonnable !

2. Démontrer rigoureusement que la formule du cheminot est une méthode d'ordre deux.

$$U_{i+1} = \frac{1}{3}\left(-U_{i-1} + 4U_i\right) + \frac{2h}{3}\, F_{i+1}$$

   Pour effectuer la démonstration, il suffit d'écrire les trois développements de Taylor :

$$\begin{aligned} & & U_{i-1} &= U_i - h\, U_i' + \frac{h^2}{2} U_i'' + \mathcal{O}(h^3) \\ & & U_{i+1} &= U_i + h\, U_i' + \frac{h^2}{2} U_i'' + \mathcal{O}(h^3) \\ F_{i+1} &= & U_{i+1}' &= U_i' + h\, U_i'' + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

   Ensuite, on les incorpore dans la formule du cheminot :

$$U_{i+1} = \frac{1}{3}\left(-U_{i-1} + 4U_i\right) + \frac{2h}{3}\, F_{i+1}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En remplaçant } U_{i+1},\ U_{i-1} \textit{ et } F_{i+1} \textit{ par leur développement}$$

$$U_i + h\, U_i' + \frac{h^2}{2} U_i'' + \mathcal{O}(h^3) = \underbrace{\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right)}_{=1} U_i + \underbrace{\left(\frac{h}{3} + \frac{2h}{3}\right)}_{=h} U_i' + \underbrace{\left(-\frac{h^2}{6} + \frac{2h^2}{3}\right)}_{=h^2/2} U_i'' + \mathcal{O}(h^3)$$

   En identifiant les termes, on observe donc une erreur locale en $\mathcal{O}(h^3)$ à chaque pas temps. L'erreur globale est donc en $\mathcal{O}(h^2)$ et la méthode est donc bien d'ordre deux.

   □

   Juste reconnaître la méthode de Gear d'ordre deux n'est pas une démonstration rigoureuse !
   Démontrer que l'erreur locale est en $\mathcal{O}(h^2)$ est évidemment une erreur impardonnable :-)

3. Calculer U_1 en effectuant une itération d'Euler explicite avec un pas $h = 1$.

   On applique simplement $U_1 = U_0 + hF_0$ avec $h = 1$.

   Et on conclut : $\boxed{U_1 \quad = \quad 2 + (2 + \exp(0)) \quad = \quad 5}$

4. Calculer ensuite U_2 en effectuant une itération du cheminot avec un pas $h = 1$.

   Il suffit à nouveau de simplement écrire la formule avec $h = 1$!

$$U_2 \quad = \quad \frac{1}{3}\Big(- U_0 + 4U_1\Big) + \frac{2}{3}\,\Big(U_2 + \exp(4)\Big)$$

$$\Big\downarrow$$

$$U_2 \quad = \quad \frac{18}{3} + \frac{2}{3}U_2 + \frac{2}{3}\exp(4)$$

   Et on conclut : $\boxed{U_2 \quad = \quad 18 + 2\exp(4) \quad = \quad 127.2}$

   Il est normal d'ignorer que $\exp(4) \approx 55$, il est pitoyable de ne pas savoir que $\exp(0) = 1$!
   Sans calculatrice, moi aussi je suis incapable d'obtenir 127 !
   Par contre, il fallait écrire $U_1 = 5$ pour recevoir le point pour la question d'Euler explicite !

5. Ecrire un programme qui effectue $n-1$ itérations du cheminot de pas h après une itération d'Euler.

```
function [T,U] = cheminot(n,h)
```

   Les vecteurs `T` et `U` de taille $n + 1$ contiendront $T_i = ih$ et $U_i \approx u(T_i)$ avec les indices $i = 0 \ldots n$.
   Le pas des itérations est `h`.

   Une implémentation possible est :

```
function [T,U] = cheminot(n,h)

   T = linspace(0,n*h,n+1)
   U = zeros(1,n+1);
   U(1) = 2;
   U(2) = 2 + h*exp(2*h);
   for i=3:n+1
        U(i) = (-U(i-2) + 4*U(i-1) + 2*h*exp(2*h*i))/ (3*(1-2*h/3));
   end

end
```

   Fournir l'implémentation d'une autre méthode n'était vraiment pas une bonne idée et ne rapportait rien ! Il faut évidemment utiliser un pas h pour l'itération d'Euler et ne pas bêtement utiliser la valeur numérique de 5 trouvée à la question précédente. Pour valider la question, la fraction dans l'itération du cheminot doit être correcte. Oublier de préallouer le vecteur `U` est une erreur !

3 Polynômes d'Hermite

Considérons une fonction u définie dans l'intervalle $[0, 1]$, on connaît les valeurs U_0, U_1 et les dérivées premières U'_0, U'_1 de cette fonction aux deux extrémités de l'intervalle. On définit ensuite une approximation u^h de u comme l'unique polynôme de degré trois

$$u^h(x) = U_0\ \phi_0(x) + U_1\ \phi_1(x) + U'_0\ \phi_2(x) + U'_1\ \phi_3(x)$$

tel que les valeurs et les dérivées premières de u et de u^h coïncident aux extrémités $x = 0$ et $x = 1$. Les quatre fonctions de base $\phi_i(x)$ sont les polynômes d'Hermite de degré trois.

1. Calculer les expressions[1] des quatre fonctions de base $\phi_i(x)$

Imposer $\phi_0(0) = 1$ *et* $\phi_1(0) = \phi_2(0) = \phi_3(0) = 0$ *permet d'obtenir* $U_0 = u^h(0)$.
Imposer $\phi_1(1) = 1$ *et* $\phi_0(1) = \phi_2(1) = \phi_3(1) = 0$ *permet d'obtenir* $U_1 = u^h(1)$.
Imposer $\phi'_0(0) = 1$ *et* $\phi'_1(0) = \phi'_2(0) = \phi'_3(0) = 0$ *permet d'obtenir* $U'_0 = (u^h)'(0)$.
Imposer $\phi'_1(1) = 1$ *et* $\phi'_0(1) = \phi'_2(1) = \phi'_3(1) = 0$ *permet d'obtenir* $U'_1 = (u^h)'(1)$.
Pour déterminer les 4 coefficients du polynôme $\phi_0(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$*, on dispose de quatre contraintes qu'il est très aisé d'écrire :*

$$\begin{array}{rcrcl}
\phi_0(0) & = & d & = & 1 \\
\phi'_0(0) & = & c & = & 0 \\
\phi_0(1) & = & a + b + c + d & = & 0 \\
\phi'_0(1) & = & 3a + 2b + c & = & 0
\end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{rcl}
a + b + 1 & = & 0 \\
3a + 2b & = & 0
\end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{rcl}
a - 2 & = & 0 \\
3a + 2b & = & 0
\end{array}$$

On déduit finalement que $a = 2$, $b = -3$ *et* $d = 1$. *Il était possible d'observer que le polynôme s'écrivait sous la forme* $(x - 1)^2(ex + f)$ *puisqu'il a une racine double en* $x = 1$ *: cela facilitait un peu les calculs. Par contre, utiliser mécaniquement les formules de Lagrange assurait une catastrophe automatique :-) Eh oui, pour une fois, il fallait résoudre le système pour trouver les quatre polynômes. Noter toutefois que les trois autres polynômes sont encore nettement plus faciles à obtenir et que le quatrième permettait de vérifier que l'on avait bien compris la démarche :-)*

En procédant de la même manière pour les trois autres polynômes,

on obtient :

$$\boxed{\begin{array}{rcl cl}
\phi_0(x) & = & (x-1)^2(2x+1) & = & 2x^3 - 3x^2 + 1 \\
\phi_1(x) & = & x^2(3-2x) & = & -2x^3 + 3x^2 \\
\phi_2(x) & = & x(x-1)^2 & = & x^3 - 2x^2 + x \\
\phi_3(x) & = & x^2(x-1) & = & x^3 - x^2
\end{array}}$$

[1] A titre d'encouragement, une partie de la réponse vous est fournie : $\phi_3(x) = x^2(x - 1)$

2. En intégrant ces polynômes, obtenir les quatre coefficients de la quadrature suivante :

$$\underbrace{\int_0^1 u(x)\ dx}_{I} \approx \underbrace{a\ U_0 + b\ U_1 + c\ U_0' + d\ U_1'}_{I^h}$$

Il suffit juste d'intégrer les quatre polynômes d'Hermite pour obtenir le résultat :-)

$$\begin{array}{lllllllll}
a & = & \displaystyle\int_0^1 \phi_0(x)\ dx & = & \left[\frac{2}{4}x^4 - \frac{3}{3}x^3 + x\right]_0^1 & = & \dfrac{1-2+2}{2} & = & \dfrac{1}{2} \\
b & = & \displaystyle\int_0^1 \phi_1(x)\ dx & = & \left[-\frac{2}{4}x^4 + \frac{3}{3}x^3\right]_0^1 & = & \dfrac{-1+2}{2} & = & \dfrac{1}{2} \\
c & = & \displaystyle\int_0^1 \phi_3(x)\ dx & = & \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 & = & \dfrac{3-8+6}{12} & = & -\dfrac{1}{12} \\
d & = & \displaystyle\int_0^1 \phi_2(x)\ dx & = & \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 & = & \dfrac{3-4}{12} & = & -\dfrac{1}{12}
\end{array}$$

Et on conclut donc : $\boxed{I^h = \frac{1}{2}\Big(U_0 + U_1\Big) + \frac{1}{12}\Big(U_0' - U_1'\Big)}$

Il est intéressant d'observer qu'imposer que la quadrature soit de degré trois (ce qui est assez prévisible :-) permettait d'obtenir exactement le même résultat ou de confirmer ce que vous aviez obtenu : on voit immédiatement que la quadrature sera exacte pour des polynômes de degré un à trois puisque $u^h(x)$ représente exactement n'importe quel polynôme de degré trois.

Cétait vraiment un calcul totalement élémentaire et il est vraiment impardonnable de ne pas obtenir les coefficients corrects : un peu d'intuition permettait de deviner assez facilement b lorsqu'on avait a pour pouvoir intégrer le polynôme constant. Vérifier que la règle de quadrature intègre parfaitement un polynôme de degré trois permettait également d'obtenir ces quatre coefficients même sans avoir les polynômes d'Hermite : vous aviez largement le temps de valider vos calculs et d'obtenir une réponse correcte ! Pas mal d'étudiants y sont d'ailleurs arrivé !

3. Quelle est le degré de précision de la quadrature obtenue ?

   Comme $u^h(x)$ sera une approximation parfaite de n'importe quel polynôme de degré trois, la règle d'intégration sera toujours de degré trois.

   Il suffisait donc tout simplement d'écrire : $\boxed{d = 3}$

   Il n'était pas nécessaire de justifier votre réponse : quand on ne demande pas quelque chose, il faut pas le faire ! Toutefois pour les inquiets, les angoissé, les incrédules, les malveillants et les sceptiques, on pouvait très aisément le vérifier en calculant :

$$
\begin{array}{lclclclcl}
I & = & \displaystyle\int_0^1 dx & = & 1 & = & \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+0-0 & = & I_h \\[2ex]
I & = & \displaystyle\int_0^1 x\ dx & = & \dfrac{1}{2} & = & 0+\dfrac{6}{12}+\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{12} & = & I_h \\[2ex]
I & = & \displaystyle\int_0^1 x^2\ dx & = & \dfrac{1}{3} & = & 0+\dfrac{6}{12}+0-\dfrac{2}{12} & = & I_h \\[2ex]
I & = & \displaystyle\int_0^1 x^3\ dx & = & \dfrac{1}{4} & = & 0+\dfrac{6}{12}+0-\dfrac{3}{12} & = & I_h \\[2ex]
I & = & \displaystyle\int_0^1 x^4\ dx & = & \dfrac{1}{5} & \neq & 0+\dfrac{6}{12}+0-\dfrac{4}{12}- & = & I_h
\end{array}
$$

Eh non : il y a pas de degré bonus car on utilise une polynôme de degré trois : c'est pas une règle de quadrature optimale puisqu'avec trois degrés de liberté, on pourrait obtenir le même degré de précision. Donc tous les étudiants qui attribuent bêtement un degré bonus ont reçu un malus correspondant dans leur note. Conclusion : écoute le professeur mais n'oublie pas qu'au jeu subtil du plus crétin, c'est toujours lui qui gagne !

L'examen était relativement facile puisque l'horaire vous était défavorable : c'était donc une mauvaise idée de faire l'impasse en consacrant tous ses efforts à l'examen de mathématiques-3. En septembre, l'examen de math sera toujours aussi difficile et celui de méthodes numériques n'aura plus aucune raison d'être aussi simple : eh oui !

Toutes mes félicitations aux 12 étudiants qui ont obtenu 20/20 : c'est un record absolu depuis très longtemps : décidément, l'enseignant devient trop gentil avec l'âge : faudra se reprendre avec Grégoire en mécanique des fluides.

Bonnes vacances à tous : soyez prudents sur vos skis et ne buvez pas trop après :-)