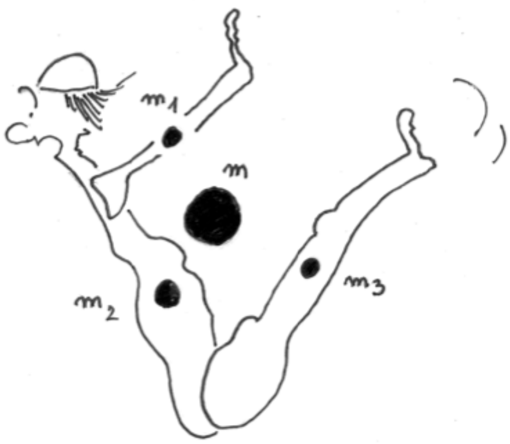
Faculté des Sciences de la Motricité



INTRODUCTION A LA MECANIQUE

...ou l'émerveillement du scientifique face à la théorie de Newton.

V. Legat

Enoncés des exercices pour le cours LIEPR1011
Année académique 2015-2016 (version 0.0 1-9-2015)

Ce texte est toujours une version provisoire. Malgré tout le soin apporté à sa rédaction, il est possible que quelques erreurs soient toujours présentes dans le texte. Tout commentaire, critique ou suggestion de votre part, est évidemment le bienvenu. Il vous est possible de m'envoyer vos commentaires directement par courrier électronique à l'adresse suivante : `vincent.legat@uclouvain.be`

La plupart des exercices sont directement inspirés du livre de référence : Physique 1, mécanique (Benson), mais la présentation et les notations sont différentes.

Les éventuels errata du texte seront disponibles sur le site Web du cours.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{v}}(t)\\ \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{a}}(t)\\ m\,\vec{\mathbf{a}}(t) &= \sum \vec{\mathbf{F}}(t)\end{aligned}$$

Séance 1

It is a piece of cake :-)

1 On lance un caillou d'une falaise de 100 m de hauteur avec une vitesse initiale 25 m/s et selon un angle de projection de 53^o par rapport à l'horizontale. On néglige la friction avec l'air.

1. Calculer le temps qui s'écoule avant qu'il n'atteigne le sol.
2. Calculer la hauteur maximale.
3. Calculer la portée horizontale.
4. Calculer la vitesse lorsqu'il touche le sol.

Quelques ordres de grandeur de vitesse

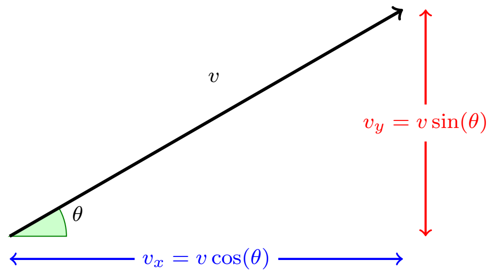
10 km/h	$2,78$ m/s
50 km/h	13.89 m/s
90 km/h	25 m/s
100 km/h	$27,78$ m/s
120 km/h	$33,33$ m/s
1 m/s	$3,6$ km/h
10 m/s	36 km/h
25 m/s	90 km/h
50 m/s	180 km/h
100 m/s	360 km/h

2 Un ballon de basket est lancé avec une angle de 45^o par rapport à l'horizontale. Le panier se trouve à une distance horizontale de 4 m et à une hauteur de $0,8$ m au dessus du point d'où on lance le ballon. Quel est le module ou la norme de la vitesse initiale requise pour atteindre le panier ?

3 Une pierre est lancée vers le haut avec une vitesse de 25 m/s selon un angle de 50^o avec l'horizontale. A quels instants, sa vitesse forme-t-elle une angle de $\pm 30^o$ avec l'horizontale ?

4 Un hélicoptère s'élève à 100 m au-dessus de son aire de décollage et vole sur une distance horizontale de 200 m à 25^o sud par rapport à l'ouest.
Quel est son déplacement par rapport à son point de départ ?

La vitesse $\vec{v}$ est un vecteur et non pas un scalaire !



module : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

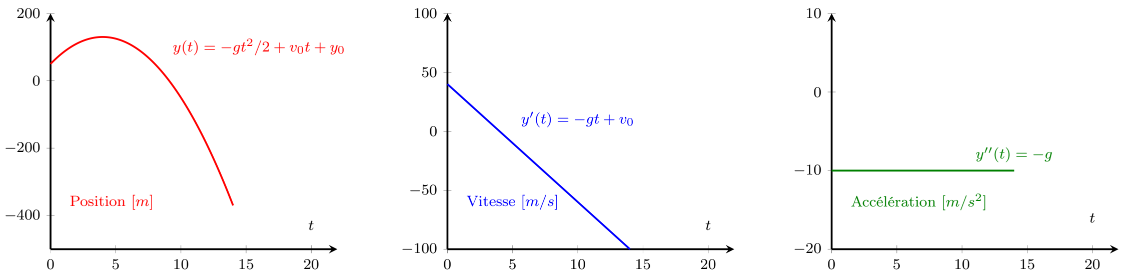
orientation : θ tel que $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \dfrac{v_y}{v_x}$

5 Un voilier se trouve en un point distant de 4 km d'un phare. Par rapport au phare, ce point se trouve à 40^o nord par rapport à l'est. Le voilier se déplace vers un point situé à 6 km du phare et pour lequel l'orientation est de 60^o nord par rapport à l'ouest, toujours à partir du phare.

1. Quel est le déplacement du voilier ?
2. Pendant son déplacement, quelle a été la plus courte distance entre le voilier et le phare ?

Chute libre d'un objet : mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)

$$\begin{cases} a(t) &= -g \\ v(t) &= -gt + v_0 \\ y(t) &= -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{cases}$$



Que vaut l'accélération, la vitesse initiale et la position initiale sur les figures ?

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{v}}(t)\\ \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{a}}(t)\\ m\,\vec{\mathbf{a}}(t) &= \sum \vec{\mathbf{F}}(t)\end{aligned}$$

Séance 2

Mouvement d'un projectile

6 Juliette qui se trouve sur un balcon à 40 m au dessus du sol, jette sa clé à Roméo, qui est au sol, selon un angle de 37^o sous l'horizontale. Deux secondes après, Roméo attrape la clé, juste avant qu'elle ne touche le sol... On supposera donc qu'il attrape la clé au niveau du sol.

1. A quelle distance, se trouvait Roméo du pied du bâtiment ?
2. Dans quelle direction se déplaçait la clé lorsque Roméo l'a attrapée ?

Mouvement d'un projectile

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix}\\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix}\\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

7 On lance une balle vers le haut avec une vitesse de $14,1$ m/s à un angle de 45^o par rapport à l'horizontale. Un joueur situé à 30 m sur l'axe horizontal de la trajectoire commence à courir juste au moment où la balle est lancée. On suppose que la course se fait avec une vitesse parfaitement constante : ce qui n'est pas totalement réaliste :-)
Quel doit être le vecteur vitesse (module et direction) du joueur afin d'attraper la balle au même niveau que celui auquel elle a été lancée ?

8 L'eau sort d'un tuyau d'incendie à une vitesse de 18 m/s. Quels sont les deux angles d'orientation possibles du tuyau pour que l'eau atteigne un point situé à 30 m à la même hauteur que le bec du tuyau ?

Calculer la dérivée $u'(t)$ d'une fonction $u(t)$

$u(t) = c$	$u'(t) = 0$
$u(t) = t$	$u'(t) = 1$
$u(t) = t^2$	$u'(t) = 2\ t$
$u(t) = \sin(t)$	$u'(t) = \cos(t)$
$u(t) = \cos(t)$	$u'(t) = -\sin(t)$
$u(t) = c\ f(t)$	$u'(t) = c\ f'(t)$
$u(t) = f(t) + g(t)$	$u'(t) = f'(t) + g'(t)$
$u(t) = f(t)\ g(t)$	$u'(t) = f'(t)\ g(t) + g'(t)\ f(t)$
$u(t) = f(g(t))$	$u'(t) = f'(g(t))\ g'(t)$

Le nombre c est un réel quelconque.
Graphiquement, $u'(x)$ est la pente de la droite tangente en x.

Calculer une primitive $F(t) = \int u(t)$ d'une fonction $u(t)$

$$\int u'(t) = u(t) + c$$

Pratiquement, on cherche de quelle fonction $u(x)$ est la dérivée !

$u(t) = 1$	$\int u(t) = t + c$
$u(t) = t$	$\int u(t) = t^2/2 + c$
$u(t) = t^2$	$\int u(t) = t^3/3 + c$
$u(t) = \sin(t)$	$\int u(t) = -\cos(t) + c$
$u(t) = \cos(t)$	$\int u(t) = \sin(t) + c$
$u(t) = c\ f(t)$	$\int u(t) = c\ \int f(t)$
$u(t) = f(t) + g(t)$	$\int u(t) = \int f(t) + \int g(t)$

Le nombre c est un réel quelconque.
La primitive d'une fonction $u(t)$ est une fonction définie à une constante près !

Calculer l'intégrale définie $\int_a^b u(t)$ d'une fonction $u(t)$

$$\int_a^b u(t) = F(b) - F(a)$$

Graphiquement, c'est la surface comprise entre la courbe $u(x)$ au-dessus de l'axe des x et les droites $x = a$ et $x = b$.
L'intégrale définie d'une fonction $u(t)$ entre deux valeurs est un nombre !

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{v}}(t) \\ \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{a}}(t) \\ m\,\vec{\mathbf{a}}(t) &= \sum \vec{\mathbf{F}}(t) \end{aligned}$$

Séance 3

Mécanique de Newton :-)

9 Les coordonnées cartésiennes de la position $\vec{\mathbf{r}}(t)$ d'une particule en fonction du temps sont :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t^2 - 2t \\ -t^3 \end{bmatrix}$$

1. Quelles sont les composantes de la vitesse à $t = 2\ s$?
2. Quelles sont les composantes de l'accélération à $t = 4\ s$?
3. Quelles sont les composantes de l'accélération moyenne entre $t = 1\ s$ et $t = 3\ s$?

Première loi de Newton

Tout corps conserve son état de repos ou son mouvement rectiligne uniforme si la résultant des forces extérieures agissant sur le corps est nulle.

Seconde loi de Newton

$$m\,\vec{\mathbf{a}}(t) = \sum \vec{\mathbf{F}}(t)$$

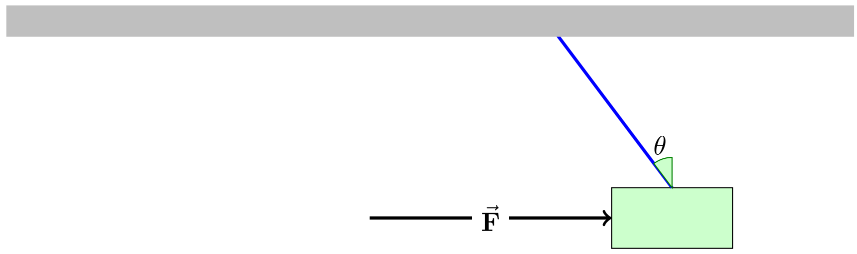
La résultante des forces agissant sur une particule de masse m produit une accélération de même orientation ! La première loi de Newton n'est donc qu'un cas particulier de la seconde loi :-)

Troisième loi de Newton

$$\vec{\mathbf{F}}_{BA} = -\vec{\mathbf{F}}_{AB}$$

La force exercée par un objet B sur un objet A est égale en module et de sens opposé à la force exercée par l'objet A sur l'objet B

10 Un bloc d'une masse globale de 2 kg est suspendu par une corde. On applique sur le bloc une force horizontale $\vec{\mathbf{F}}$ afin de maintenir la corde avec un angle de $\theta = 37^o$ par rapport à la verticale.

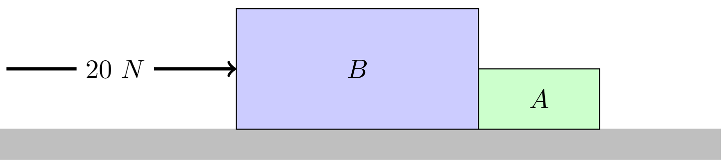


1. Quel est le module F de cette force ?
2. Quel est le module T de la tension de la corde ?

Comment résoudre un exercice de physique ?

– Lire l'énoncé calmement... avant de vous précipiter dans de l'algèbre !
– Tenter d'imaginer et de vivre la solution décrite !
– Faire un ou plusieurs dessins !
– Ecrire les équations générales du problème-type identifié !
– Esquisser les profils des composantes du mouvement, de vitesse et d'accélération !
– Résoudre le problème : normalement, le nombre d'inconnues et d'équations doit coïncider !
– Utiliser les mêmes unités pour toutes les données !
– Se méfier des informations parasites inutiles semées vicieusement dans certains énoncés !
– Vérifier la cohérence dimensionnelle de vos expressions symboliques.
– Ne remplacer les variables par des valeurs numériques qu'à la fin du calcul !

11 Deux blocs A et B ont des masses $m_A = 2\ kg$ et $m_B = 3\ kg$. Ils sont en contact et glissent sur une surface horizontale sans frottement. Une force dont le module vaut 20 N agit sur le bloc B.



1. Calculer le module de l'accélération ?
2. Calculer le module de la force exercée par A sur B ?
3. Calculer le module de la résultante des forces extérieures sur le bloc B ?
4. Calculer le module de la force exercée par A sur B si on intervertit la position des blocs ?

12 Une fillette tombe d'une plate-forme située à 1 m au-dessus du sol. Calculer la force exercée à la base du torse de 40 kg lorsqu'elle touche le sol et s'arrête en pliant les genoux sur 30 cm.

Quelle serait cette force lorsqu'elle ne plie les genoux que sur 4 cm seulement ?

$$\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) = \vec{\mathbf{v}}(t)$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) = \vec{\mathbf{a}}(t)$$

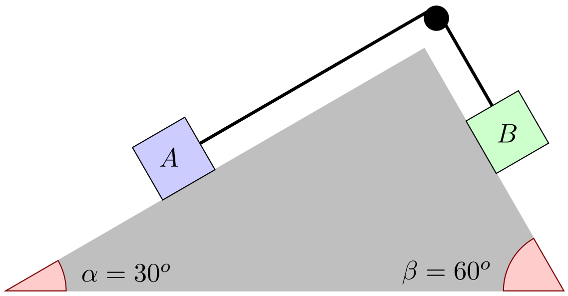
$$m\,\vec{\mathbf{a}}(t) = \sum \vec{\mathbf{F}}(t)$$

Séance 4

Blocs, cordes et poulies

13

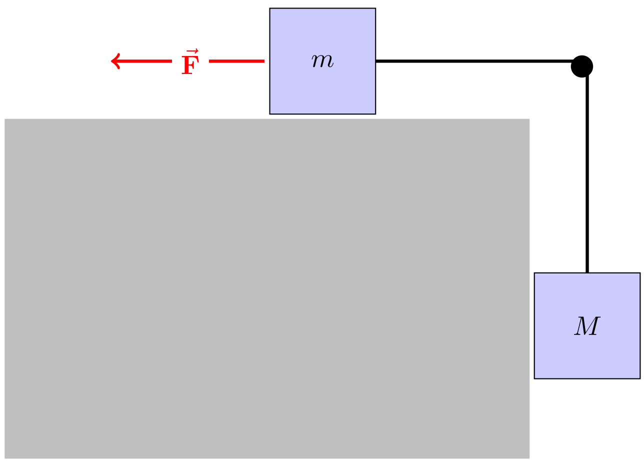
Deux blocs de masses $m_A = 5\ kg$ et $m_B = 6\ kg$ sont situés de part et d'autre d'une poulie. Il n'y a aucun frottement et on néglige la masse des cordes, et de la poulie !
Calculer l'accélération des deux blocs et de la tension de la corde.



14

Deux blocs de masse m et M sont reliés par une corde. Le déplacement sur la surface horizontale se fait sans aucun frottement et le bloc de masse m subit une force horizontale F. On néglige la masse de la corde. Lorsque $F = 22\ N$, le second bloc descend avec une accélération $a = 1\ m/s^2$. Lorsque $F = 44\ N$, le second bloc monte avec une accélération $a = 1.75\ m/s^2$.

Quelles sont les deux masses ?

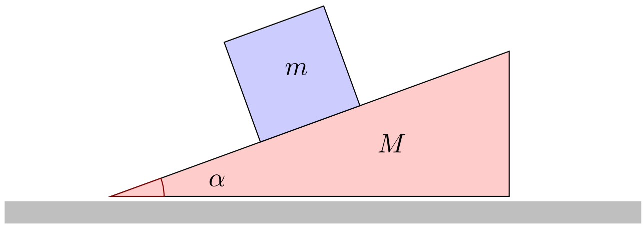


15

Un bloc de masse m est placé sur un coin de section triangulaire de masse M.
Tous les mouvement entre les surfaces se font sans frottement : les corps glissent parfaitement :-)

1. Obtenir l'expression de l'accélération A du coin par rapport au sol
   en fonction de la masse m, de la masse M, de l'angle α et de la gravité.
2. En déduire ensuite l'expression de l'accélération a du bloc par rapport au coin.
3. Et finalement en déduire aussi l'expression de la force normale N entre le bloc et le coin.

Observez bien qu'il s'agit ici de calculer la norme de ces deux accélérations et de cette force.

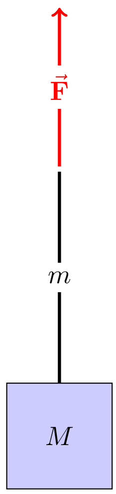


16

Un singe de 10 kg tient une corde qui glisse sur une poulie et qui est reliée à un régime de bananes de 12 kg qui est plus lourd que lui !
Comment est-ce que le singe doit grimper à la corde de façon à soulever les bananes du sol ?
On néglige la masse de la corde évidemment :-)

17

Une corde a une masse $m = 30\ gr$ et est reliée à un bloc de masse $M = 200\ gr$.
On tire vers le haut sur la corde afin que le bloc se soulève avec une accélération $a = 4\ m/s^2$.
Quelle est la tension au milieu de la corde ?

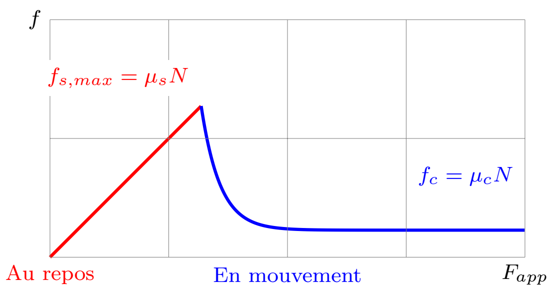


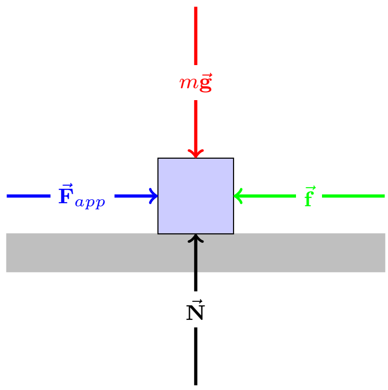
$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{v}}(t) \\
\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{a}}(t) \\
m\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \sum \vec{\mathbf{F}}(t)
\end{aligned}
$$

Séance 5

Forces de frottement

Force de frottement entre deux surfaces solides





Force de frottement statique

Si un bloc est au repos sur une surface et si on exerce une force parallèle F_{app} à la surface, la force de frottement statique ajuste automatiquement sa valeur pour compenser la force appliquée, mais seulement jusqu'à une valeur maximale dont le module est donné par :

$$f_{s,max} \;=\; \mu_s N$$

Force de frottement cinétique

Si un bloc glisse sur la surface, la force de frottement cinétique peut être estimé par :

$$f_c \;=\; \mu_c N$$

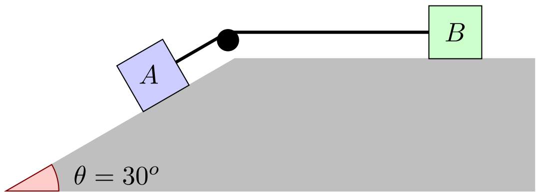
Le coefficient μ_c tend vers une constante uniquement lorsque le glissement devient régulier !

18 La vitesse d'une rondelle de hockey de $m = 90\ gr$ passe d'une valeur $v_0 = 10\ m/s$ à une valeur $v_f = 8\ m/s$ sur une distance $d = 12\ m$. Quelle est la force de frottement exercée sur la rondelle ?

19 Un camion de masse $m = 3000\ kg$ descend en roue libre une pente avec une inclinaison $\alpha = 5^o$ à vitesse constante. On a coupé le moteur et débrayé :-)
Tous les effets de frottement sont supposés constants : la force de frottement ne change pas !
Quelle doit être la force fournie par le moteur pour que la camion puisse remonter cette pente avec la même vitesse ?

20

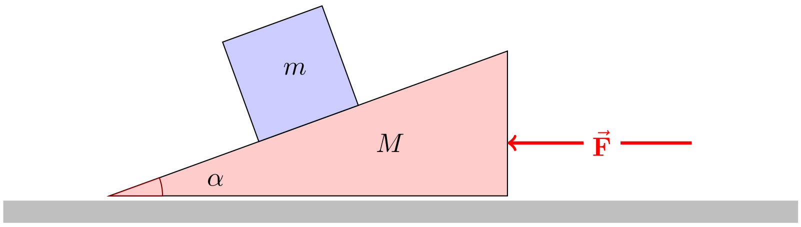
Deux blocs reliés entre eux sont en mouvement à vitesse constante. Le bloc A descend sur le plan incliné. Les masses respectives de deux blocs sont $m_A = 5\ kg$ et $m_B = 2\ kg$. On a un unique coefficient de frottement bloc-sol pour les deux blocs.



1. Quelle est la valeur de ce coefficient de frottement cinétique bloc-sol ?
2. Quelle est la tension dans la corde ?

21

Un bloc de masse $m = 0.5\ kg$ est placé sur un coin de section triangulaire de masse $M = 2\ kg$. Ce second bloc est soumis à une force horizontale F et glisse sans aucun frottement sur le sol horizontal. L'angle $\alpha = 40^o$. Le coefficient de frottement statique entre les deux blocs est $\mu_s = 0,6$.
Pour quelles valeurs de cette force F, le bloc ne glisse pas sur le plan incliné ?



Force de frottement exercée par un fluide sur un corps : force de trainée (drag)

La trainée est une force aérodynamique due à l'écoulement de l'air autour d'un corps en mouvement. Cette force s'oppose au mouvement et grandit avec la vitesse :

$$F_D = \underbrace{\frac{1}{2} C_D \rho A}_{k}\ v^2$$

où A est la surface frontale du corps, ρ est la masse volumique du fluide et C_D est un coefficient de trainée qui dépend lui-même de la forme, de l'orientation et de la vitesse du corps.

Pour un mouvement à basse vitesse, la trainée est simplement proportionnelle à la vitesse : $F_D = \gamma v$.

22

Un paquet de masse $m = 20\ kg$ tombe d'un avion et atteint une vitesse limite $v_L = 30\ m/s$.
On considère que la trainée de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse.
Quelle vaut la trainée lorsque le paquet a une vitesse qui est la moitié de sa vitesse limite ?

23

Le moteur d'une auto permet gravir une pente d'un angle maximal α avec une vitesse constante.
Tous les effets de frottement sont supposés constants : la force de frottement ne change pas !
Quelle serait son accélération maximale sur une route horizontale ?

$$\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$
$$\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

Séance 6

Quantité de mouvement et énergie

Notions physiques en mécanique

Vitesse	$\vec{\mathbf{v}}$	m/s
Accélération	$\vec{\mathbf{a}}$	m/s^2
Force	$\vec{\mathbf{F}}$	$kg\ m/s^2 = N$
Impulsion	$\vec{\mathbf{F}}\ \Delta t$	$kg\ m/s = Ns$
Quantité de mouvement	$m\vec{\mathbf{v}}$	$kg\ m/s = Ns$
Puissance	$\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$	$kg\ m^2/s^3 = Nm/s = J/s = W$
Travail	$\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}$	$kg\ m^2/s^2 = Nm = J$
Energie cinétique	$\frac{1}{2}mv^2$	$kg\ m^2/s^2 = Nm = J$

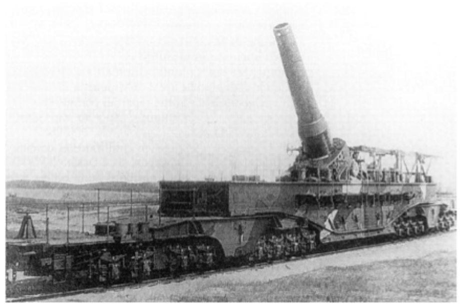
Lorsque les forces sont constantes,

$$\Delta\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t$$
$$\Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}$$

24 Une balle est projetée du sommet d'une falaise avec une vitesse initiale $\vec{\mathbf{v}}_0$ qui pointe vers le haut avec un angle θ par rapport à l'horizontale. La falaise a une hauteur h rapport au sol. La force de trainée est négligée.

1. Esquisser un dessin du problème !
2. Déterminer la vitesse de la balle lorsqu'elle touche le sol avec la cinématique et la loi de Newton.
3. Déterminer ensuite cette même vitesse en effectuant un bilan d'énergie !

25 Une masse $m = 2$ kg est propulsée avec une vitesse initiale $v = 4$ m/s sur une surface horizontale. Le coefficient de frottement cinétique est $\mu_c = 0.6$.
Quelle sera la distance parcourue avant que l'objet ne s'arrête ?



26

Un canon dont l'élévation du tube est donnée par un angle α se trouve sur la plate-forme d'un wagon initialement au repos. La masse totale du wagon et du canon est M. Un obus de masse m est tiré. La vitesse v de cet obus par rapport au canon est connue à la sortie du tube de la pièce d'artillerie. Tous les frottements sont négligés.

1. Quelle sera la vitesse de recul du wagon juste après le tir ?
2. Quel sera l'angle θ par rapport à l'horizontale selon lequel le boulet sort du canon ?
   En d'autres mots, quelle sera l'orientation de la vitesse de l'obus par rapport à un repère inertiel lié à un point fixe du sol. Attention : il ne s'agit pas de l'angle α :-)

Collisions élastiques et inélastiques !

La quantité de mouvement globale est toujours conservée.

Lors d'une collision parfaitement élastique, l'énergie cinétique globale est aussi conservée.
Lors d'une collision totalement inélastique, les deux particules restent collées entre elles !

27

Une grosse berline allemande de $m_1 = 1500\,\mathrm{kg}$ emboutit l'arrière d'une petite voiture française de $m_2 = 1000\,\mathrm{kg}$, arrêtée à un feux rouge. Les 2 véhicules restent accrochés et produisent des traces de pneus de $4\,\mathrm{m}$ de long. Le coefficient de frottement cinétique est $\mu_c = 0.6$

1. Quelle est leur vitesse commune juste après la collision ?
2. Quelle est la vitesse de la grosse berline allemande juste avant la collision ?

28

Lors d'un plaquage, deux joueurs de rugby se percutent perpendiculairement.
Le premier joueur a une masse $m_A = 90\,\mathrm{kg}$ et court avec une vitesse $v_A = 8\,\mathrm{m/s}$.
Le second joueur a une masse de $m_B = 110\,\mathrm{kg}$ et court avec une vitesse $v_B = 7.5\,\mathrm{m/s}$.

La collision est parfaitement inélastique et se produit pendant le court instant où les pieds ne touchent pas la sol. En d'autres mots, les deux joueurs restent accrochés ensemble après leur choc !

1. Quelle est leur vitesse commune juste après le choc ?
2. Quelle est la perte d'énergie cinétique ?

29

La tête d'un bâton de golf frappe une balle de golf de $m = 46\,\mathrm{gr}$ au repos. Si le choc dure sur un intervalle de temps $\Delta t = 5\ 10^{-4}$ secondes et que la balle acquiert une vitesse $v = 220\,\mathrm{km/h}$.
Quelle est l'impulsion et la force moyenne correspondante subies par la balle ?

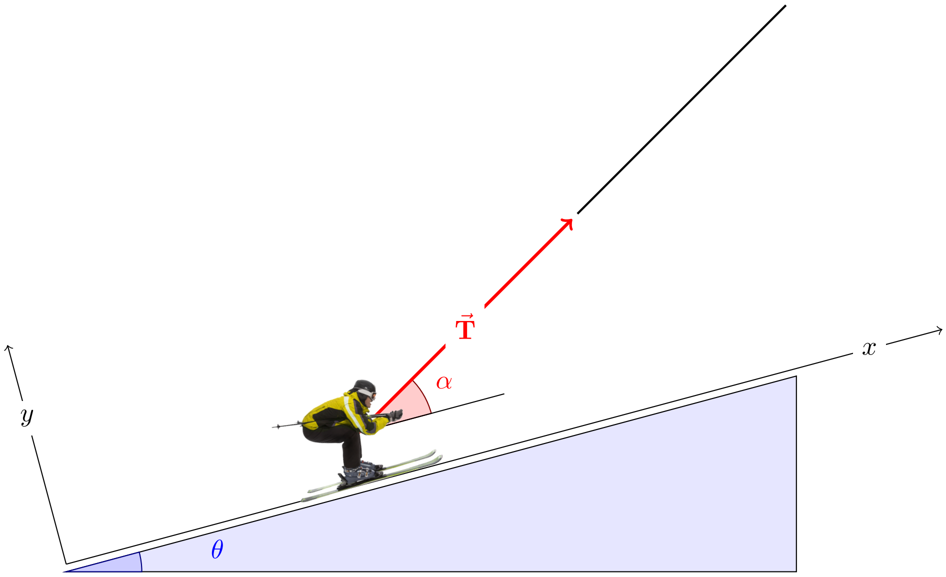
30

Une balle de tennis de $m = 60\,\mathrm{gr}$ percute horizontalement un mur avec une vitesse $v = 30\,\mathrm{m/s}$.
Après la collision, elle n'a plus que 81% de son énergie cinétique initiale.
Quelle est l'impulsion subie par la balle ?

$$\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\ v^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

Séance 7

Le skieur :-)



31 Un skieur de masse $m = 40$ kg (y-compris, les skis, le sac à dos et le pique-nique :-) est tracté par un cable sur une pente avec une inclinaison constante $\theta = 15^o$ par rapport à l'horizontale. Il se déplace à vitesse constante et l'angle formé par la corde et la pente est $\alpha = 30^o$. On néglige le frottement exercé par l'air sur le skieur, mais on tient compte du frottement du sol sur les skis. La force dans le cable est connue et vaut $T = 250$ N.

1. Obtenir le coefficient de frottement cinétique μ_c entre la neige et les skis.
2. Calculer le travail effectué par toutes les forces pour un déplacement quelconque du skieur le long de la pente. Montrer ensuite que faire le bilan d'énergie cinétique est équivalent à faire le bilan de la composante en x de la quantité de mouvement.
3. Obtenir l'accélération que subirait le skieur si il lachait le cable du tire-fesse.

Ensuite, le skieur va dévaler une piste dont la longueur vaut $L = 4000$ m.
La différence d'altitude entre le début et de la fin de la piste est $h = 400$ m.
On suppose que tous les frottements sont négligeables. Le skieur se laisse simplement descendre sur la piste sans fournir aucun travail pour accélérer ou freiner que ce soit avec les batons ou son corps.

4. Au début de la piste, quelle doit être la pente minimale pour que le skieur bouge s'il ne donne aucune impulsion initiale ?
5. Quelle sera la vitesse du skieur en bas de la piste ?

La gravité est une force conservative !

- Gravité $F_g = mg$

Le travail des forces conservatives ne dépend que de la position finale et initiale.
Le travail de la gravité peut diminuer ou augmenter l'énergie cinétique.
La gravité contribue à diminuer ou augmenter la quantité de mouvement.

Le frottement est une force non conservative !

- Frottement solide-solide $f = \mu_c N$

- Frottement solide-fluide (trainée) $F_D = \frac{1}{2} C_D \rho A\, v^2$

Le travail des forces non-conservatives dépend du trajet parcouru.
Le travail des forces de frottement correspond à une dissipation d'énergie cinétique en chaleur.
Les forces de frottement contribuent à réduire la quantité de mouvement.

La force du moteur ?

Le travail des forces motrices correspond à un apport d'énergie cinétique.
Les forces motrices contribuent à augmenter la quantité de mouvement.
Cette énergie provient -par exemple- de la combustion d'un carburant !

Notions physiques en mécanique

Vitesse	$\vec{\mathbf{v}}$	m/s
Accélération	$\vec{\mathbf{a}}$	m/s^2
Force	$\vec{\mathbf{F}}$	$kg\ m/s^2 = N$
Impulsion	$\vec{\mathbf{F}}\ \Delta t$	$kg\ m/s = Ns$
Quantité de mouvement	$m\vec{\mathbf{v}}$	$kg\ m/s = Ns$
Puissance	$\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$	$kg\ m^2/s^3 = Nm/s = J/s = W$
Travail	$\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}$	$kg\ m^2/s^2 = Nm = J = Ws$
Energie cinétique	$\frac{1}{2}mv^2$	$kg\ m^2/s^2 = Nm = J = Ws$

Lorsque les forces sont constantes,

$$\Delta\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t$$

$$\Delta\left(\frac{1}{2}m\ v^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

Séance 8

Bilans d'énergie

Forces conservatives et énergies potentielles

- Gravité $F_g = mg$ $U_g = mg\,h$
- Ressort $F_r = k\,x$ $U_r = \frac{1}{2}k\,x^2$

Le travail des forces conservatives correspond à un transfert entre énergie cinétique et potentielle.

Forces non-conservatives de frottement

- Frottement solide-solide $f = \mu_c N$
- Frottement solide-fluide (trainée) $F_D = \frac{1}{2}C_D\rho A\,v^2$

Le travail des forces de frottement correspond à une dissipation d'énergie cinétique en chaleur.
Il n'est pas possible d'y associer une énergie potentielle.

32 Une masse $m = 2$ kg est propulsée avec une vitesse initiale $v = 4$ m/s sur une pente avec un angle $\theta = 30°$ vers le haut. Le coefficient de frottement cinétique est $\mu_c = 0.6$.
Quelle sera la distance parcourue avant que l'objet ne s'arrête ?

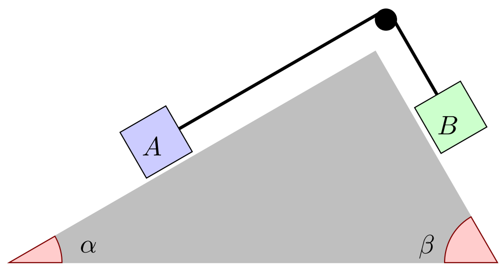
33 On lâche un bloc de $m = 500\,$g d'une hauteur $h = 60\,$cm sur un plateau au dessus d'un ressort dont la constante de raideur est $k = 120\,$N/m. Quelle sera la compression maximale du ressort ?

34 Un gymnaste avec une masse $m = 68$ kg atteint une hauteur $h = 3$ m au dessus de la surface d'un trampoline. La surface du tramploline s'enfonce de $d = 45$ cm lorsque l'athlète retombe.
Quelle serait la constante de raideur du trampoline si celui-ci se comportait tel un ressort idéal ?

35 Sur un plan incliné avec un angle $\theta = 30°$, une masse $m = 0.2$ kg est maintenue contre un ressort dont la constante de raideur est $k = 16N/m$. Le coefficient de frottement est $\mu_c = 0.1$ et le ressort est initialement comprimé d'une distance $d = 25$ cm. A l'instant zéro, on libère le bloc.
Quelle sera la vitesse de la masse lorsqu'elle va se séparer du ressort qui a retrouvé à cet instant sa position neutre ?

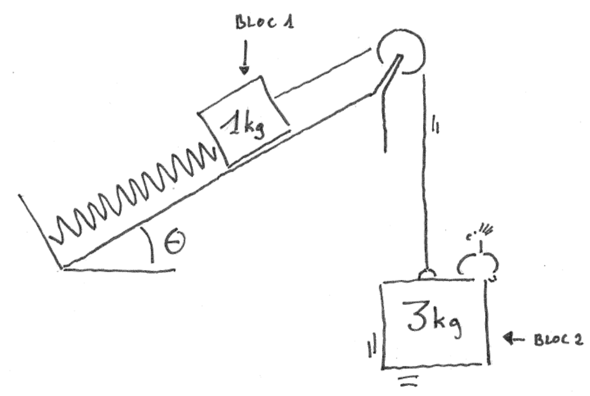
36

Deux bloc de masses $m_A = 4$ kg et $m_B = 5$ kg sont reliés par une corde via une poulie sur un bloc triangulaire avec des angles $\alpha = 30°$ et $\beta = 60°$ respectivement. Il n'y aucun frottement dans la poulie. La masse de la corde et de la poulie sont négligeables.
Le système est initialement au repos.
Quelle est la vitesse des blocs lorsqu'ils se sont déplacés d'une distance $d = 40\,\text{cm}$?



37

Deux blocs de masse $m_1 = 1$ kg et $m_2 = 3$ kg sont reliés par une corde par le biais d'une poulie. Le premier bloc est attaché à un ressort dont la constante de raideur $k = 16$ N/m sur un plan incliné avec un angle $\theta = 25°$. Initialement, le système est maintenu au repos et le ressort est à sa position naturelle. Lorsqu'on libère la seconde masse, celle-ci se met à tomber sous l'effet de la gravité tout en étant retenue partiellement par l'ensemble de la corde, du premier bloc et du ressort.
Le coefficient de frottement cinétique est $\mu_c = 0.11$.
Quelle est la vitesse du second bloc après une chute de 20 cm ?



Bilan d'ênergie

$$\Delta\overbrace{\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right)}^{K} = \sum\overbrace{\vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$
$$= \sum\vec{\mathbf{F}}_{nc}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}} + \sum\vec{\mathbf{F}}_{c}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}$$
$$= \underbrace{\sum\vec{\mathbf{F}}_{nc}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} - \Delta\Big(\underbrace{mg\,h}_{U_g}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\,k\,x^2}_{U_r}\Big)$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\ m\ \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}} \times m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

Séance 9

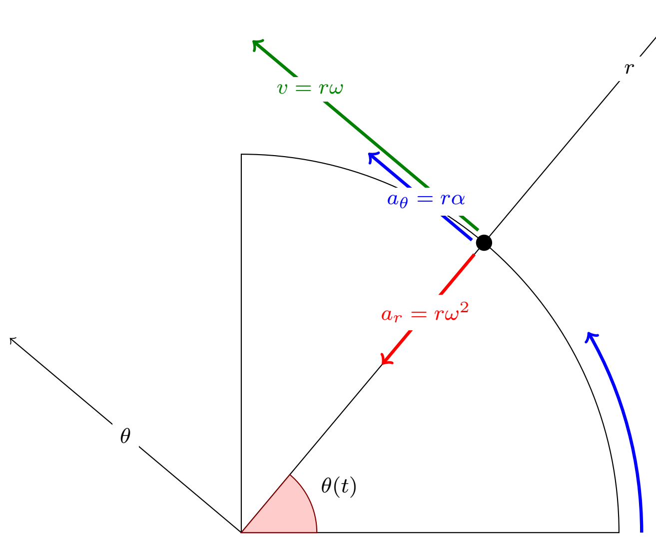
Mouvements circulaires

38 Une particule est en train de parcourir un cercle de rayon de 4 m. A un instant donné t^*, sa vitesse augmente à raison de 2 m/s^2 et son accélération centripète est 6 m/s^2. Quelle est la norme de son accélération totale et de sa vitesse à cet instant précis ?

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}$$



Vitesse : $v = r\omega$ [m/s]

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$ [m/s^2]

Vitesse angulaire ω [radians/s] et accélération angulaire α [radians/s^2]

Mouvements circulaires

$$\frac{d}{dt}\Big(m\,\vec{\mathbf{v}}\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\downarrow$$

$$m\begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \end{bmatrix}$$

39 Un seau d'eau décrit un mouvement circulaire vertical de rayon 80 cm. Quelle est la vitesse minimale requise au point le plus élevé pour que l'eau ne tombe pas du seau lorsqu'il est à l'envers ?

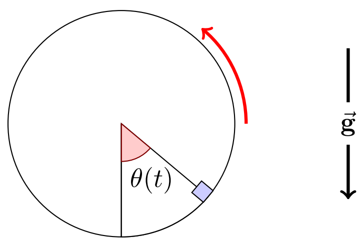
40 Un objet est posé au bord du plateau de rayon $R = 15$ cm qui tourne à 45 tours par minute. Quel est le coefficient de frottement minimal requis pour que ce petit objet reste sur le plateau ?

41 Dans un parc d'attractions, considérons une masse m, lâchée d'une hauteur h par rapport au bas d'un cercle vertical de rayon R. La masse glisse sans aucun frottement sur l'ensemble du parcours de l'attraction. Quelle est la valeur minimale de h pour que la masse ne tombe pas du cercle ?

42 Une bretelle circulaire de sortie d'autoroute a un rayon de 60 m et la signalisation indique une vitesse limite de 60 Km/h. Quelle est le coefficient de frottement minimal requis pour éviter que les voitures ne dérapent si la route est horizontale ?

43 A son sommet, la grande boucle verticale d'un parc d'attractions a un rayon $R = 6.5$ m. Quelle doit être la vitesse minimale du train pour ne pas quitter les rails à cet endroit ? En ce point, quel est le poids apparent d'un enfant de masse m pour une vitesse v du train ?

44 Un petit bloc est placé à l'intérieur d'un cylindre de rayon $R = 40\ cm$ qui tourne avec une période de $2\ s$ autour d'un axe horizontal.



Montrer que l'angle maximal θ atteint par le bloc avant qu'il ne commence à glisser est donné par :

$$g\sin(\theta) = \mu_s\left(g\cos(\theta) + \frac{v^2}{R}\right)$$

où $\mu_s = 0.75$ est le coefficient de frottement statique et v est le module de la vitesse du bloc. Il est ensuite possible de déterminer la valeur de l'angle θ, même si c'est un tout petit peu calculatoire et un fifrelin compliqué :-)

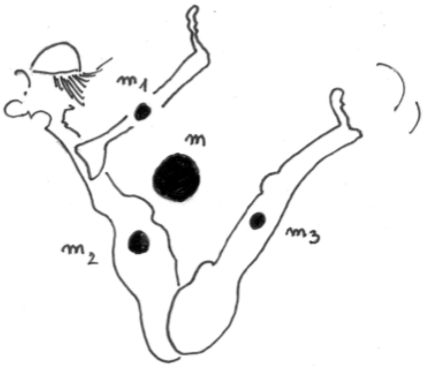
Séance 10

$$\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) = \sum M_i$$

Corps :-)



Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big)$$

$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)$$

45

Calculer la position du centre de masse d'un athlète lors d'un plongeon. Le corps est segmenté en trois parties : le tronc avec la tête, les deux jambes et les deux bras. Globalement, le sujet pèse 60 kg. La masse d'une jambe et la masse d'un bras représentent respectivement 16% et 5% de la masse globale d'une personne.

Les coordonnées des centres de masse des 3 parties du corps sont :

Jambes	(0.30 ; 0.32)
Bras	(0.21 ; 0.53)
Tronc-tête	(0.08 ; 0.27)

46

Un mécanicien équilibre une roue avec une masse $M = 20$ kg en plaçant un petit plomb de masse m sur la jante à $R = 18$ cm du centre de la roue. Le centre de masse de la roue se trouve initialement à une distance de $d = 0.3$ mm du centre géométrique de la roue. Où doit-il placer le plomb et quelle masse doit avoir ce plomb afin que le centre géométrique et le centre de gravité du système globale coïncident ? On ne tient pas compte de l'épaisseur de la roue.

47

Un obus de masse $m = 6$ kg est projeté du sommet d'une falaise de $h = 100$ m de haut avec une vitesse initiale de $v = 50$ m/s avec une direction de $\theta = 53^o$ vers le haut. En un point de sa trajectoire, il explose en deux fragments. Le premier morceau de masse $m_1 = 4$ kg touche le sol à $L = 200$ m au pied de la falaise. Les deux morceaux touchent le sol au même instant. Où atterrit le second morceau ?

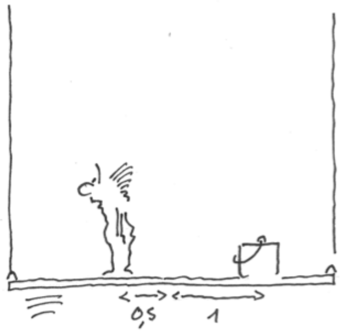
48

La masse de Jacques est $m_1 = 75$ kg tandis que la masse corporelle de Jean est $m_2 = 60$ kg. Ils se trouvent à une distance de $L = 10$ m l'un de l'autre sur un lac gelé où ils peuvent glisser sans aucun frottement. Ils sont initialement immobiles. Ensuite, ils tirent chacun sur une même corde tendue entre eux de sorte que la vitesse de Jean est 0.3 m/s. La longueur de la corde entre eux se réduit donc progressivement. Quelle est la vitesse de Jacques ? Où se rencontreront-ils par rapport à leurs positions initiales ?

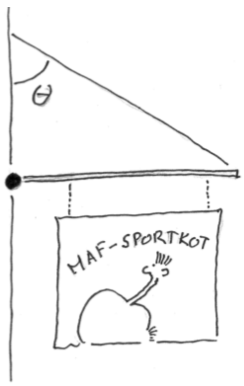
Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$0 = \sum \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i$$



49 Une planche avec une masse $m_p = 5$ kg et une longueur $L = 3.6\ m$ est soutenue par des cordes verticales fixées à ses extrémités. Un peintre $m_h = 60$ kg se trouve à 0.5 m à gauche du centre et un seau de $m_s = 8$ kg à un mètre à droite du centre. Déterminer les tensions dans chacune des deux cordes.



Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F\, r_\perp = F_\perp\, r = F r \sin(\theta)$$

50 Les crochets auxquels est suspendue une enseigne avec une masse $m_1 = 3$ kg sont distants de 72 cm et situés à égale distance du milieu de l'enseigne. Le crochet droit est à 20 cm de l'extrémité de la barre horizontale. Cette barre a une masse $m_2 = 2$ kg et une longueur de $L = 1,2$ m. Le coté gauche de la barre est attaché à un pivot et peut donc tourner librement autour de celui-ci. Le côté droit de la barre est retenu par une câble tendu qui forme un angle $\theta = 60^o$ avec le mur. Quelle est la tension dans le câble ? Quelle est la force exercée par le pivot sur la barre ?

Notions physiques en mécanique

Vitesse	$\vec{\mathbf{v}}$	m/s
Vitesse angulaire	ω	rad/s
Force	$\vec{\mathbf{F}}$	$kg\ m/s^2 = N$
Impulsion	$\vec{\mathbf{F}}\ \Delta t$	$kg\ m/s = Ns$
Quantité de mouvement	$m\vec{\mathbf{v}}$	$kg\ m/s = Ns$
Moment de force	M	$kg\ m^2/s^2 = Nm$
Impulsion angulaire	$M\ \Delta t$	$kg\ m^2/s = Nms$
Moment de la quantité de mouvement	$I\omega$	$kg\ m^2/s = Nms$
Puissance	$\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$	$kg\ m^2/s^3 = Nm/s = J/s = W$
Travail	$\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}$	$kg\ m^2/s^2 = Nm = J$
Energie cinétique	$mv^2/2 + I\omega^2/2$	$kg\ m^2/s^2 = Nm = J$
Energie potentielle de gravité	mgh	$kg\ m^2/s^2 = Nm = J$
Energie potentielle du ressort	$kx^2/2$	$kg\ m^2/s^2 = Nm = J$

Séance 11

Moments d'inertie

$$\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\ v^2 + \frac{1}{2}I\ \omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$
$$\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) = \sum M_i$$

Moment d'inertie

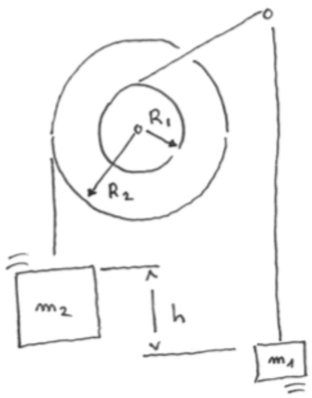
$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution	I	$=$	$m\ R^2$
Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution	I	$=$	$m\ \frac{R^2}{2}$
Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central	I	$=$	$m\ \frac{L^2}{12}$

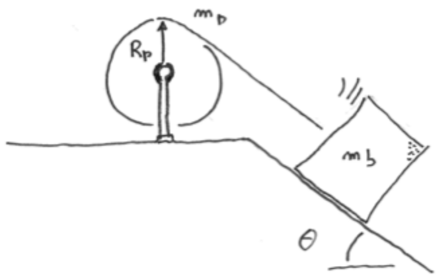


Théorème des axes parallèles

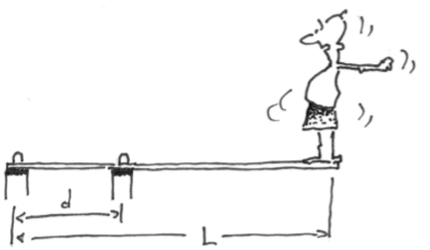
$$I_h = m\ h^2 + I$$

51 Une poulie est constituée de deux cylindres fixés au même arbre. Le moment d'inertie de la poulie est $I = 0.2$ kg m^2 et les deux rayons des cylindres de la poulie sont $R_1 = 5$ cm et $R_2 = 10$ cm. Une corde (sans masse) attachée au bloc de masse $m_1 = 1$ kg passe sur un clou lisse alors qu'un second bloc de masse $m_2 = 3$ kg est suspendu verticalement à partir d'un des disques. A l'instant initial, le second bloc se trouve à une hauteur $h = 2$ m par rapport au premier bloc.
Quelles sont les tensions dans les deux cordes et les accélérations des deux blocs ?
A quel instant les deux blocs seront-ils à la même hauteur ?

52 Un patineur lève la jambe selon un angle α par rapport à la verticale. On considère la jambe comme une barre rectiligne homogène de masse m et de longueur L.
Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical passant par la hanche.

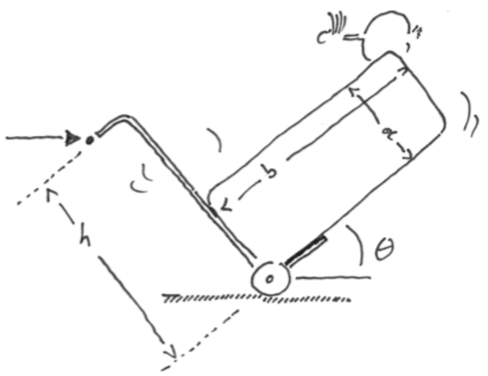


53 Un bloc de masse $m_b = 2$ kg peut glisser sans frottement sur un plan incliné avec un angle $\theta = 53^o$. Il est relié à une poulie de masse $m_p = 4$ kg et de rayon $R_p = 0.5$ m : on assimile la poulie à un cylindre plein. Initialement, le bloc est au repos. En $t = 0$, on libère le bloc qui se met donc à descendre. On considère ensuite l'instant $t = t^*$ où le bloc a glissé d'une distance $L = 1\ m$.
Calculer l'accélération angulaire de la poulie.
Obtenir ensuite la vitesse du bloc à l'instant $t = t^*$.



54 Un plongeur de 60 kg se tient debout à l'extrémité d'un plongeoir rigide de $L = 3$ m de masse négligeable qui est fixé à deux supports distants de $d = 50$ cm. Quelles sont les forces exercées par chaque support sur le plongeoir ? (Examen juin 2013)

55 Le moyeu central d'une roue est assimilé à un cylindre plein de rayon $R_1 = 2$ m et de masse $m_1 = 2$ kg. Les quatre rayons ont une longueur $L = 4$ m et de masse $m_2 = 1$ kg. La jante de la roue est assimilé à un mince anneau circulaire de rayon $R_3 = 6$ m et de masse $m_3 = 2$ kg.
Calculer le moment d'inertie et le rayon de giration de la roue par rapport au centre.



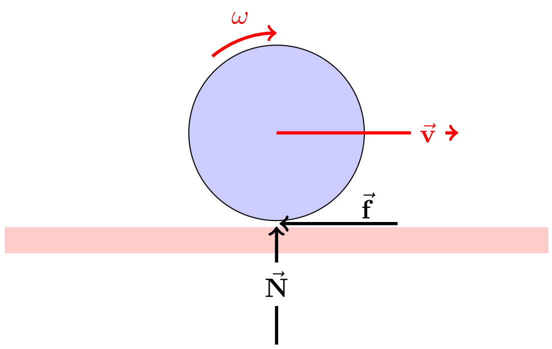
56 Une caisse remplie de façon homogène de dimensions $a = 0.4$ m et $b = 1.0$ m est placée sur un diable. La masse vaut 20 kg. Quelle force horizontale F doit-on appliquer à la poignée afin de maintenir le système en équilibre de rotation ? On néglige le frottement, la masse du diable. La longueur $h =$ 1.1 m et $\theta = 30^o$.

Séance 12

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) &= \sum M_i
\end{aligned}$$

Roues :-)

Condition de roulement sans glissement
$$\begin{aligned} v &= \omega R \\ a &= \alpha R \end{aligned}$$



57 Une roue a un rayon $R = 20$ cm. Elle tourne initialement à une vitesse angulaire de 120 tours/minute, mais elle ralentit avec une décélération constante. Dans la minute qui suit, elle effectue 90 tours. Il n'y a pas de glissement des roues sur la route.
Quelle est son accélération angulaire ?
Quelle distance parcourt l'automobile avant de s'arrêter .

58 Une roue part du repos et accélère uniformément.
Pendant que la vitesse angulaire passe de 20 à 50 tours/minute, elle fera 40 tours.
Quelle est l'accélération de la roue ?
Combien de tours observe-t-on lorsque la vitesse angulaire passe de 0 à 20 tours/minute ?

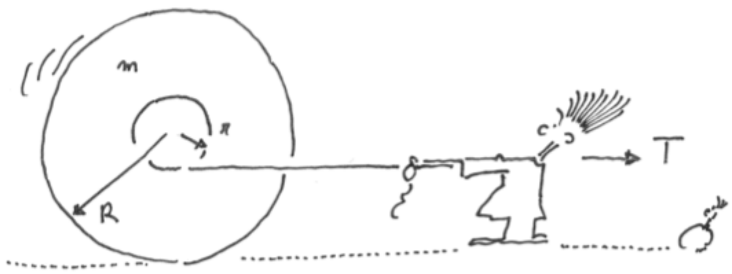
59 Une auto accélère de manière constante à partir du repos. Cette auto atteint une vitesse $v = 30$ m/s en $t = 10$ secondes. Le rayon des roues est $R = 25$ cm.
On considère l'instant où la vitesse de l'automobile vaut exactement 2 m/s.
Quelle est l'accélération du sommet de la roue par rapport à la route et au centre de la roue ?

60 Une personne se tient au bord d'un manège horizontal de rayon $R = 4.5$ m qui tourne avec une vitesse angulaire $\omega = 0.8$ rad/s.
Elle lance une balle avec une vitesse de 30 m/s en imposant que ce vecteur vitesse à cet instant soit dirigé vers le centre du manège.
En d'autres mots, elle vise le centre du manège lorsqu'elle lance la balle.
Et pourtant, de quelle distance, la balle manque-t-elle le centre ?

61 Un automobiliste prend un virage plat de rayon de $R = 40$ m avec une vitesse de module constant. Le niveau de l'eau dans un verre vertical de rayon $r = 1.5$ cm s'élève de $d = 0.5$ cm par rapport à l'horizontale d'un côté et s'abaisse identiquement de l'autre côté.
Quel est la vitesse de l'automobile ?

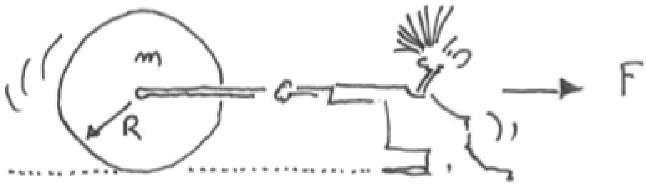
62 Un enfant de masse $m = 42$ kg est assis sur une balançoire dont les cordes font $h = 2,8$ m de long. Lorsque l'enfant est au point le plus bas de la trajectoire, sa vitesse est $v = 1,5$ m/s.
Quelle est la force exercée par le siège sur l'enfant.

63 Une bobine de masse m et de rayon R a un axe de rayon r sur lequel est enroulée une ficelle. Cet axe et la ficelle ont une masse négligeable. Le coefficient de frottement statique est μ_s. Quel est l'expression de la tension maximale T que l'on peut exercer sur la ficelle afin que la bobine roule sans glisser.



64 Un rouleau à gazon est un cylindre plein de masse m et de rayon R.
Ce rouleau subit en son centre une force de traction horizontale F et roule sans glisser sur une surface horizontale. On suppose donc que la vitesse du point de contact sur le sol et nulle et qu'il agit momentanément comme un centre de rotation.

Quelle est l'accélération du cylindre ?
Quelle est la force de frottement agissant sur le cylindre ?
Quel est le coefficient minimal de frottement μ_s nécessaire pour empêcher le glissement ?



$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$
\begin{aligned}
\Delta\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t \\
\Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}
\end{aligned}
$$

Mouvement d'un projectile

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$
\begin{aligned}
\Delta \overbrace{\left(\tfrac{1}{2} m\, v^2\right)}^{K} &= \sum \overbrace{\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W} \\
&= \sum \underbrace{\vec{\mathbf{F}_{nc}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} \quad - \quad \Delta\Big(\underbrace{mg\, h}_{U_g} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\, k\, x^2}_{U_r} \Big)
\end{aligned}
$$

Moment d'une force dans le plan

$$
\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}
$$

$$
M = r_x F_y - r_y F_x = F\, r_\perp = F_\perp\, r = F r \sin(\theta)
$$

Ensemble de particules : un corps !

$$
\begin{aligned}
m &= \sum m_i \\
m\, \vec{\mathbf{x}}(t) &= \sum \Big(m_i\, \vec{\mathbf{x}}_i(t) \Big) \\
m\, \vec{\mathbf{v}}(t) &= \sum \Big(m_i\, \vec{\mathbf{v}}_i(t) \Big)
\end{aligned}
$$

Moment d'inertie

$$
I = \sum m_i\, r_i^2
$$

Rayon de giration

$$
m\, k^2 = \sum m_i\, r_i^2
$$

Théorème des axes parallèles

$$
I_h = m\, h^2 + I
$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\, R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\, \dfrac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\, \dfrac{L^2}{12}$