La mécanique d'un corps...

Trois principes fondamentaux !

Conservation de la quantité de mouvement
Conservation de l'énergie
Conservation du moment de la quantité de mouvement

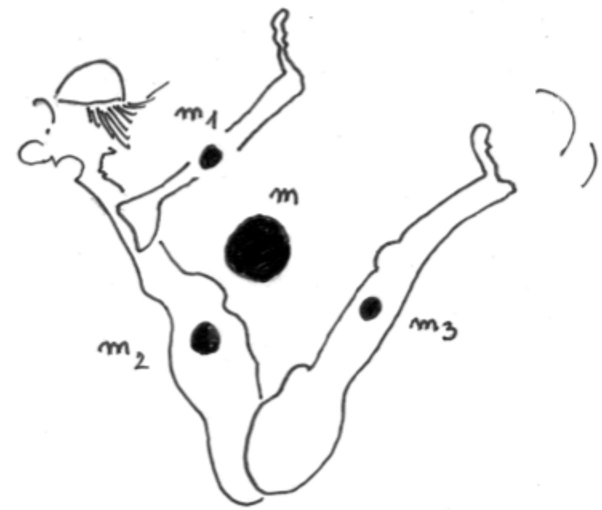
$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2 + \tfrac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$

La somme de moments de forces de gravité...

$$
\begin{aligned}
\sum m_i \, \vec{\mathbf{x}}(t) &= \sum m_i \, \vec{\mathbf{x}}_i(t) \\
0 &= \sum m_i \left(\vec{\mathbf{x}}_i(t) - \vec{\mathbf{x}}(t) \right) \\
0 &= \sum m_i \vec{\mathbf{g}} \times \underbrace{\left(\vec{\mathbf{x}}_i(t) - \vec{\mathbf{x}}(t) \right)}_{\vec{\mathbf{r}}_i(t)}
\end{aligned}
$$

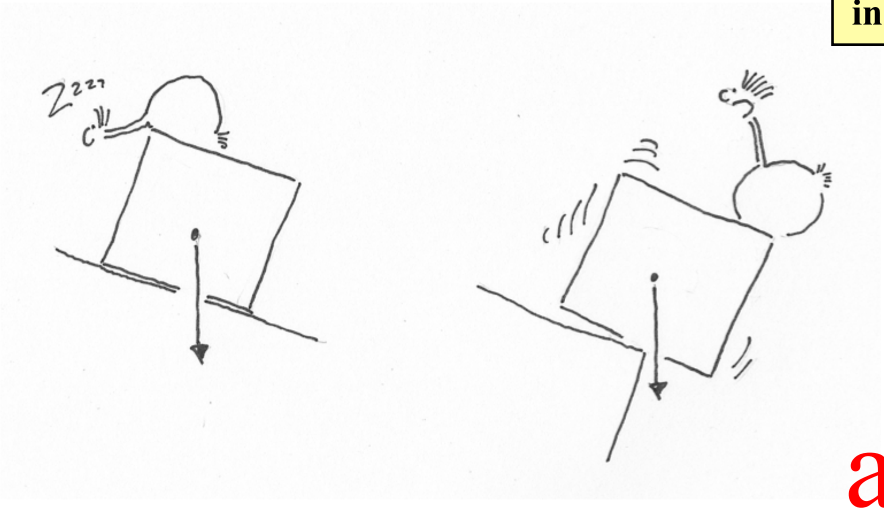


... par rapport au centre de gravité est nulle

La somme de moments de forces de gravité...

Le centre de gravité est le point d'application
de la résultante des forces de gravité !

La connaissance de la position du centre de gravité est indispensable pour déterminer la stabilité d'un objet !



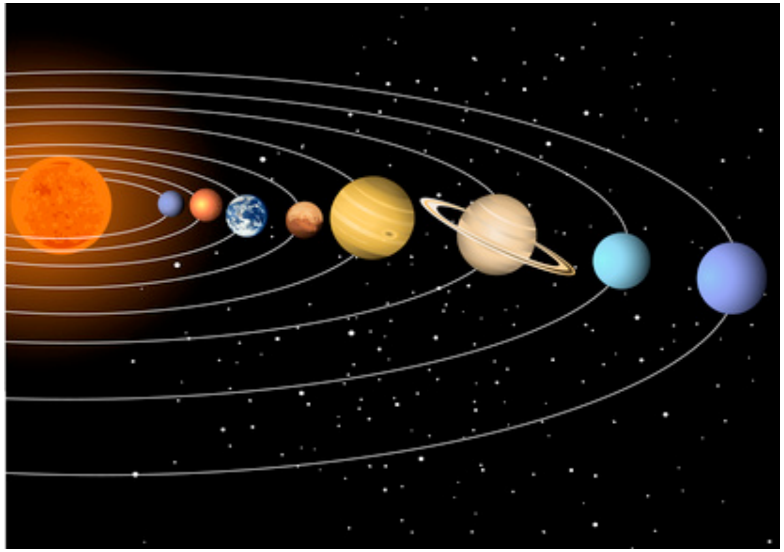
... par rapport au centre de gravité est nulle

Centre de gravité...

$$0 = \sum m_i \vec{\mathbf{g}}_i \times \left(\vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{x}}_{\text{gravité}} \right)$$

C'est différent uniquement si l'accélération de la gravité n'est pas constante !

Pour prédire le mouvement des planètes, c'est important !
Pour prédire le mouvement du corps humain, ce n'est vraiment pas bien important !



$$0 = \sum m_i \left(\vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{x}}_{\text{masse}} \right)$$

... et centre de masse

Moments

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

Forces

Bilan de la quantité de mouvement

La cause : la force !

Résistance au mouvement = masse

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)} = \boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}_i}$$

La conséquence : l'accélération !

Quelle est la voiture qui va accélérer le plus vite pour la même force motrice ?

La cause :
le moment de force !

Résistance à la rotation
= moment d'inertie

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right)} = \boxed{\sum M_i}$$

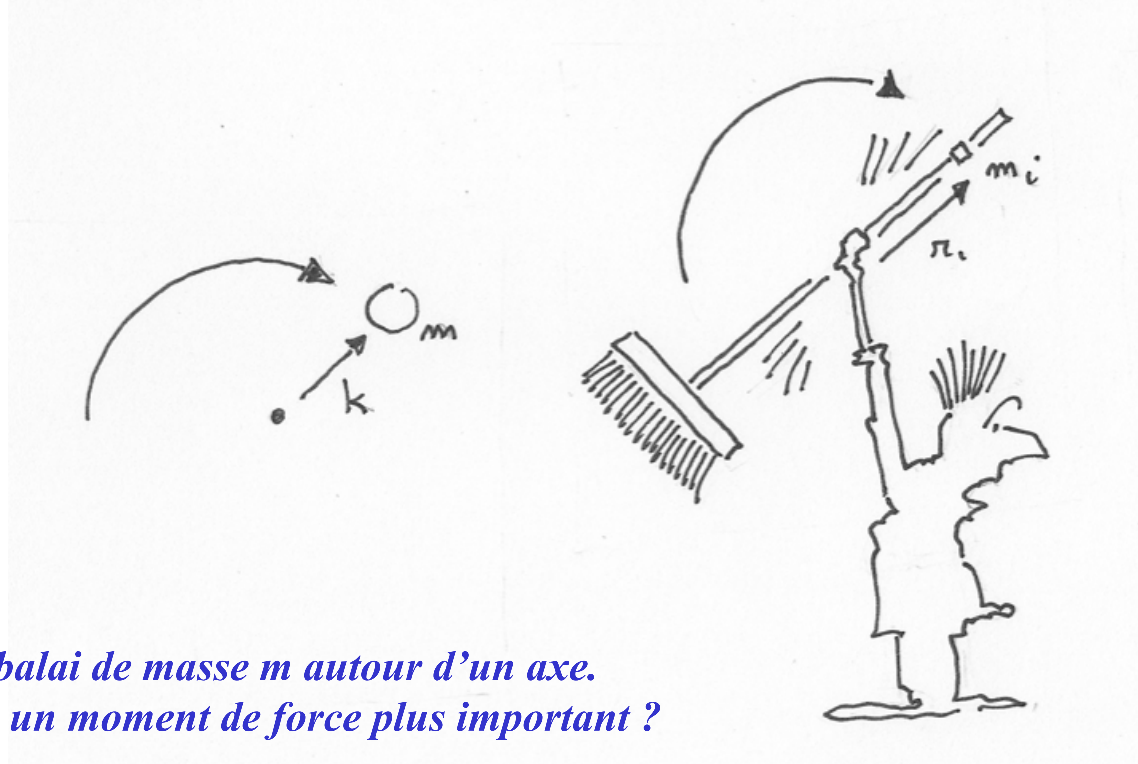
La conséquence :
l'accélération angulaire !

Bilan du moment cinétique

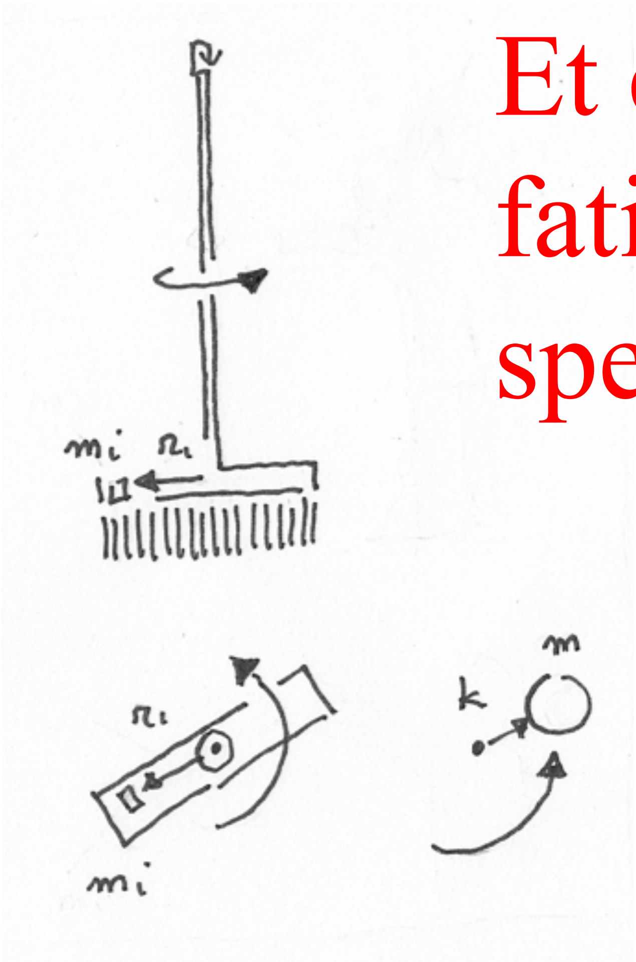
Que fait la danseuse pour tourner plus vite sur elle-même ?

Qu'est ce qui influence le moment d'inertie ?

Le moment d'inertie dépend de :
- la masse du balai
- la distribution de la masse par rapport à l'axe de rotation



On veut faire tourner un balai de masse m autour d'un axe.
Quel mouvement requiert un moment de force plus important ?



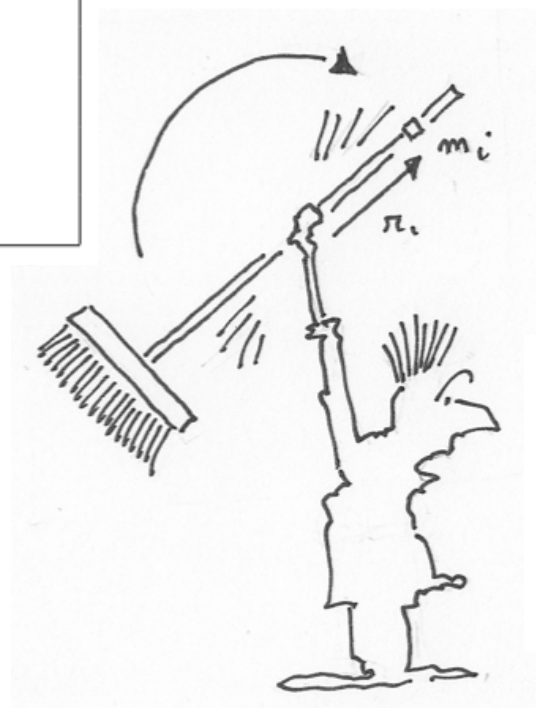
Et ceci est moins fatiguant et moins spectaculaire !

On veut faire tourner un balai de masse m autour d'un axe.
Quel mouvement requiert un moment de force plus important ?

Le moment d'inertie dépend de :
- la masse du balai
- la distribution de la masse par rapport à l'axe de rotation

Moment d'inertie

$$\boxed{I} = \sum m_i \, r_i^2$$



Rayon de giration

$$m \boxed{k^2} = \sum m_i \, r_i^2$$

Inertie - rayon de giration

Moment d’inertie du plongeur

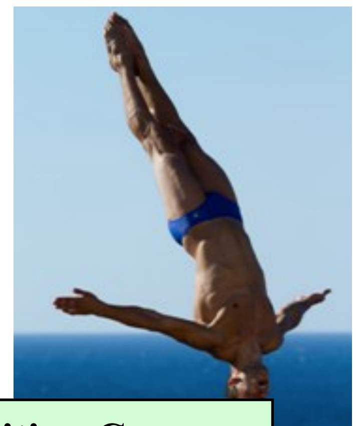
Le moment d’inertie dépend de :

- **la masse du plongeur**
- **la distribution de la masse par rapport à l’axe de rotation**

Position A

Pour quelles positions, le plongeur a le plus grand moment d’inertie et le plus petit moment d’inertie ?

Position B



Position C

Rayon de giration

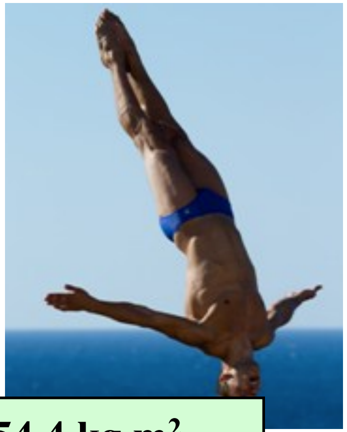
$$m\,k^2 = \sum m_i\, r_i^2$$

Le moment d’inertie dépend de :

- **la masse du plongeur**
- **la distribution de la masse par rapport à l’axe de rotation**

$I = 12.6$ kg m^2

$I = 23.8$ kg m^2



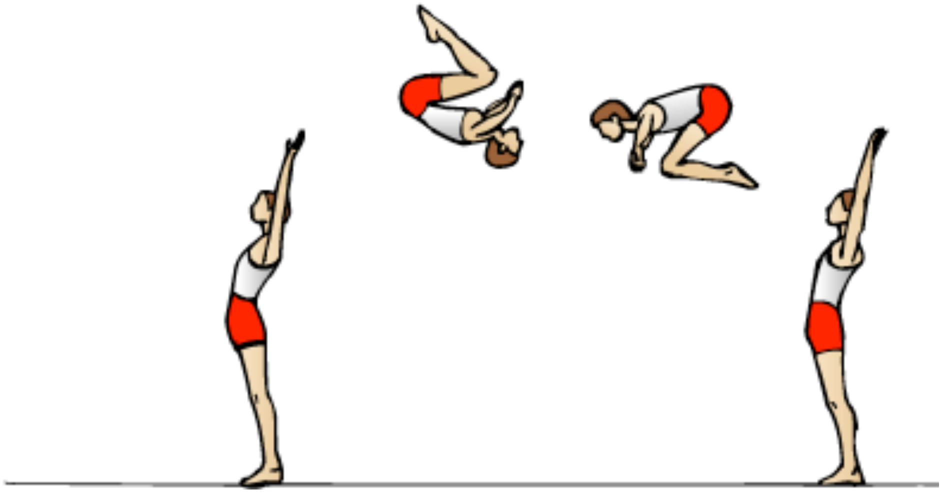
$I = 54.4$ kg m^2

Rayon de giration

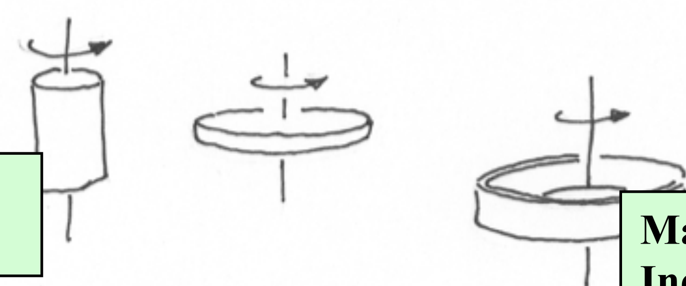
$$m\,k^2 = \sum m_i\, r_i^2$$

Moment d’inertie du plongeur

Pourquoi est-ce que
la gymnaste se recroqueville
pour faire la pirouette ?







Masse identique
Inertie minimale

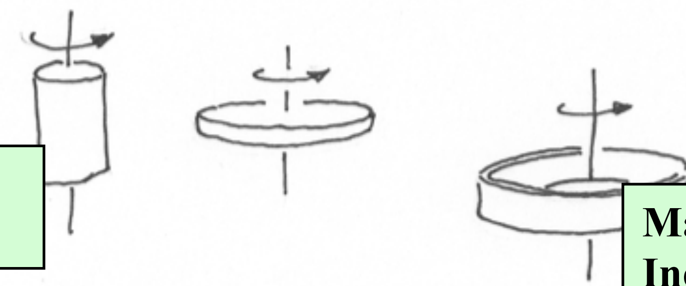
Masse identique
Inertie maximale

Cylindre, disque, anneau...
Veaux, vaches, cochons !

Une bibliothèque de moments d'inertie

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i \, r_i^2$$



Masse identique
Inertie minimale

Masse identique
Inertie maximale

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution	$I = m\, R^2$
Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution	$I = m\, \dfrac{R^2}{2}$
Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central	$I = m\, \dfrac{L^2}{12}$

Théorème de Huygens
Moment d'inertie quelconque

$$I_h = \sum m_i \left(\vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{h}}\right) \cdot \left(\vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{h}}\right)$$

$$= \underbrace{\sum m_i\, \vec{\mathbf{r}}_i \cdot \vec{\mathbf{r}}_i}_{=I} + \underbrace{\sum m_i\, \vec{\mathbf{h}} \cdot \vec{\mathbf{h}}}_{=mh^2} + 2\cancel{\left(\underbrace{\sum m_i\, \vec{\mathbf{r}}_i}_{=0}\right)} \cdot \vec{\mathbf{h}}$$

En vertu de la définition du centre de masse !

Une conséquence immédiate de ce théorème est qu'il est moins coûteux (en énergie) de faire tourner un corps autour d'un axe passant par le centre de masse.

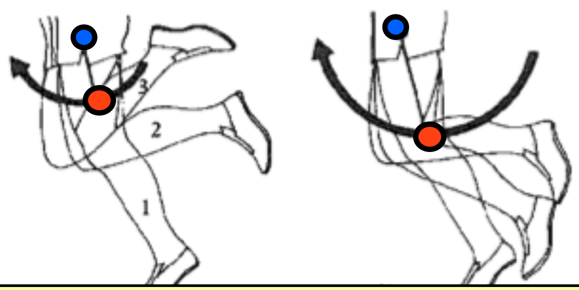
Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\, h^2 + I$$

Moment d’inertie de la jambe par rapport à la hanche

Lors d’un sprint, le coureur va chercher à ramener ses jambes le plus rapidement possible en avant.

Il va attirer le talon vers le haut durant la phase d’oscillation.
Le moment d’inertie par rapport à la hanche est diminué.



Pour les courses de fond, le coureur va dépenser moins d’énergie à relever le talon.

Le moment d’inertie par rapport à la hanche reste plus grand.
La vitesse est évidemment aussi moins rapide !

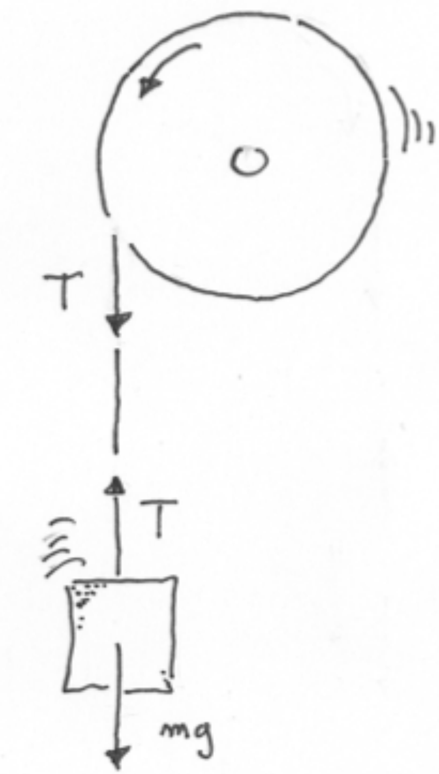
On lache un bloc attaché à une poulie

Quelle est la vitesse angulaire de la poulie après 3 secondes ?
Vitesse du bloc lorsqu'il est descendu de 1.6 mètre ?

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2 + \tfrac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$



On applique une force F pour freiner une roue...

Combien de tours va effectuer la roue avant de s'arrêter ?
Masse de la roue = m
Rayon de la roue = R
Vitesse angulaire initiale = ω
Coefficient de frottement = μ

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2 + \tfrac{1}{2}I\,\omega^2\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

Accélération dans l'avant-bras due à la gravité

Quelle est l'accélération angulaire pour un angle quelconque ?
Quelle est l'accélération tangentielle lorsque l'avant-bras est horizontal ?

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$

- La masse mesure la résistance d'un corps à une accélération causée par une force.
- Le moment d'inertie mesure la résistance d'un corps à une accélération angulaire causée par un moment de force.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(m\,\vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\,v^2 + \tfrac{1}{2}I\,\omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(I\,\omega\Big) &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

Equilibre statique

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
0 &= \sum M_i
\end{aligned}
$$