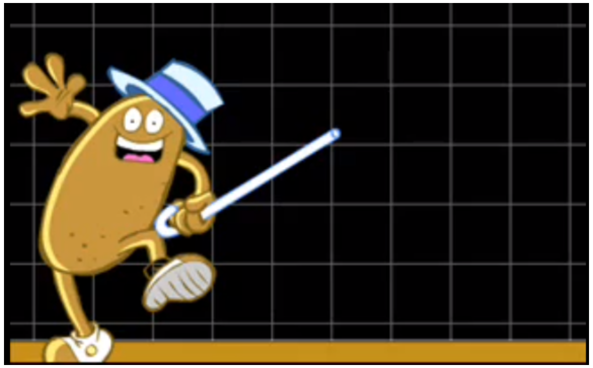
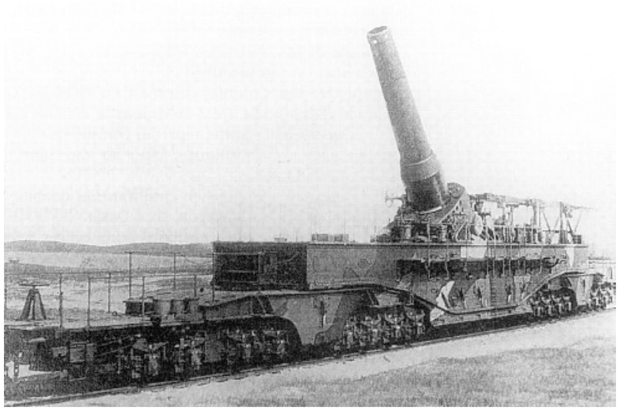
Quelle est la différence entre un point et une patate ?



Lorsqu'une patate fait une rotation, cela se voit :-)

La mécanique d'un point...



$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

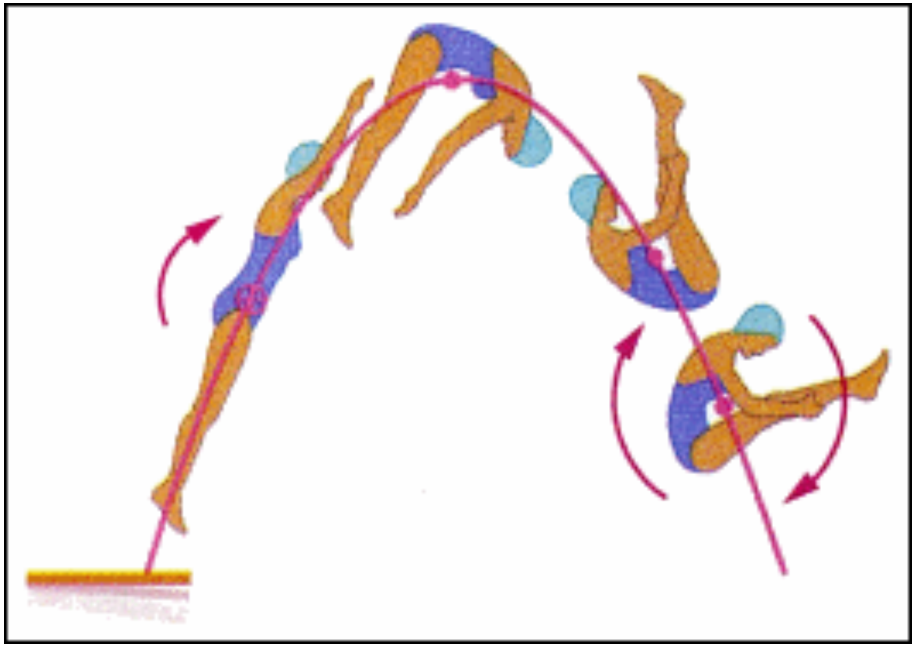
Les deux principes fondamentaux !

Conservation de la quantité de mouvement
Conservation de l'énergie

Dans beaucoup d'applications, on peut se restreindre à l'analyse du mouvement du centre de masse et réduire le corps à un simple point où on a concentré toute la masse !

Ce que nous avons fait jusqu'à présent !
Mais, un skieur, une auto, un bloc, ce n'est pas un point !

La trajectoire de son centre de masse est parabolique, comme notre obus !
Mais, son mouvement est nettement plus complexe avec des vrilles et des pirouettes !



mais un corps,
ce n’est pas un point !

La mécanique d'un corps...

Trois principes fondamentaux !

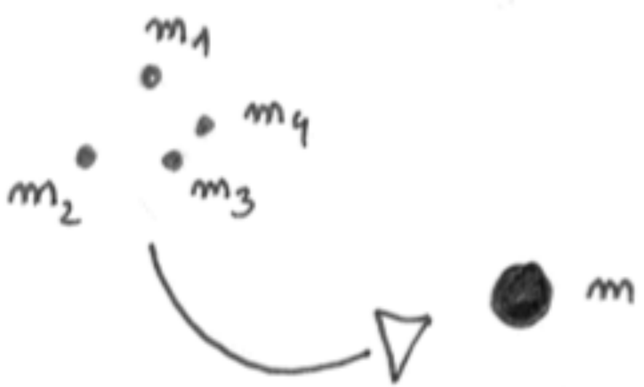
Conservation de la quantité de mouvement
Conservation de l'énergie
Conservation du moment de la quantité de mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$

C’est quoi un corps ?



On remplace une série de particules,
par un grosse particule virtuelle
de masse équivalente !

$$m = \sum m_i$$

... un ensemble de points !

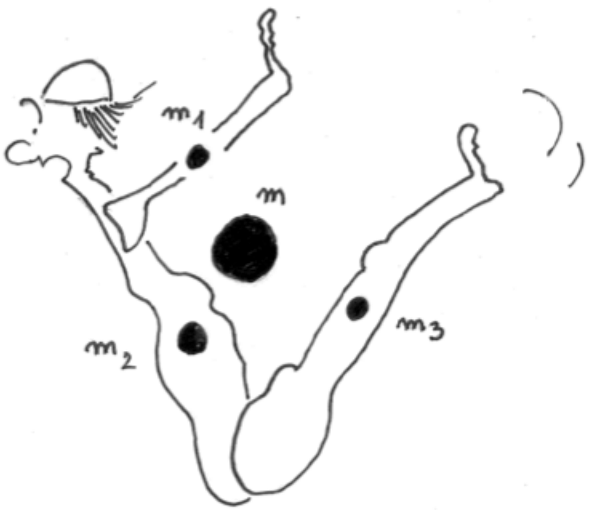
C'est quoi un corps ?

Tant que le bloc ne tourne pas,
la mécanique du point est suffisante
pour résoudre pas mal de problèmes !

$$m = \sum m_i$$

... un ensemble de points !

C’est quoi un corps ?

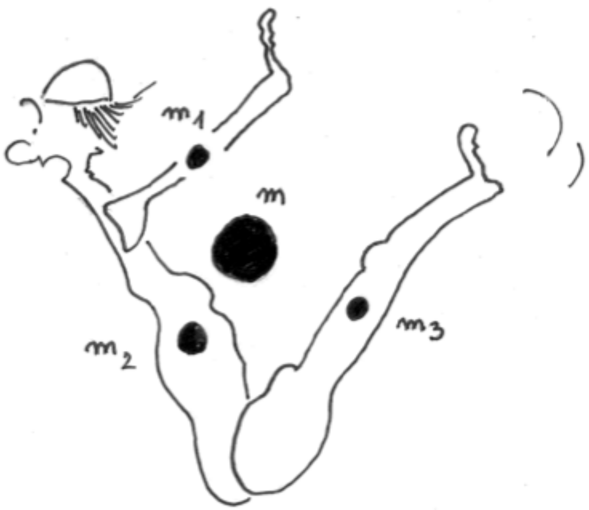


Mais lorsque notre athlète fait des pirouettes, il faut avoir un modèle mécanique plus compliqué !

$$m = \sum m_i$$

... un ensemble de points !

Le centre de masse...



La position d'une particule plus grande doit compter davantage !

Tronc-tête : 58% de la masse corporelle
Jambes : 32% de la masse corporelle
Bras : 10 % de la masse corporelle

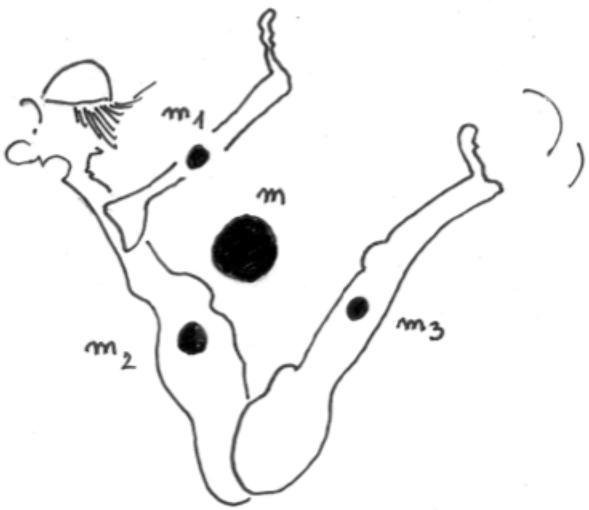
$$m = \sum m_i$$

$$m\,\vec{\mathbf{x}}(t) = \sum \Big(m_i\,\vec{\mathbf{x}}_i(t) \Big)$$

... est la position moyenne pondérée des particules

La vitesse du centre de masse...

La position d'une particule plus grande doit compter davantage !



$$
\begin{aligned}
m &= \sum m_i \\
m\,\vec{\mathbf{x}}(t) &= \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t) \Big) \\
m\,\vec{\mathbf{v}}(t) &= \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t) \Big)
\end{aligned}
$$

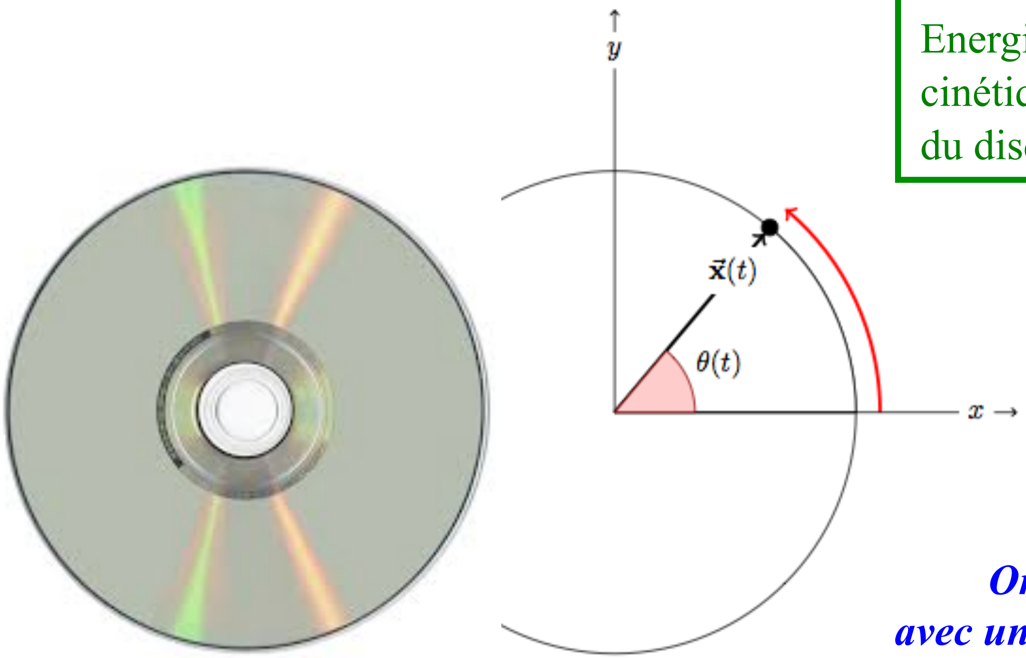
... est aussi obtenue comme la moyenne pondérée des particules

Et l'énergie cinétique de rotation d'un disque ?

$$\boxed{\sum \frac{1}{2} m_i\, v_i^2} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum m_i\, r_i^2\right)}_{I} \omega^2$$

Energie cinétique du disque

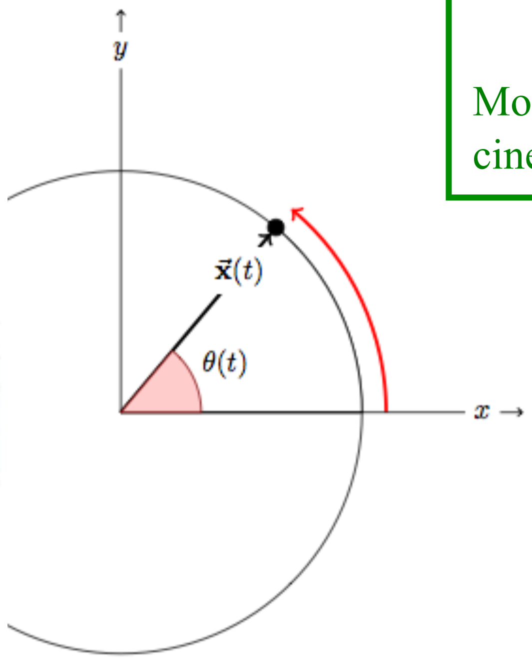
Moment d'inertie du corps



Et le centre de masse ne bouge pas !

On peut donc avoir une énergie cinétique avec un centre de masse totalement immobile !

Et le moment cinétique de rotation d'un disque ?



$$\boxed{\sum r_i \, m_i \, v_i^2} = \underbrace{\left(\sum m_i \, r_i^2\right)}_{I} \omega$$

Moment cinétique

Moment d'inertie du corps

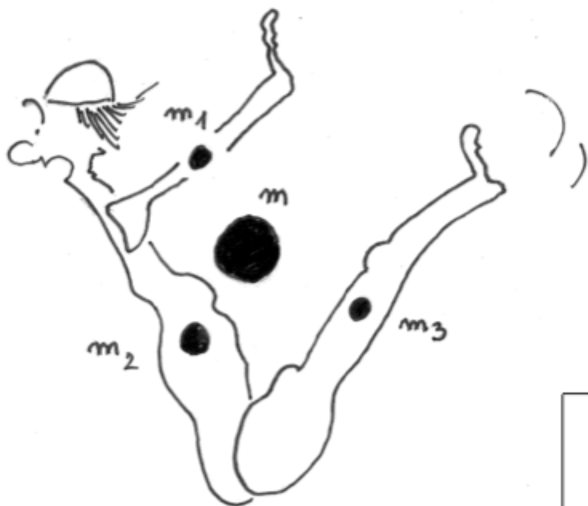
Et le centre de masse ne bouge pas !

Pas de quantité de mouvement !
Mais un moment cinétique non nul car le disque tourne !

En résumé :

Ensemble de particules : un corps !

$$
\begin{aligned}
m &= \sum m_i \\
m\,\vec{\mathbf{x}}(t) &= \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t) \Big) \\
m\,\vec{\mathbf{v}}(t) &= \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t) \Big)
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}} \Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2} m\ v^2 + \tfrac{1}{2} I\ \omega^2 \Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega \Big) &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}} \Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \\
\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}\ m\ \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \\
\frac{d}{dt}\Big(\vec{\mathbf{r}} \times m\ \vec{\mathbf{v}} \Big) &= \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}
\end{aligned}
$$

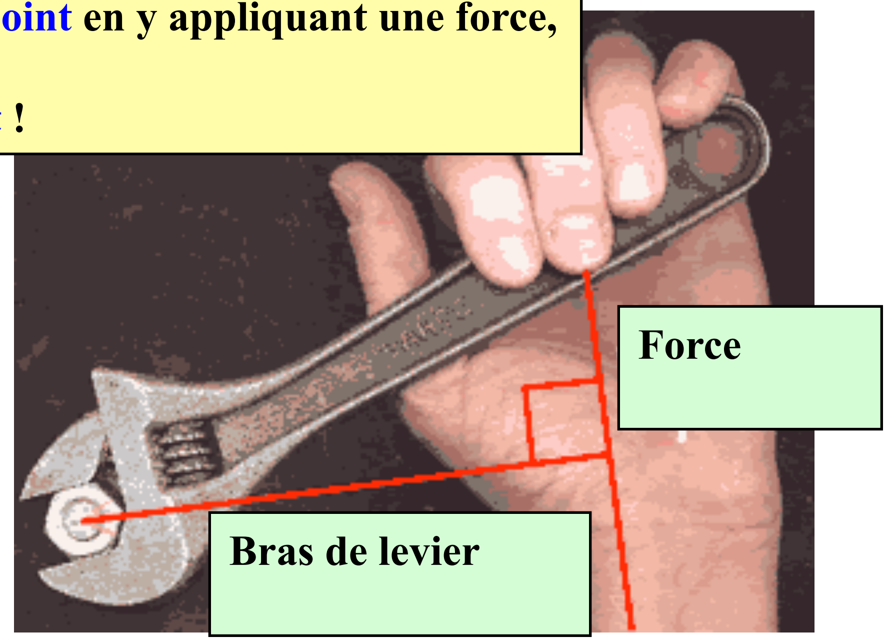
Attention, les forces ne s'exercent pas uniquement sur le centre de masse !

Le mouvement de chaque particule de la clé à molette est complexe
Mais, la vitesse du centre de masse est nulle…
On n'exercerait donc aucune force sur le centre de gravité ?

Ce qui fait tourner la clé, c’est le moment !

Supposons que l’on fixe une barre en un point et que l’on souhaite la faire tourner autour de ce point en y appliquant une force, l’accélération angulaire sera proportionnel au moment de cette force par rapport à ce point !

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$



$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \left[\begin{array}{c} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{array} \right]$$

$$C = AB\sin(\theta)$$

Cross Product

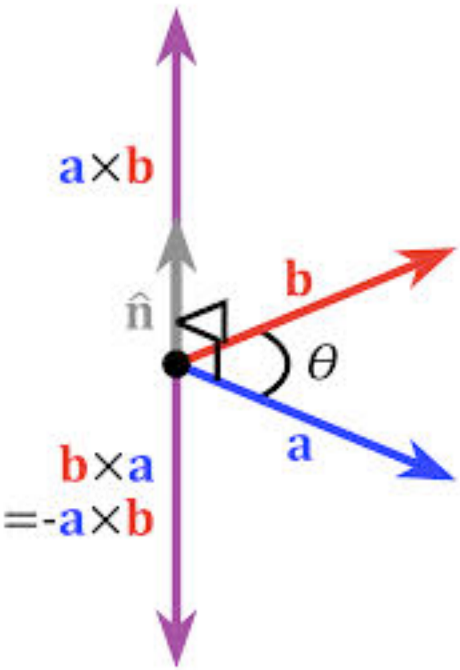
$$\vec{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c} A_x \\ A_y \\ A_z \end{array} \right]$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \left[\begin{array}{c} B_x \\ B_y \\ B_z \end{array} \right]$$

Produit vectoriel de vecteurs

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$$

Attention !
Le produit vectoriel n'est pas commutatif !

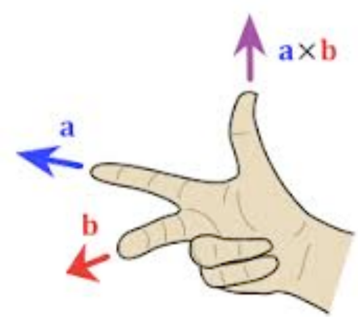


$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{bmatrix}$$

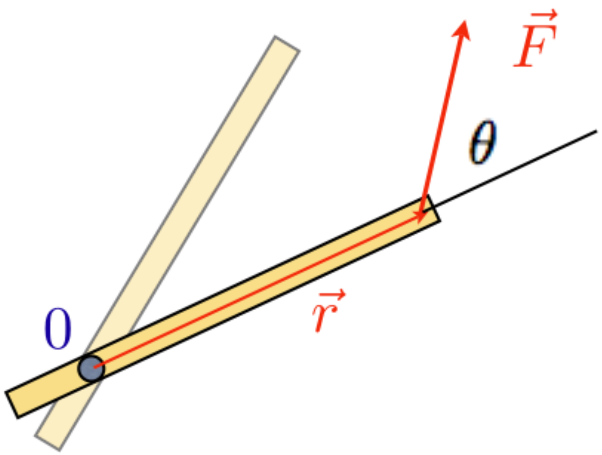
$$C = AB\sin(\theta)$$

Cross Product

Produit vectoriel de vecteurs



Et c’est quoi le moment d’une force par rapport à un point ?



Moment d’une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F\, r_\perp = F_\perp\, r = F r \sin(\theta)$$

Direction du moment = axe de rotation
Norme de moment = vitesse de rotation
Signe du moment = sens de la rotation suivant la fameuse règle de la main droite !

Moments

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

Forces

Equilibre de rotation

$$\frac{d}{dt}\cancel{(I\omega)} = \sum M_i$$

Etudions d'abord les forces et les moments de corps au repos !

Concept d' équilibre statique

$$\frac{d}{dt}\cancel{(m\vec{\mathbf{v}})} = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

Equilibre de translation

Equilibre de rotation

$$0 = \sum M_i$$

Lorsque le corps ne bouge pas,
son accélération angulaire est nulle
pour n'importe quel point !

Dans ce cas, on peut donc calculer les moments de force par rapport à n'importe quel point alors !

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

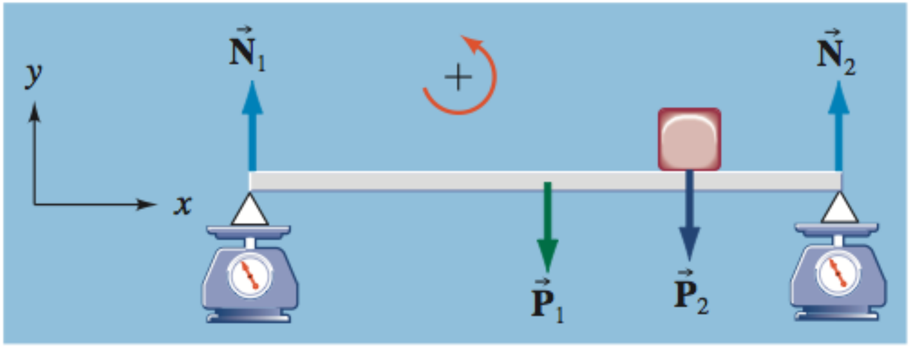
Equilibre de translation

Quelles sont les forces exercées par les supports ?

Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$0 = \sum M_i$$



Quelle force as-tu dans le biceps ?

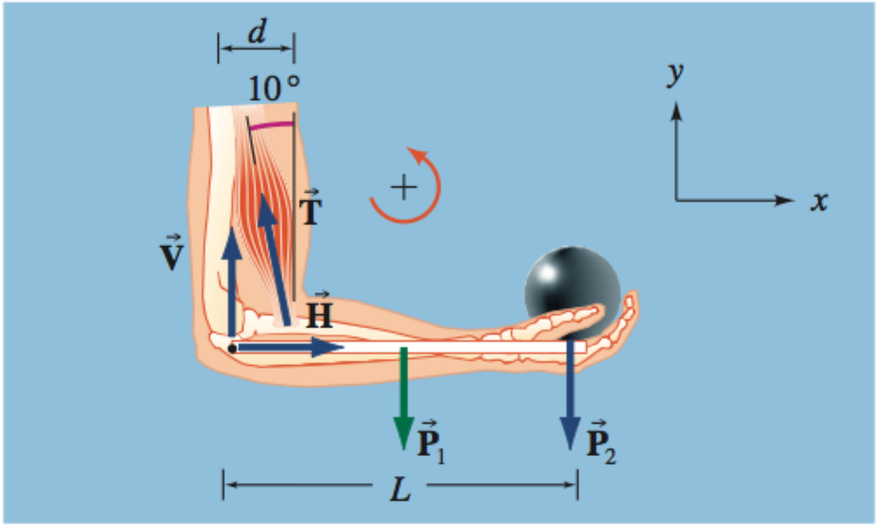
On cherche la force dans l'articulation et dans le muscle du biceps !

Choisir astucieusement le point par rapport on calcule les moments peut fortement simplifier les calculs :-)

Equilibre statique

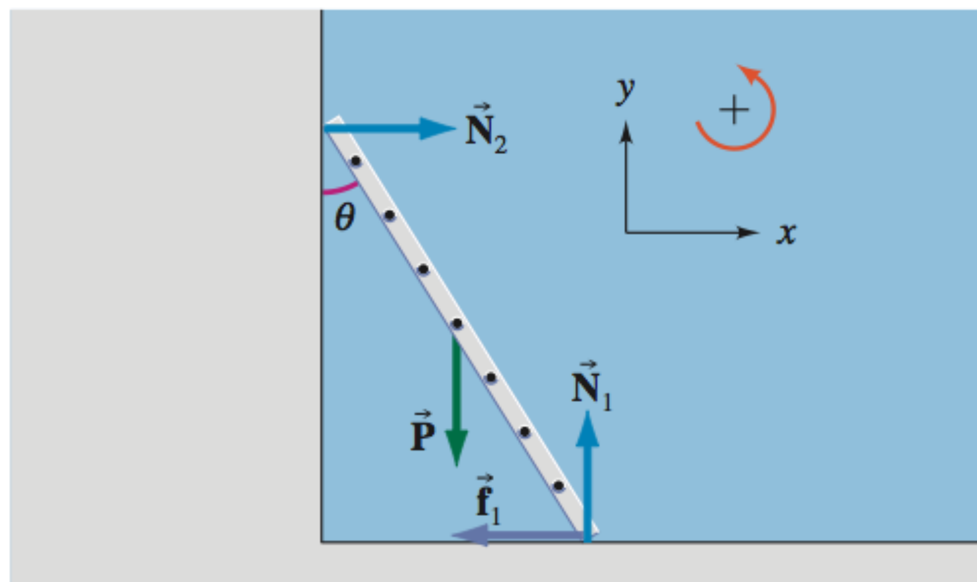
$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$0 = \sum M_i$$



Est-ce que l’échelle va glisser ?

Plancher rugueux
Mur parfaitement lisse (hem :-)



Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

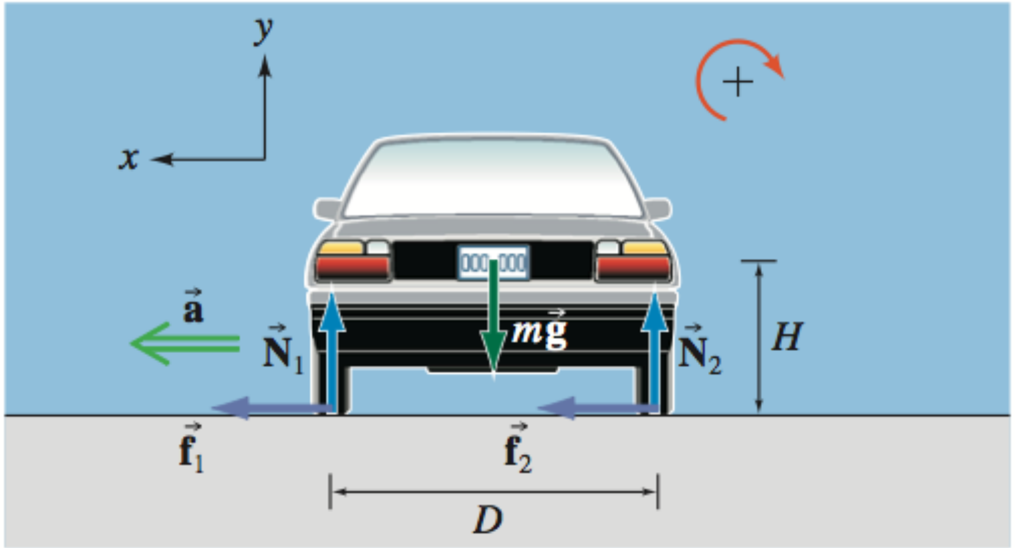
$$0 = \sum M_i$$

A quelle vitesse la voiture fera-t-elle un tonneau ?

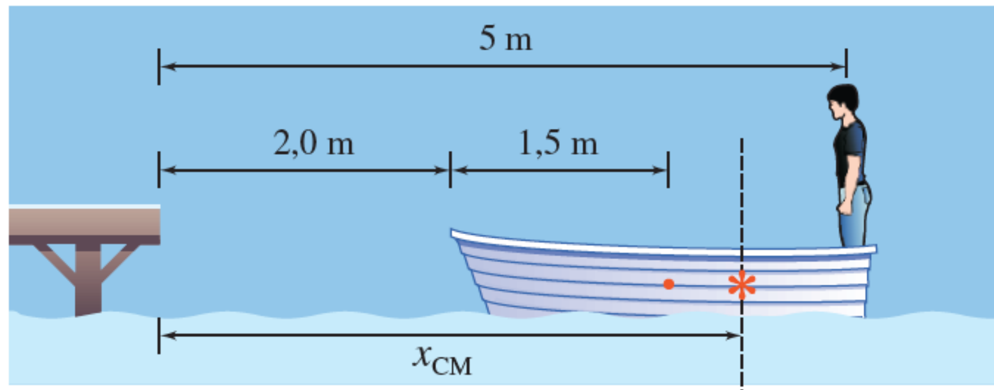
Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$0 = \sum M_i$$

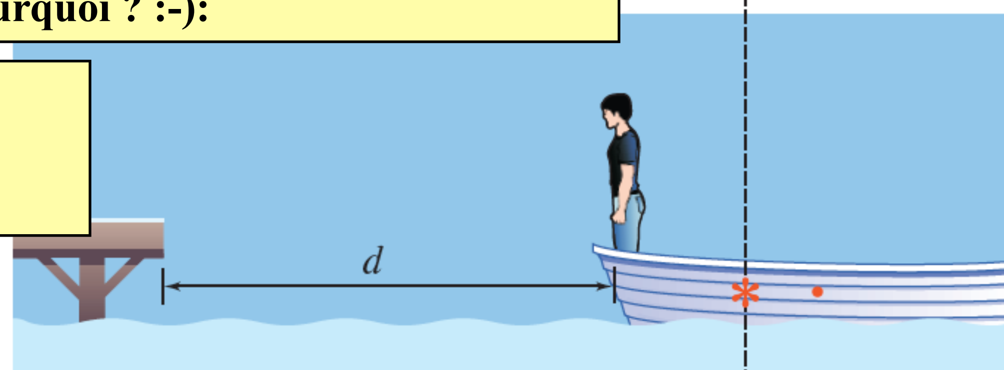


Deux corps comme un unique système...



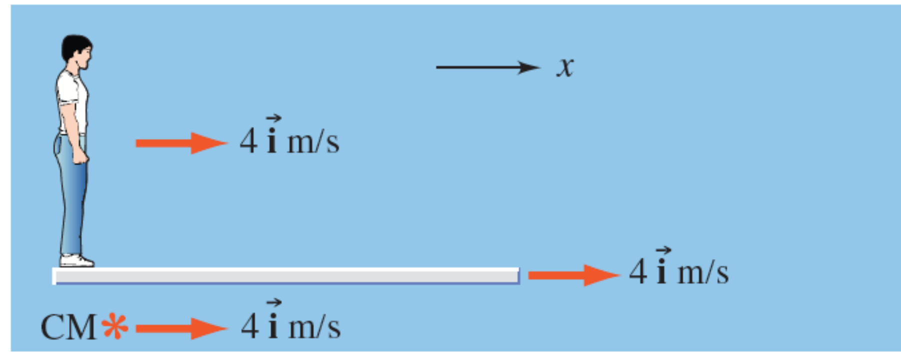
C'est vraiment une manière très efficace de résoudre certains problèmes !
Ici, on suppose qu'aucune force extérieure agit sur la barque.
C'est une approximation un peu fausse (pourquoi ? :-):

Ensuite, on peut appliquer la conservation
de la quantité de mouvement
pour l'ensemble du système.



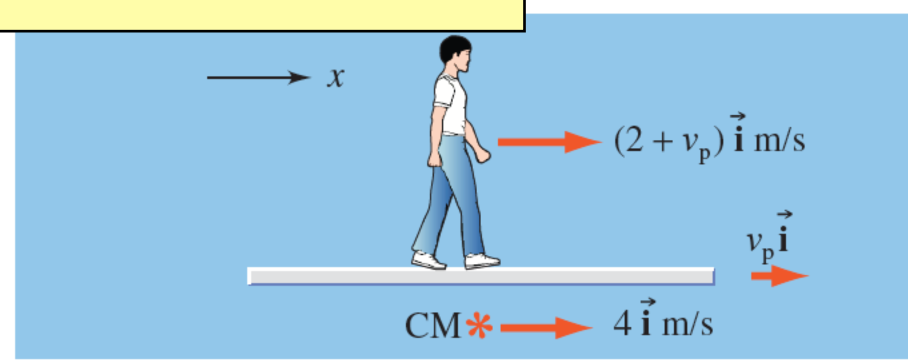
Deux corps comme un unique système...

Planche = 25 kg
Passager = 75 kg

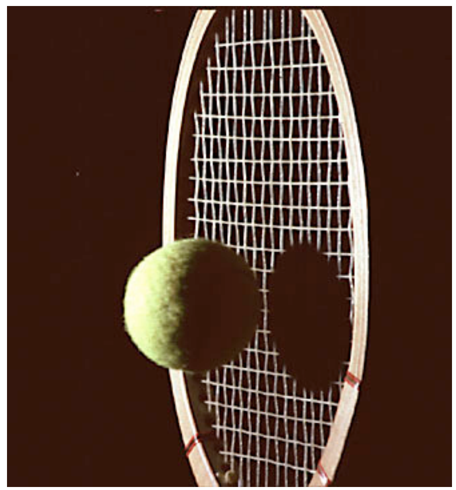


Ici, on suppose à nouveau qu'aucune force extérieure agit sur la planche.
On la dépose sur lac gelé :-)

Ensuite, on peut appliquer la conservation
de la quantité de mouvement
pour l'ensemble du système.



Un corps, cela peut aussi être un paquet de corps !



**On peut appliquer la conservation
de la quantité de mouvement ou de l’énergie
pour l’ensemble du système.**

C’est ce qu’on a fait pour analyser les chocs !

Un obus qui explose en deux parties...

On peut déduire le mouvement d'un des morceaux à partir du mouvement de l'autre fragment !

Le centre de masse poursuit la trajectoire parabolique initiale…

... et la collision tout-à-fait inélastique entre deux voitures !

- **Le moment est le produit du bras de levier par la force**
- **L'énergie cinétique d'un corps est la somme de celle liée au mouvement du centre de masse et celle liée à la rotation du corps autour de ce point.**
- **Pour la rotation d'un corps autour de son centre de gravité, les moments de force, le moment cinétique et le moment d'inertie du corps sont l'équivalent des forces, de la quantité de mouvement et de la masse pour le mouvement du centre de masse !**
- **Un corps est à l'équilibre si la somme des forces et des moments est nulle : c'est l'équilibre statique.**

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2 + \tfrac{1}{2}I\,\omega^2\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

Equilibre statique

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
0 &= \sum M_i
\end{aligned}
$$