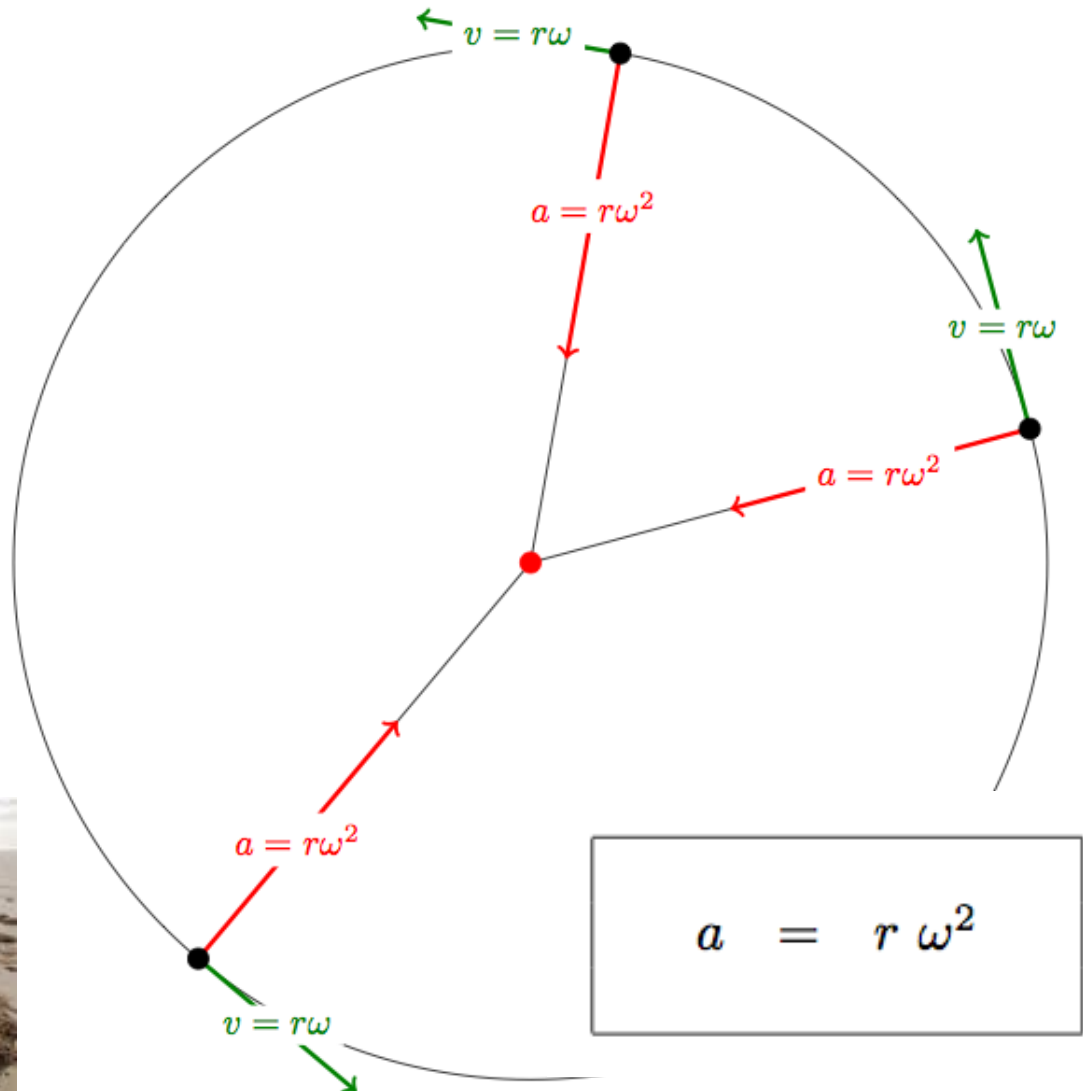


Mouvement circulaire uniforme

$$v = r \omega$$

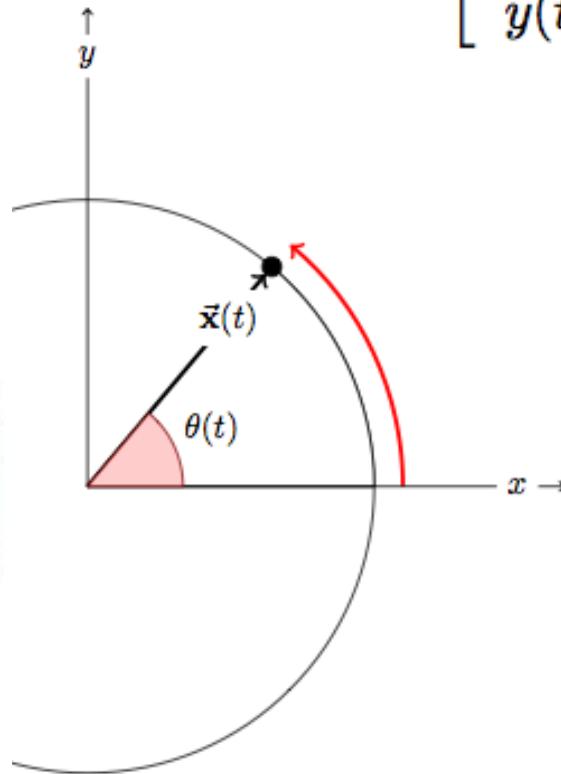


$$a = r \omega^2$$

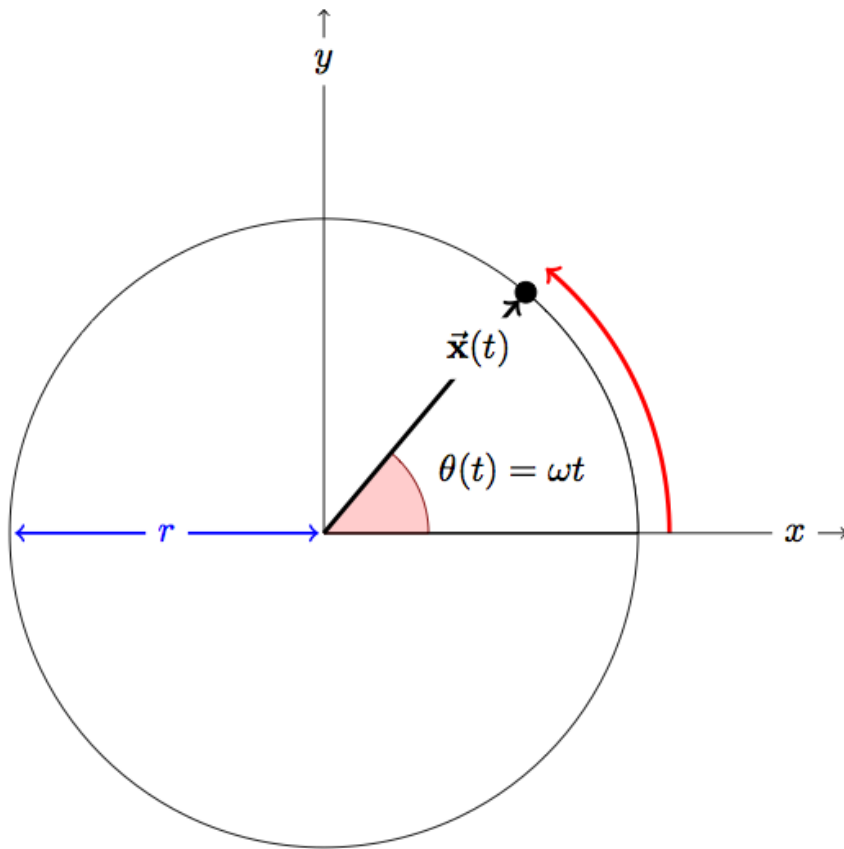
Vitesse angulaire constante : ω
Vitesse tangentielle
Accélération centripète

Le mouvement circulaire est harmonique

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta(t)) \\ r \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

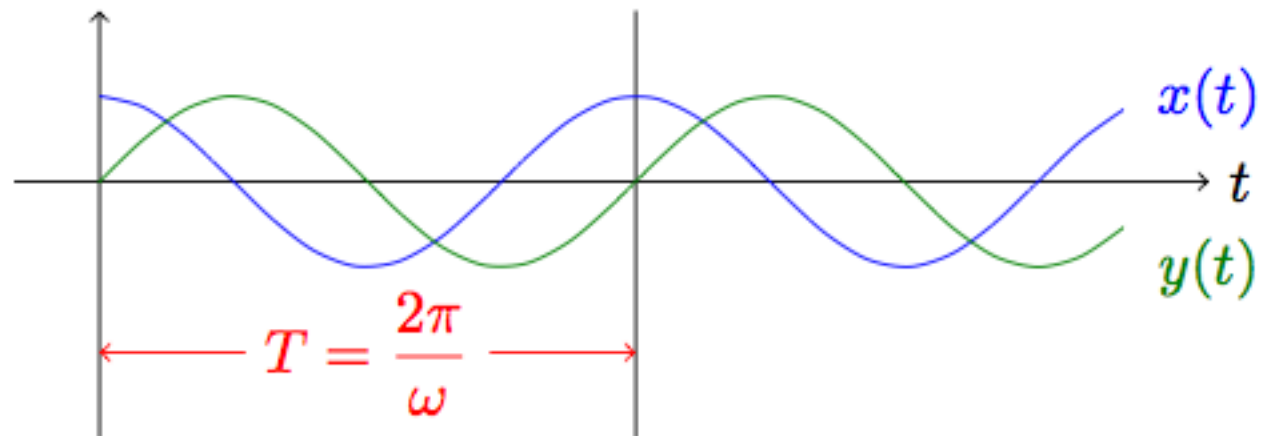


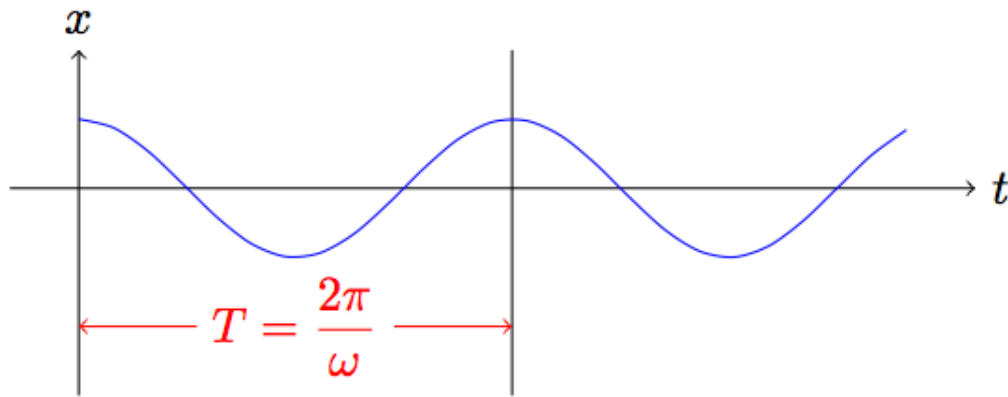
Le retour du cos et du sin



$$x(t) = r \cos(\omega t)$$

$$y(t) = r \sin(\omega t)$$





$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

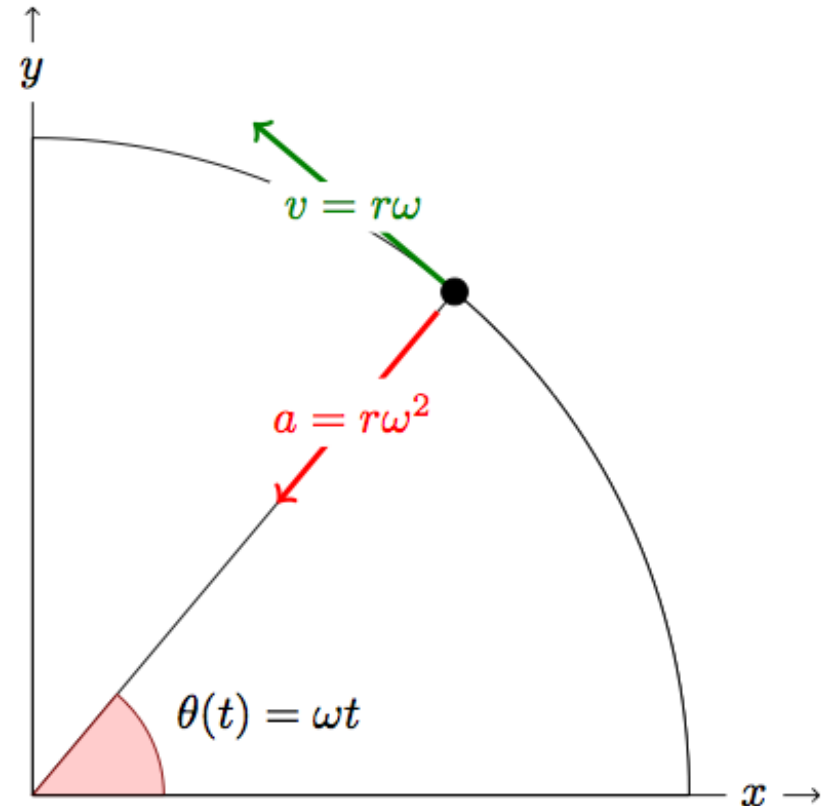
$$v = r \omega$$

Période : T

Fréquence : f

Vitesse angulaire : ω

Accélération centripète



$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\omega^2 \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

Vitesse
tangentielle



Aspirateur
600 tours/minute
 $R = 10 \text{ cm}$

$$f = 10 \text{ Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.1 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 62.8 \text{ rad/s}$$

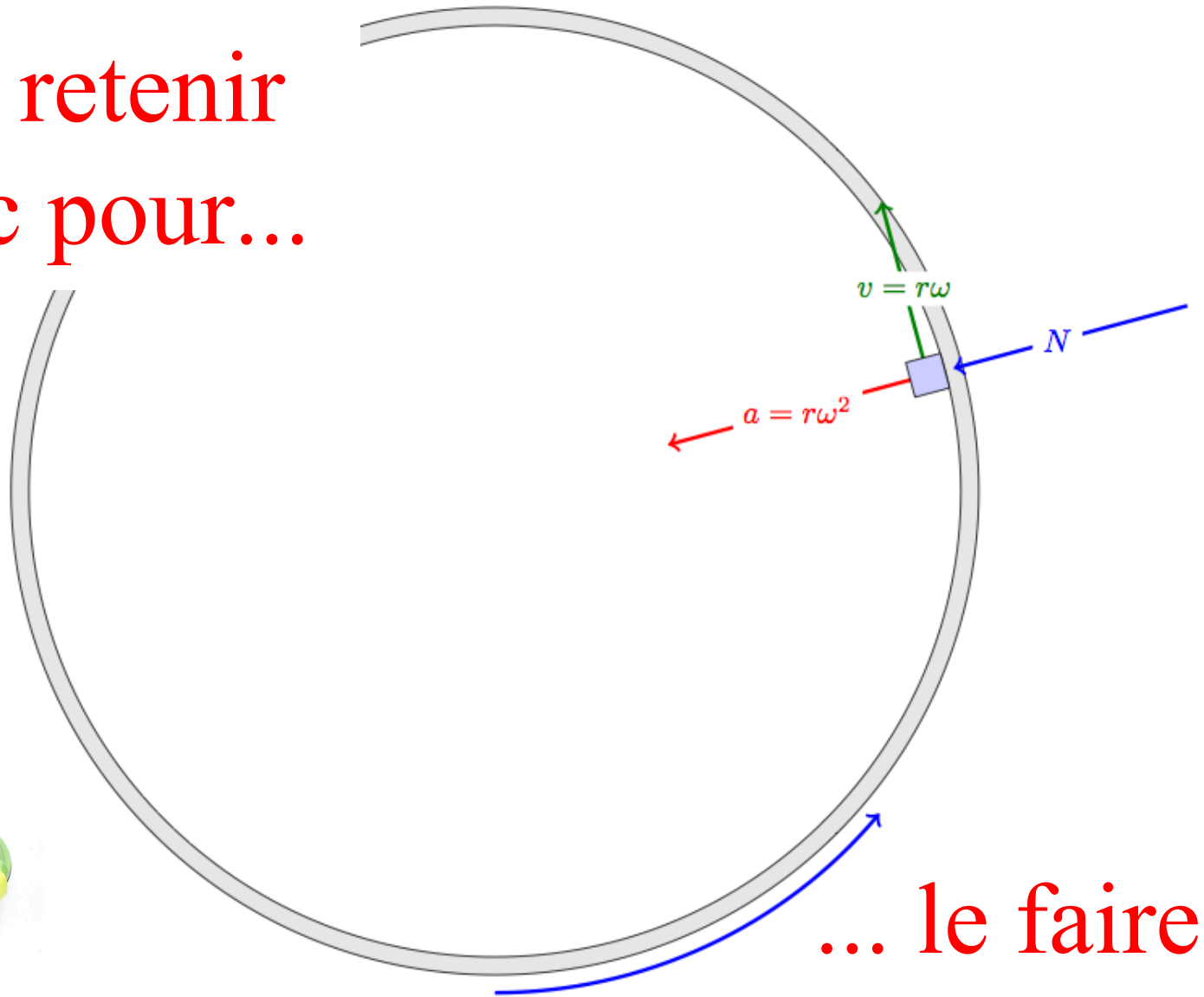


$$v = r \omega = 6.28 \text{ m/s}$$

$$a = r \omega^2 = 394.4 \text{ m/s}^2$$

*C'est quarante fois
la valeur de l'accélération de la gravité !
C'est une valeur très élevée !*

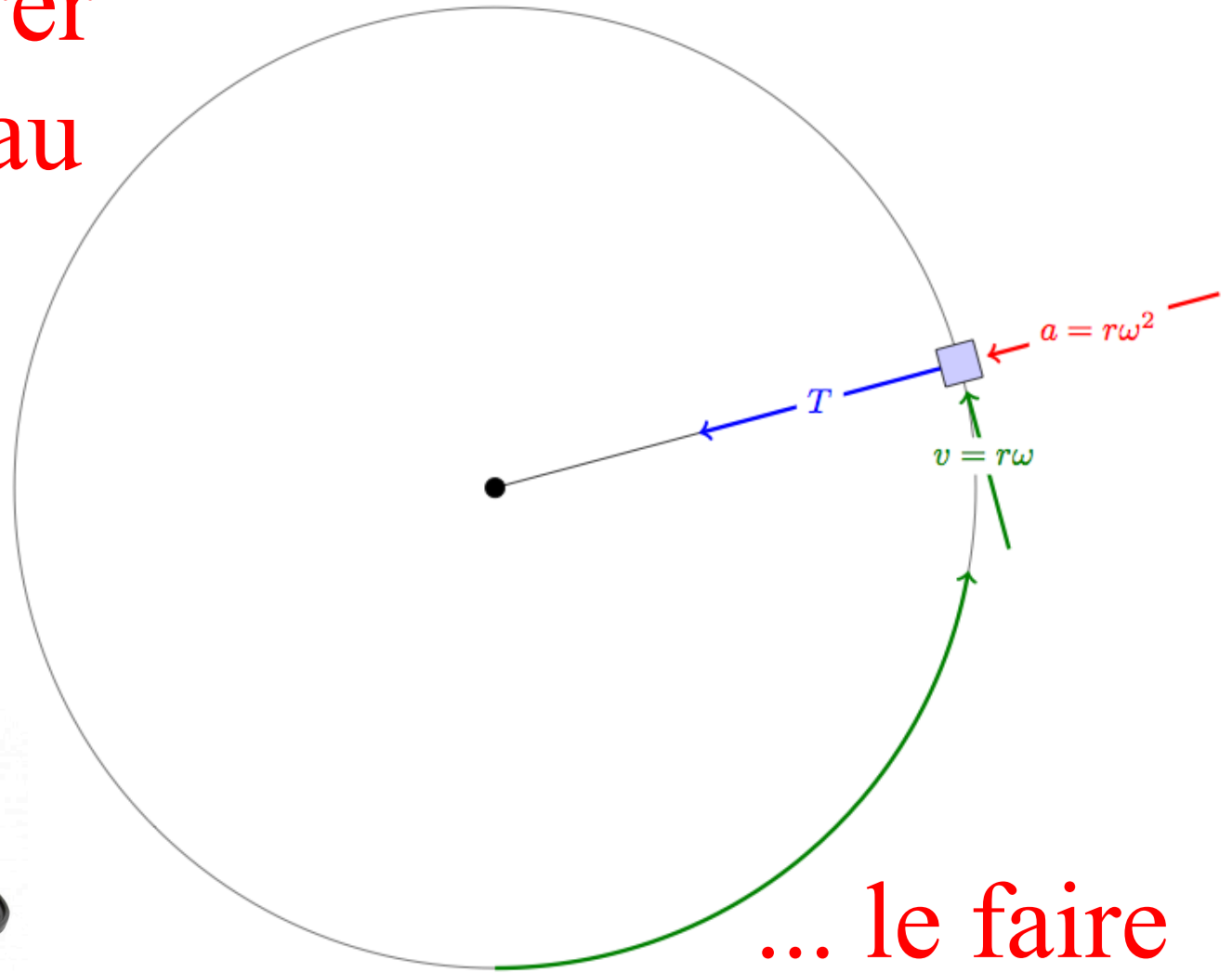
Il faut retenir
le bloc pour...



... le faire
tourner !



Il faut tirer
sur le seau
pour...



... le faire
tourner !



Machine à laver
3600 tours/minute
 $R = 15 \text{ cm}$

$$f = 60 \text{ Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.017 \text{ s}$$

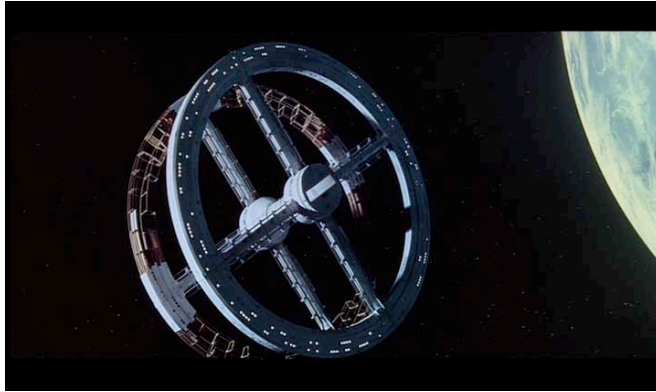
$$\omega = 2\pi f = 377 \text{ rad/s}$$



$$v = r \omega = 56.5 \text{ m/s}$$

$$a = r \omega^2 = 21318 \text{ m/s}^2$$

*C'est deux mille fois
la valeur de l'accélération de la gravité !
C'est une valeur vraiment très très élevée !*



Station spatiale
3 tours/minute
 $R = 100 \text{ m}$

$$\omega^2 = 0.1 \text{ (rad/s)}^2$$

$$a = r \omega^2 = 10 \text{ m/s}^2$$

$$\omega = 0.3 \text{ rad/s}$$

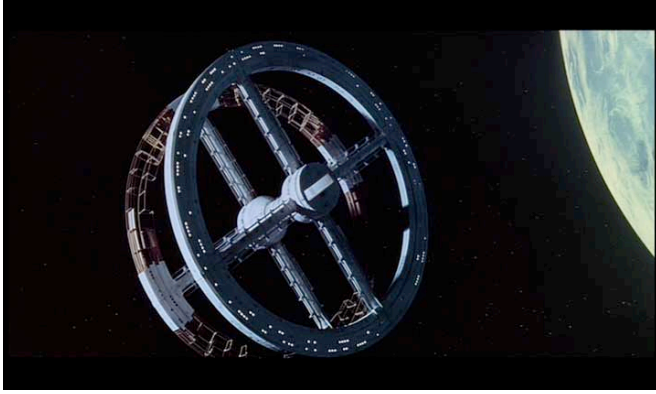
$$v = r \omega = 30 \text{ m/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.05 \text{ Hertz}$$

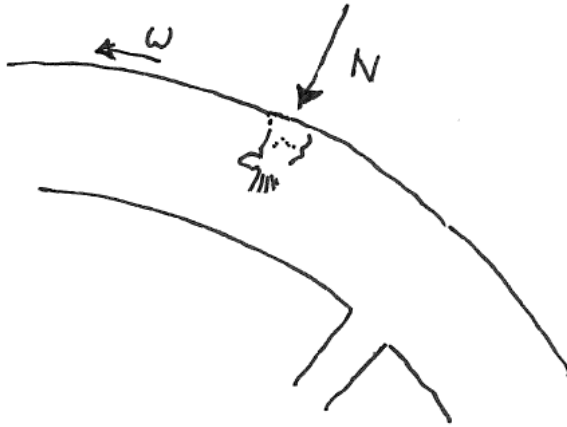
$$T = \frac{1}{f} = 20 \text{ s}$$



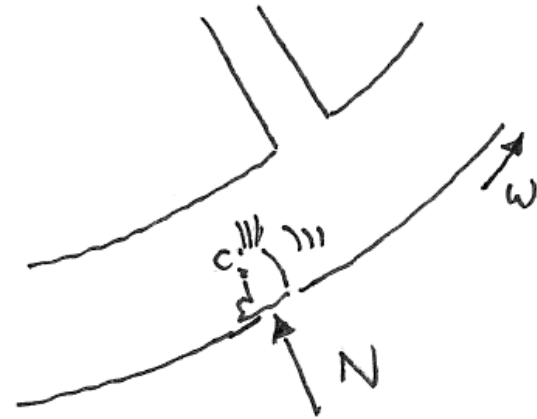
*On fait tourner la station spatiale
pour obtenir une gravité artificielle !*



Station spatiale
3 tours/minute
 $R = 100 \text{ m}$



*On fait tourner la station spatiale
pour obtenir une gravité artificielle !*



Le MRUA :-)

$$y''(t) = a$$

$$y'(t) = \overbrace{v_0 + a t}^{v(t)}$$

$$y(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2}$$



**Des millions de gens ont vu tomber une pomme,
Newton est le seul qui se soit demandé pourquoi...
(Bernard Baruch)**

Le MCUA :-)

$$\theta''(t) = \alpha$$

$$\theta'(t) = \underbrace{\omega(t)}_{\omega_0 + \alpha t}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

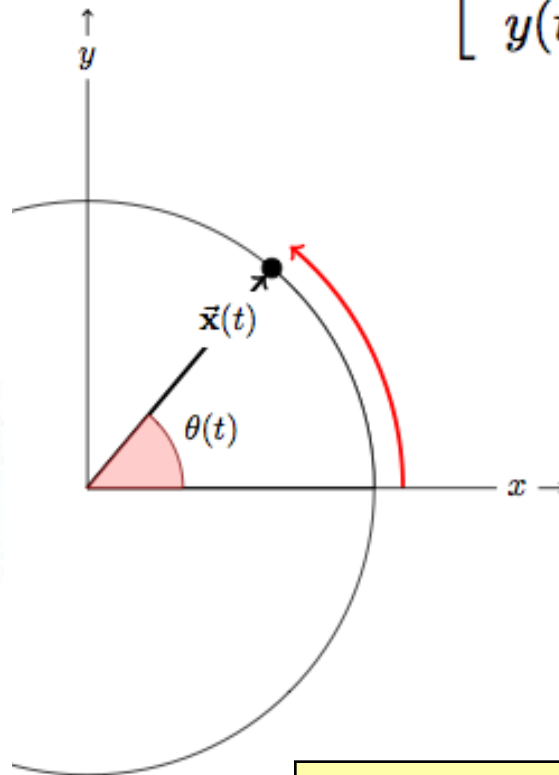


Maintenant, faisons strictement et exactement la même chose avec un mouvement circulaire !

Définissons le MCUA !

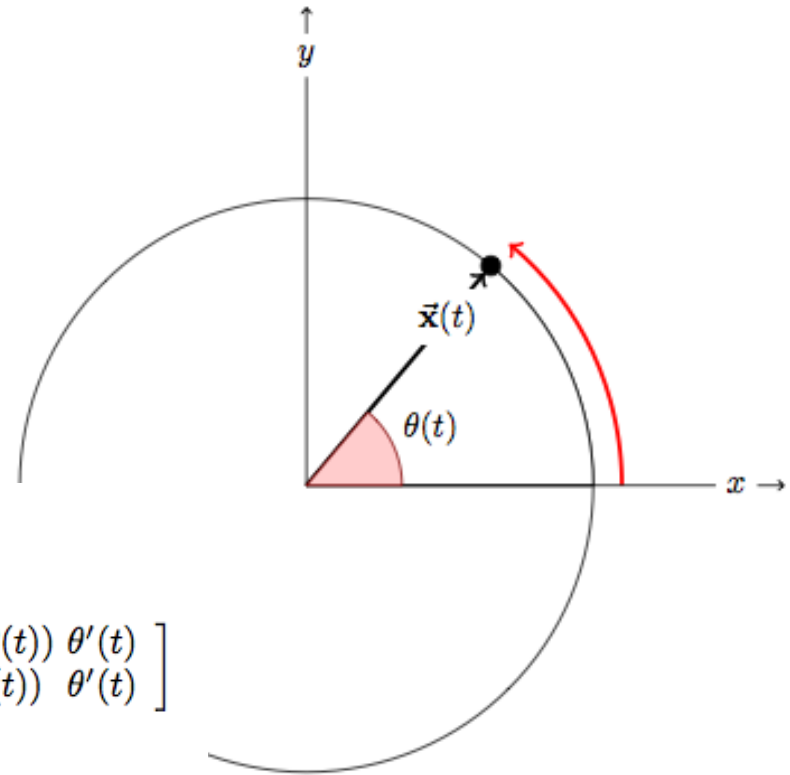
Le MCUA :-)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta(t)) \\ r \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



Mouvement circulaire non-uniforme...
Vitesse angulaire non-constante
Accélération angulaire constante

Calculons la vitesse et l'accélération !



$$\vec{v}(t) = r \omega(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = r\omega'(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \theta'(t) \\ -\sin(\theta(t)) \theta'(t) \end{bmatrix}$$

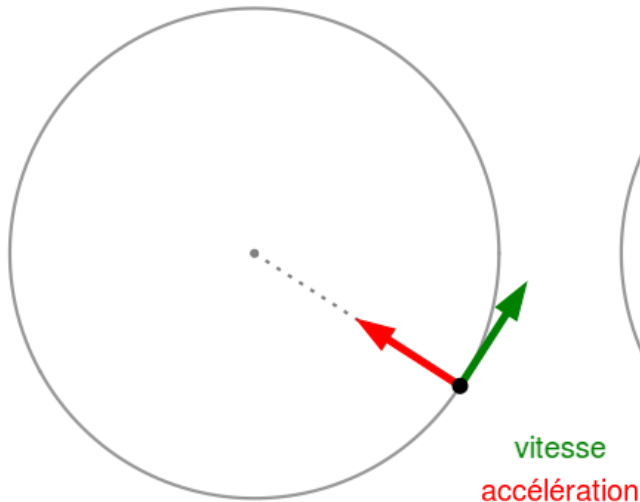
↓

$$= r\alpha \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

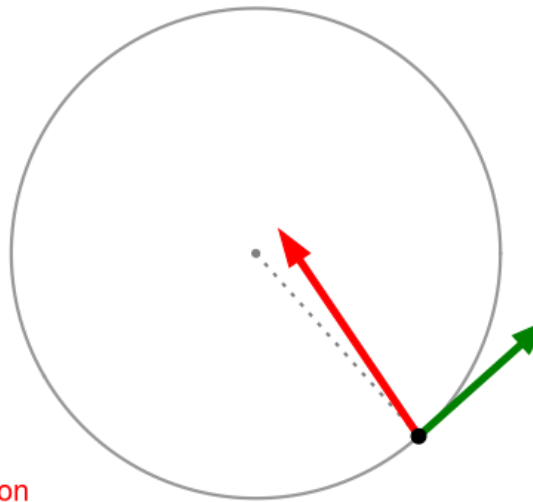
La vitesse est toujours bien tangente au mouvement !
Mais son module est désormais variable
car la vitesse angulaire n'est pas constante !

Une vitesse angulaire variable crée une accélération tangentielle !

vitesse angulaire constante



vitesse angulaire variable



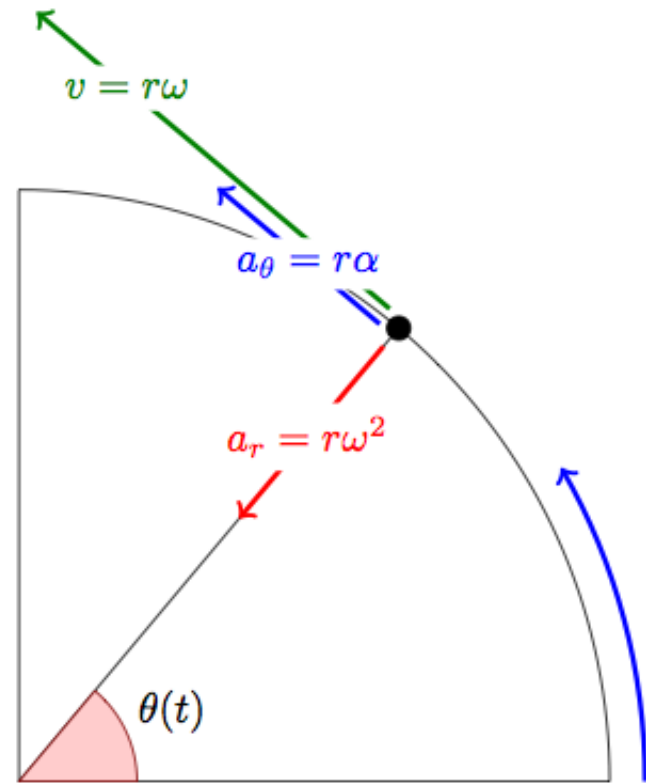
**L'accélération centripète provient de la variation de direction de la vitesse.
L'accélération tangentielle provient de la variation du module de la vitesse.**

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\alpha \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

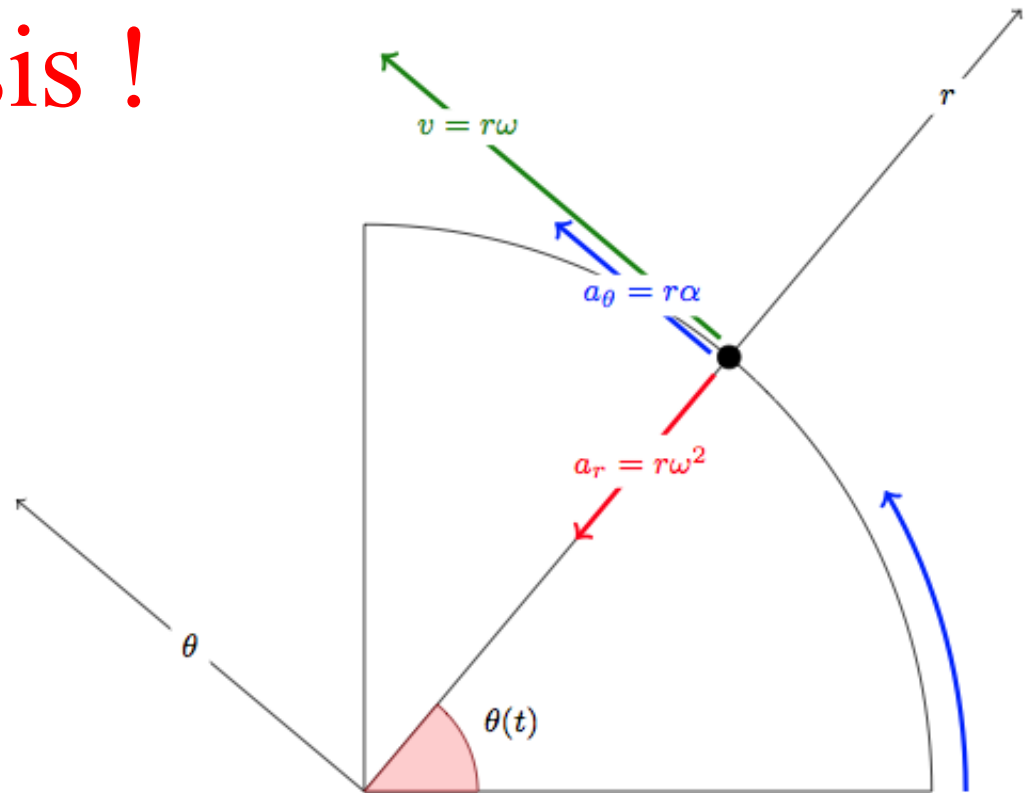
Accélération
tangentielle



Accélération
centripète

Avec des axes bien choisis !

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\ \vec{a}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}\end{aligned}$$



Vitesse : $v = r\omega$ [m/s]

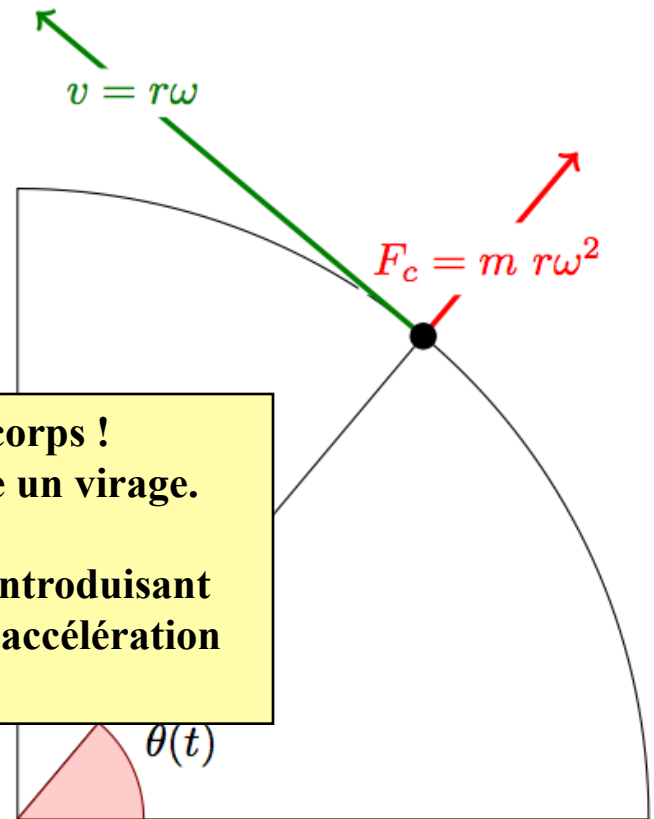
Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$ [m/s²]

Vitesse angulaire ω [radians/s] et accélération angulaire α [radians/s²]



**On effectue tous les calculs dans un repère mobile lié au corps !
Par exemple, on attache le repère à la voiture qui effectue un virage.**

Ensuite, on tient compte du fait que le repère tourne, en introduisant une pseudo-force centrifuge qui aura le même effet que l'accélération centripète qu'on obtient dans un repère fixe !



**Remplacer
l'accélération centripète
par la pseudo-force centrifuge !**

Dynamique du mouvement circulaire



$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}$$



$$m \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \end{bmatrix}$$

Comment faire tourner le train ?

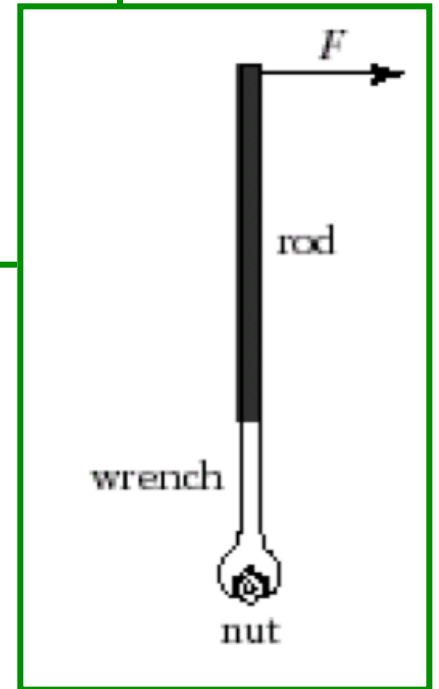
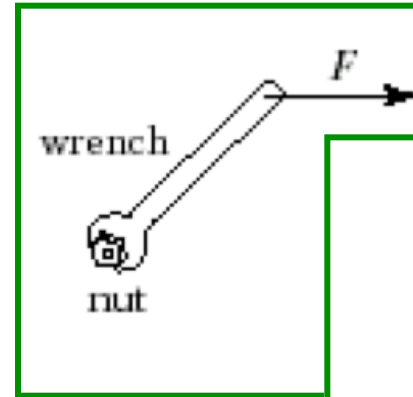
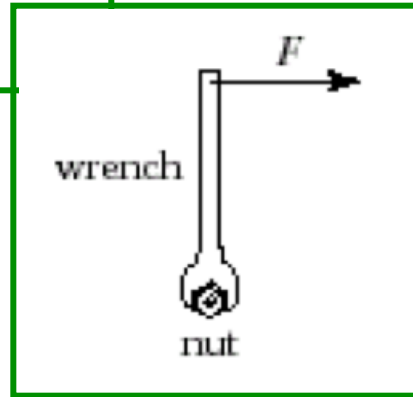
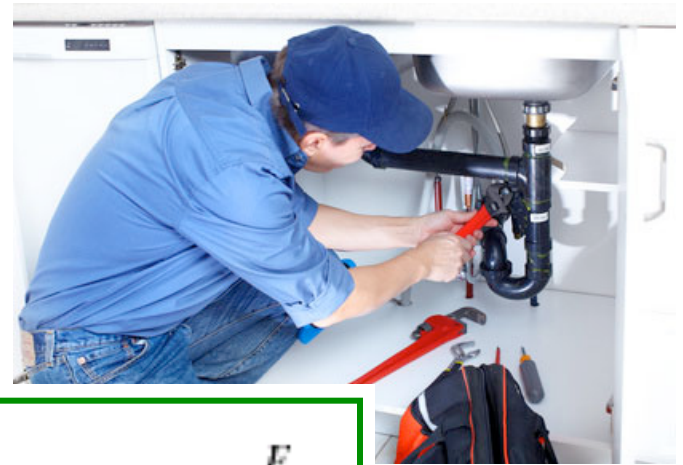


$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}$$



$$m \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \end{bmatrix}$$

**Dans un mouvement circulaire, seules les forces
qui ont un moment non nul par rapport au centre de rotation
vont augmenter la vitesse de rotation !**

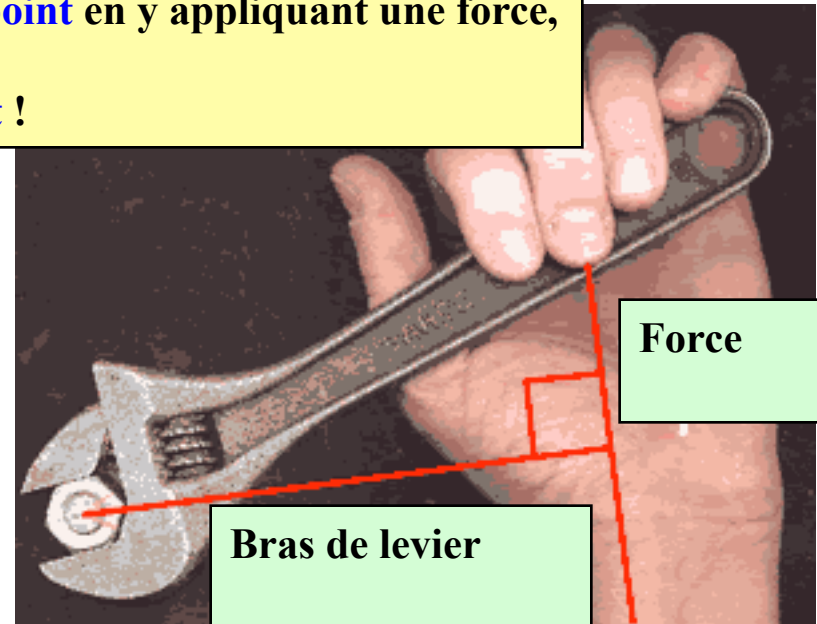


C'est koi
le bon mouvement,
Monsieur le plombier :-)



Ce qui fait tourner la clé,
c'est le moment !

Supposons que l'on fixe une barre en **un point** et
que l'on souhaite la faire tourner autour **de ce point** en y appliquant une force,
l'accélération angulaire sera proportionnel
au moment de cette force par rapport à **ce point** !



$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) =$$

Forces

$$\sum \vec{F}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b .

$$\int_a^b \frac{d}{dt}(m \vec{v}) dt = \sum \int_a^b \vec{F} dt$$

En supposant que les forces sont **constantes**.

$$[m \vec{v}]_b - [m \vec{v}]_a = \sum \vec{F} (t_b - t_a)$$

$$\Delta(m \vec{v}) =$$

$$\sum \vec{F} \Delta t$$

Impulsions

Bilan
de la quantité
de mouvement

Puissance des forces

$$\frac{d}{dt} (m \vec{v}) \cdot \vec{v} = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}$$

↓
En intégrant entre les instants t_a et t_b .

$$\int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \sum \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \sum \int_a^b \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} dt = \sum \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

↓
En supposant que les forces sont **constantes**.

$$\left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_b - \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_a = \sum \vec{F} \cdot (\vec{x}_b - \vec{x}_a)$$

$$\Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \sum \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$$

Travail des forces

Bilan d'énergie cinétique

Moments des forces

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}(m \vec{r} \times \vec{v}) = \sum \vec{r} \times \vec{F}$$

↓
En intégrant entre les instants t_a et t_b .

$$\int_a^b \frac{d}{dt}(m \vec{r} \times \vec{v}) dt = \sum \int_a^b \vec{r} \times \vec{F} dt$$

↓
En supposant que les moments sont **constants**.

$$[m \vec{r} \times \vec{v}]_b - [m \vec{r} \times \vec{v}]_a = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) (t_b - t_a)$$

$$\Delta(m \vec{r} \times \vec{v}) = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) \Delta t$$

Impulsions angulaires

Bilan de moment cinétique

$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m \vec{v}) = \sum \vec{r} \times \vec{F}$$



- Dans un mouvement circulaire, l'accélération a toujours une **composante centripète**. Les variations de la vitesse angulaire génère une **composante tangentielle**.
- Seules les forces dont le moment n'est pas nul par rapport au centre de rotation permettent de modifier la vitesse angulaire d'un mouvement circulaire.
- Les forces modifient la quantité de mouvement
Les moments modifient le moment cinétique



Ne pas
oublier !

Vitesse maximale sans risque de dérapage ?



Automobile de 1000 kg
Angle de 30 degré par rapport à l'horizontale
Rayon du virage : 100 m
Coefficient de frottement statique de 0.1