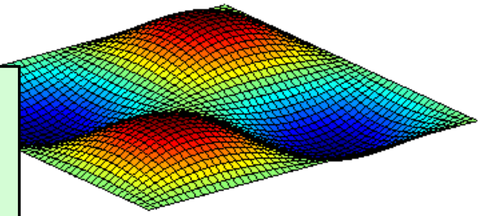
Plan du cours de méthodes numériques



Comment résoudre numériquement un problème aux valeurs initiales ?

Comment interpoler une fonction ?

Comment dériver numériquement une fonction ?

Comment résoudre numériquement un problème aux conditions frontières ?

Comment approximer une fonction ?

Comment intégrer numériquement une fonction ?

Et les équations non-linéaires ?

Et les méthodes itératives ?

Comment résoudre numériquement une équation différentielle ordinaire ?

Comment résoudre numériquement une équation aux dérivées partielles ?

Comment résoudre numériquement une équation aux dérivées partielles ?

Exemple : corde vibrante

Conditions intiales

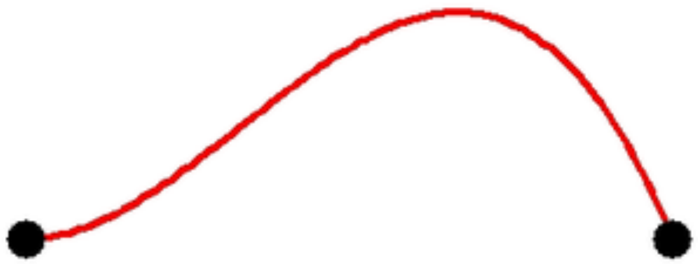
$$u(x,0) = u_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

Tension présente dans la corde [N]

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

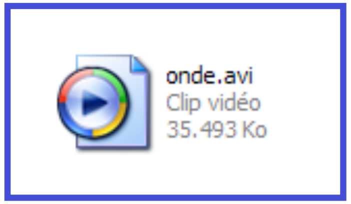
Masse par unité de longueur [kg/m]



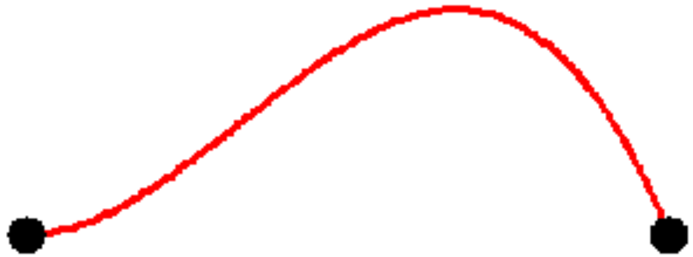
$$u(0,t) \;=\; 0 \qquad\qquad u(L,t) \;=\; 0$$

Conditions aux limites

```
x = linspace(0,1,100);
for i=1:81
  t = (i-1)*L/(c*10);
  u = ondeAnalytic(x,t,L,c,u0);
  plot(x,u,'r','LineWidth',3); hold on;
  plot([0 1],[0 0],'.k','Markersize',50); hold off;
  axis([-0.1 1.1 -0.0002 0.0002]); axis off;
  mov(i) = getframe;
end
movie2avi(mov,'onde','Compression','None')
```



Faire une animation avec Matlab



Solution analytique

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right)$$

Conditions intiales

$$u(x,0) = u_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{x}{L}\right)^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0$$

Conditions aux limites

Comment satisfaire la condition initiale ?

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= u_0\left(\frac{x^2}{L^2}-\frac{x^3}{L^3}\right), \\
\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{C_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) &= u_0\left(\frac{x^2}{L^2}-\frac{x^3}{L^3}\right),
\end{aligned}
$$

En vertu de l'orthogonalité des sinus,

$$
\frac{L}{2}\boxed{C_n} = u_0 \int_0^L \left(\frac{x^2}{L^2}-\frac{x^3}{L^3}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,
$$

Un peu d'algèbre

$$
\begin{aligned}
C_n &= 2u_0 \int_0^1 \left(t^2 - t^3\right) \sin\left(n\pi t\right) dt \\
&= 2u_0 \left[\left(\frac{2-(n\pi)^2 t^2}{(n\pi)^3} - \frac{6t-(n\pi)^2 t^3}{(n\pi)^3}\right) \sin\left(n\pi t\right)\right]_0^1 \\
&= 2u_0 \left(\frac{2-(n\pi)^2-6+(n\pi)^2}{(n\pi)^3}\,(-1)^n - \frac{2}{(n\pi)^3}\right) \; = \; \frac{4u_0}{n^3\pi^3}\left(2(-1)^{n+1}-1\right)
\end{aligned}
$$

```
function [u]= ondeAnalytic(x,t,L,c,u0)

u = zeros(size(x));
for n=1:200;
  u = u + sin(n * pi * x/L) .* ...
          cos(n * pi * c *t / L) .* ...
         (2 * (-1)^(n+1) -1)/(n^3);
end
u = u * 4 * u0 /(pi^3);
```

10, 50, 200 ou 1000 termes…
Comment choisir ?

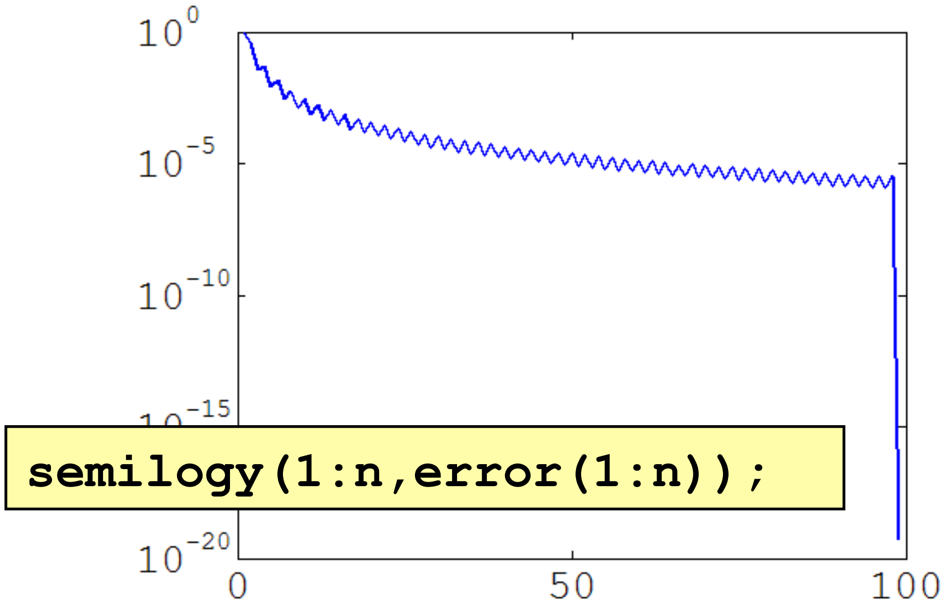
10, 20, 50 ou 100 termes…
Comment choisir ?

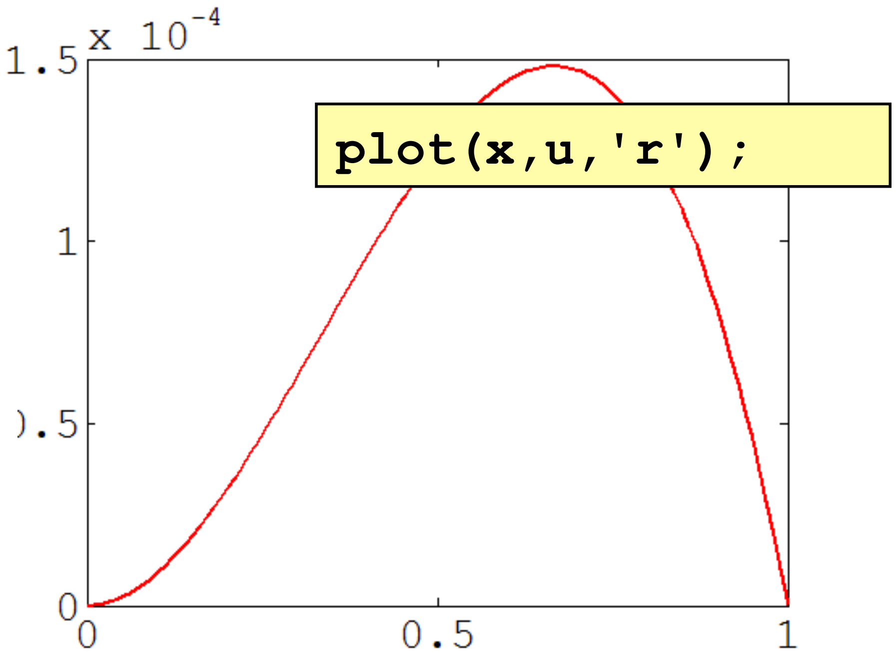
```
function [u error n]= ondeAnalytic(x,t,L,c,u0)

tol = 10e-9; nmax = 2000; n = 1;
u = zeros(size(x));
error = zeros(nmax,1); delta = 2 * tol;
while (max(abs(delta)) > tol && n <= nmax);
    delta = sin(n * pi * x/L) .* ...
            cos(n * pi * c *t / L) .* ...
            (2 * (-1)^(n+1) -1)/(n^3);
    u = u + delta;
    error(n) = max(abs(delta));
    n = n+1;
end
u = u * 4 * u0 /(pi^3);
if (n >= nmax) fprintf(' error, yek, yek -(\n'); end
```

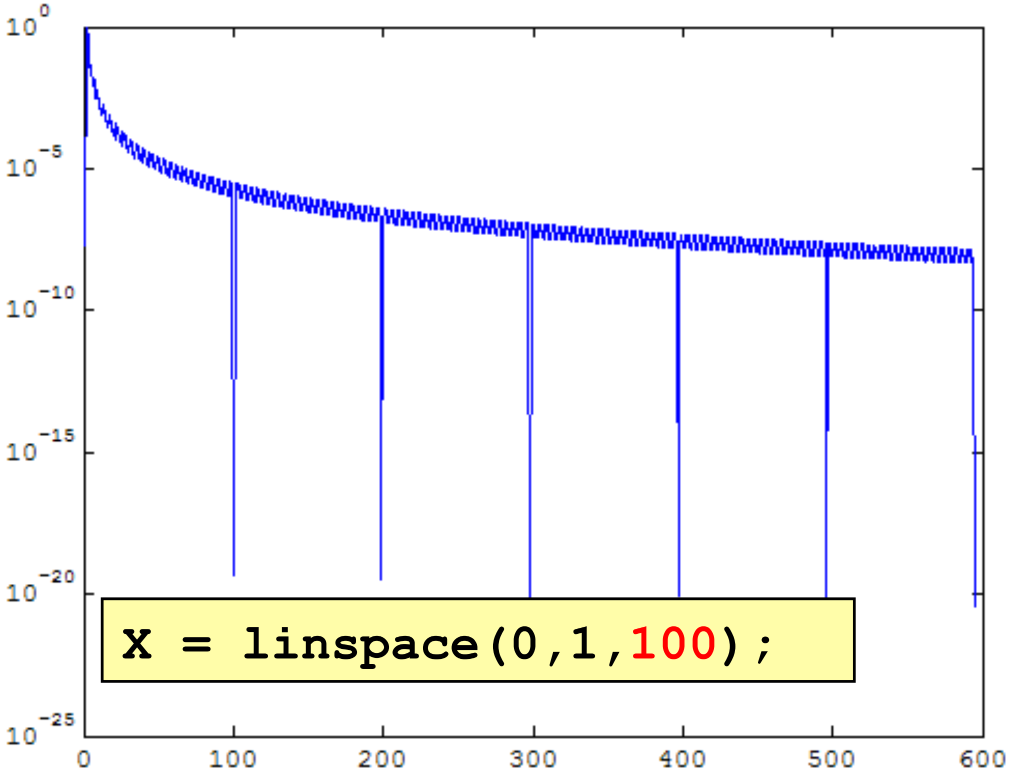
Et boum !

```
>> x = linspace(0,1,100);
>> [u error n] = ondeAnalytic(x,0,L,c,u0);
>> n
 n = 100
```

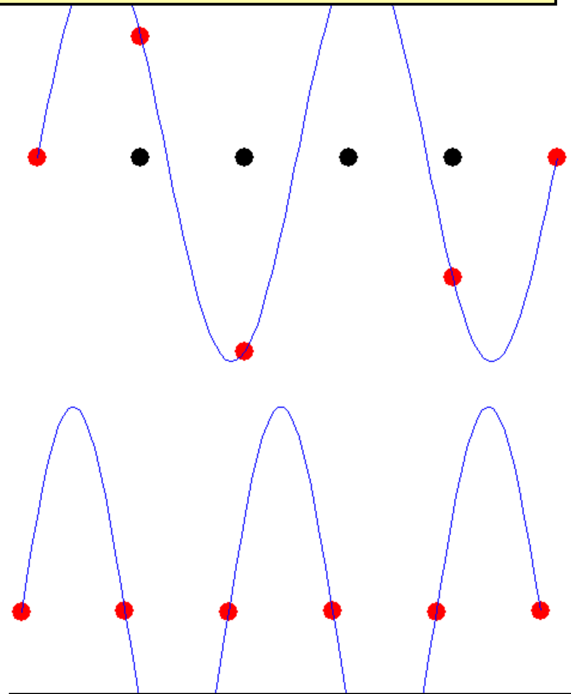




Termes de la série




```
X = linspace(0,1,6);
U = sin(4 *pi * X);
```



```
X = linspace(0,1,6);
U = sin(5 *pi * X);
```

$$u(x,t) \;=\; \frac{4u_0}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\Big(2(-1)^{n+1}-1\Big)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

Différences finies spatiales

Equation
aux dérivées partielles
du second ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d^2 U_i}{dt^2} = c^2 \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\boxed{U_i(t) = u^h(X_i, t) \approx u(X_i, t) \qquad i = 1, \ldots, m}$$

Système de m équations
différentielles ordinaires
du second ordre

Deux options possibles pour la discrétisation temporelle

$$\frac{d^2U_i}{dt^2} = c^2\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Système de m équations différentielles ordinaires du second ordre

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dU_i}{dt} &= V_i \\ \frac{dV_i}{dt} &= c^2\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x)^2} \end{aligned}\right.$$

Système de 2m équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$
\boxed{\left\{
\begin{array}{rcl}
\dfrac{dU_i}{dt} & = & V_i \\[2ex]
\dfrac{dV_i}{dt} & = & c^2 \dfrac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x)^2}
\end{array}
\right.}
$$

2m équadiffs !

$$
\boxed{\frac{dY_i}{dt} = \sum_{j=1}^{2m} A_{ij} Y_j}
$$

$$
Y_i = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}, \qquad
A_{ij} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & 1 \\
\hline
0 & & & & & & & & & \\
a & -2a & a & & & & & & & \\
 & a & -2a & a & & & & & & \\
 & & a & -2a & a & & & & & \\
 & & & & 0 & & & & &
\end{array}\right]
\qquad a = \frac{c^2}{(\Delta x)^2}
$$

Comment construire cette matrice ?

$$A_{ij} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \\ \hline 0 & & & & & & & & & \\ a & -2a & a & & & & & & & \\ & a & -2a & a & & & & & & \\ & & a & -2a & a & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & \end{array}\right]$$

$$a = \frac{c^2}{(\Delta x)^2}$$

```
m = 5; dx = L/(m-1);
e = [0 ones(1,m-2)*(c^2)/(dx^2) 0]';
D = spdiags([e -2*e e], -1:1, m, m)';
```

Equations différentielles ordinaires .... ode45 :-)

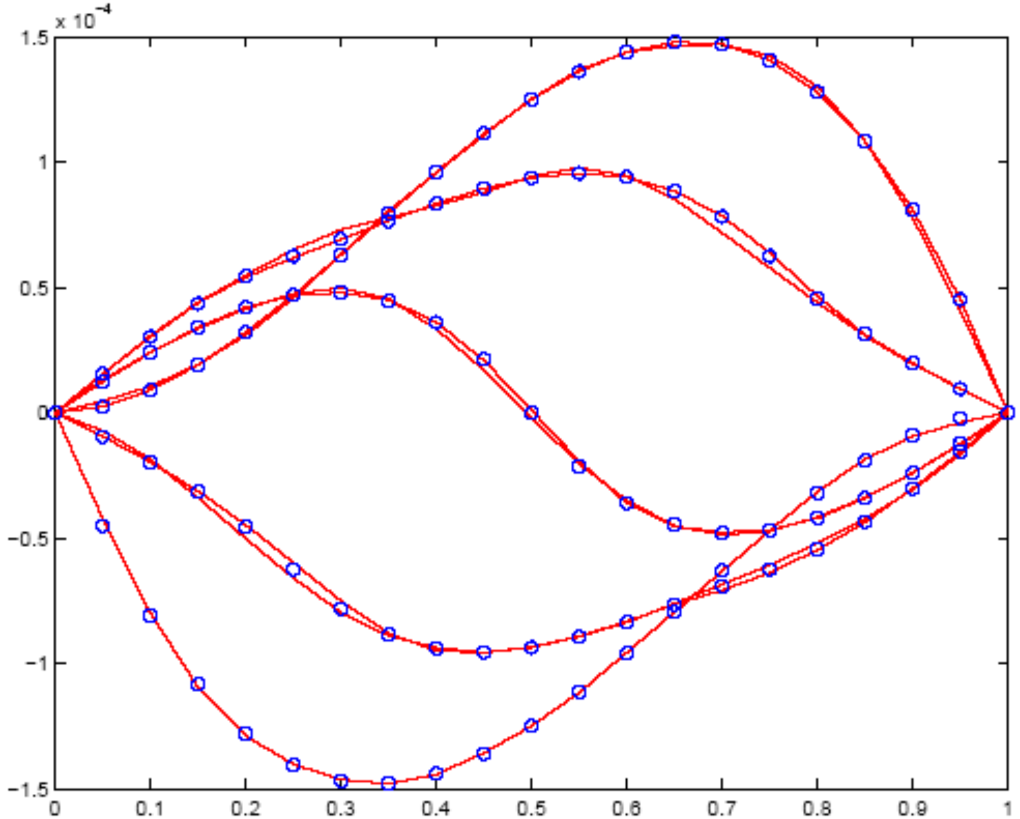
$$\boxed{\frac{dY_i}{dt} = \sum_{j=1}^{2m} A_{ij} Y_j}$$

```
x = linspace(0,L,m);
y0 = zeros(1,2*m);
y0(1:m) = (u0*(x/L).^2.*(1-x/L))';
[t,y]=ode45(@dfdt,[0 Lt],y0);
```

```
function f=dfdt(t,y);
global D c; m = length(y)/2;
            u = y(1:m);         v = y(m+1:2*m);
            dudt = v;           dvdt = D * u;
f=[dudt;dvdt]; end
```

Résultats par ode45 :-)

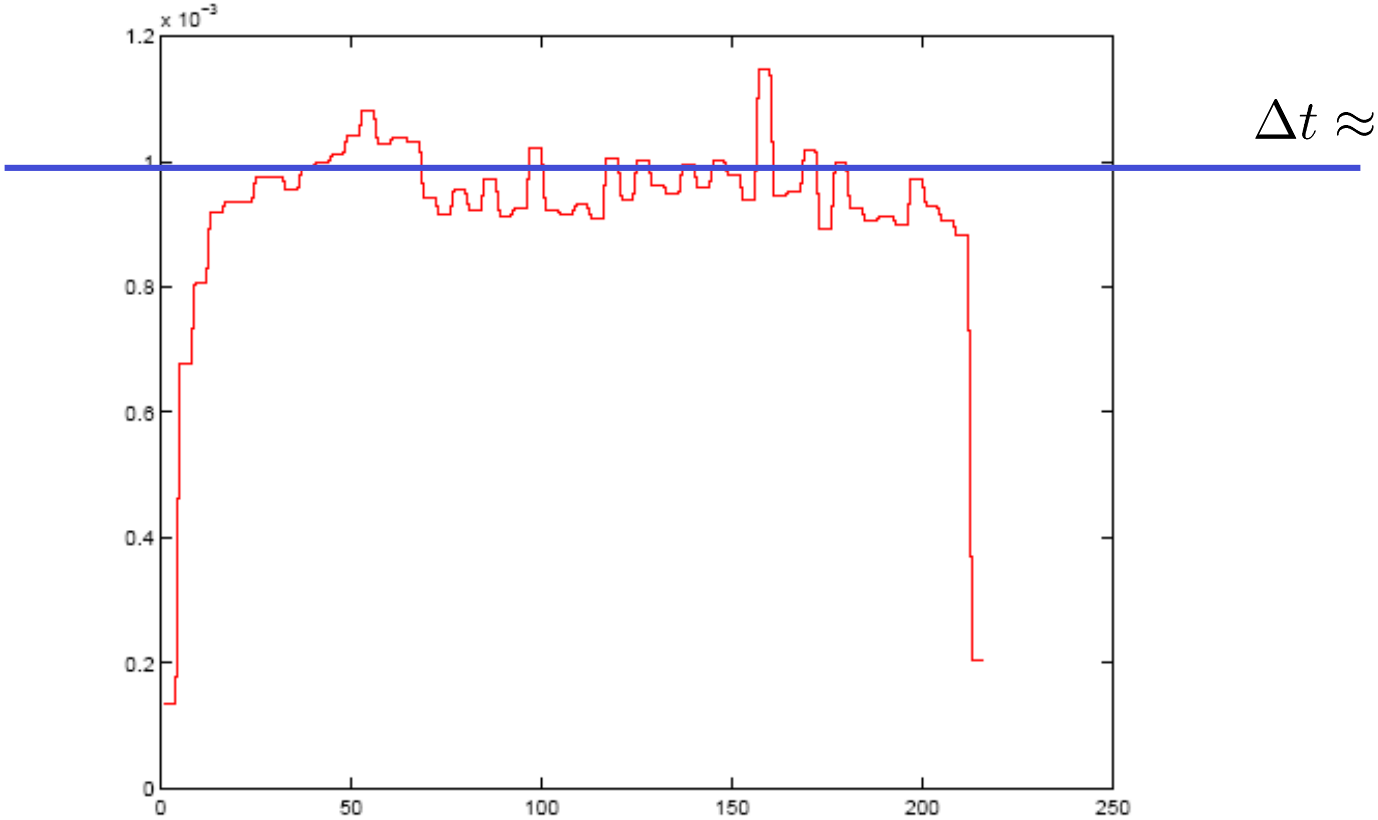
Ode45 : 21 valeurs nodales (m=20)



Solution analytique

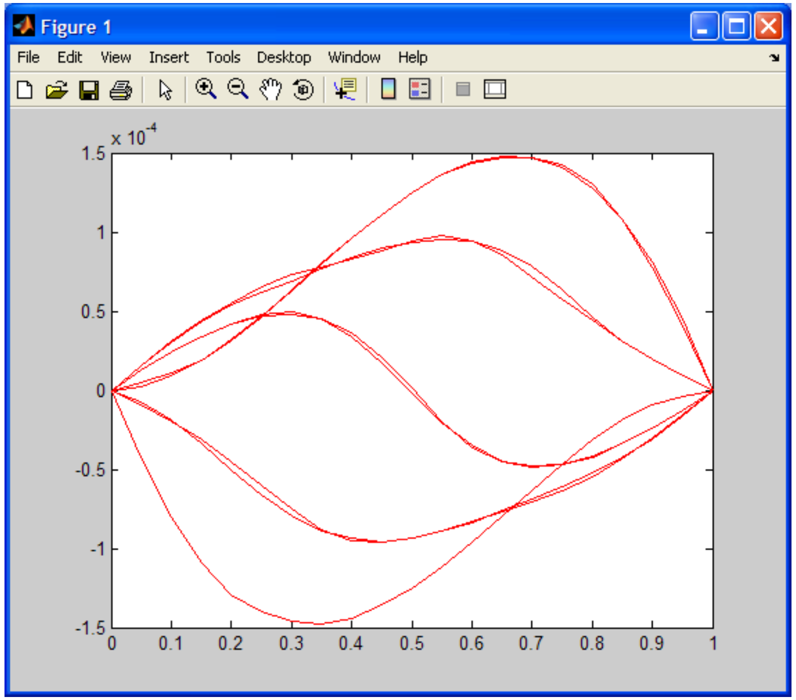
Résultat sur <u>une</u> période

Evolution du pas de temps



$\Delta t \approx 10^{-3}$

Comment obtenir une courbe à un instant précis ?



La courbe à un instant fixé est obtenue par une interpolation linéaire entre les courbes des deux pas de temps les plus proches…

```
[t,y]=ode45(@dfdt,[0 Lt],y0);
yplot = interp1(t,y,linspace(0,Lt,8*nP+1));
plot(x,yplot(:,1:m),'r-');
```

Les neufs courbes sont dessinées en une seule instruction…

Energie cinétique

$$E_c(t) = \frac{\rho}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 \, dx$$

$$E_p(t) = \frac{T_0}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 \, dx$$

Energie potentielle

Un peu de physique

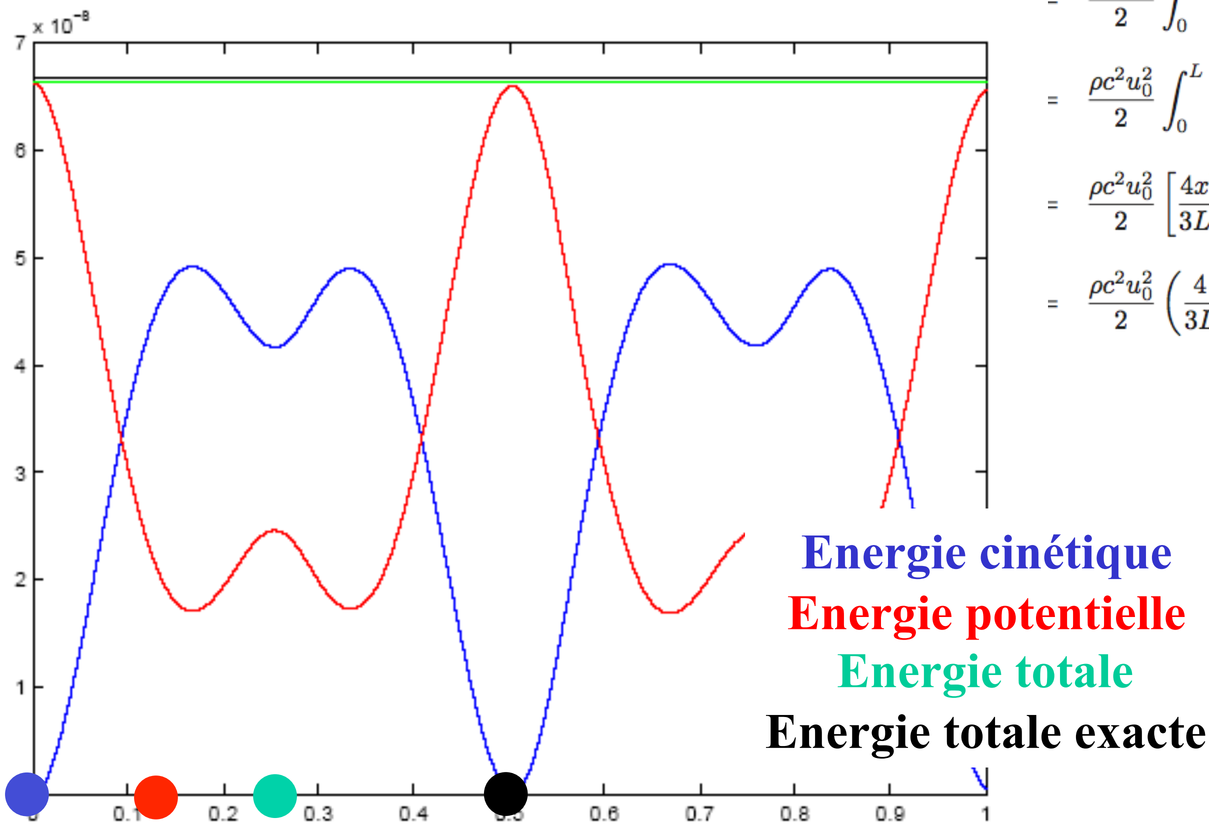
L'énergie totale est conservée…

$$\overbrace{E_c(t) + E_p(t)}^{E} = \frac{\rho}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \, dx + \frac{\rho c^2}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \, dx$$

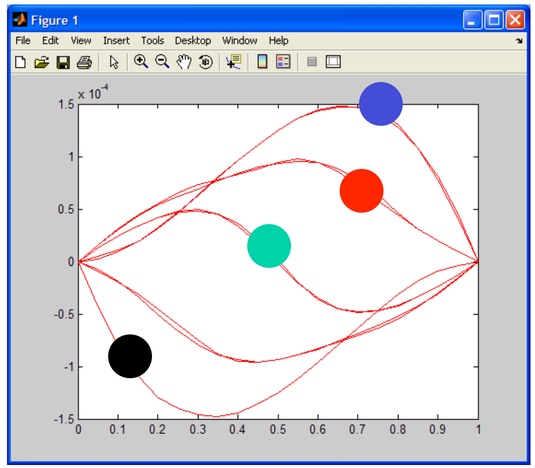
$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \rho \int_0^L \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t} + c^2 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) \, dx \\
&= \rho \int_0^L \left(c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t} + c^2 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) \, dx \\
&= \rho c^2 \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right) \, dx \; = \; \rho c^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_0^L
\end{aligned}$$

Numériquement…

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{\rho c^2}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) \right)^2 dx \\
&= \frac{\rho c^2 u_0^2}{2} \int_0^L \left(\frac{2x}{L^2} - \frac{3x^2}{L^3} \right)^2 dx \\
&= \frac{\rho c^2 u_0^2}{2} \int_0^L \left(\frac{4x^2}{L^4} - \frac{12x^3}{L^5} + \frac{9x^4}{L^6} \right) dx \\
&= \frac{\rho c^2 u_0^2}{2} \left[\frac{4x^3}{3L^4} - \frac{12x^4}{4L^5} + \frac{9x^5}{5L^6} \right]_0^L \\
&= \frac{\rho c^2 u_0^2}{2} \left(\frac{4}{3L} - \frac{3}{L} + \frac{9}{5L} \right) = \frac{\rho c^2 u_0^2}{2L} \left(\frac{20 - 45 + 27}{15} \right) = \frac{\rho c^2 u_0^2}{15L}
\end{aligned}
$$



Résultat sur <u>une</u> période



Deux options possibles pour la discrétisation temporelle

$$\frac{d^2U_i}{dt^2} = c^2 \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Système de m équations différentielles ordinaires du second ordre

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dU_i}{dt} &= V_i \\ \frac{dV_i}{dt} &= c^2 \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \right.$$

Système de 2m équations différentielles ordinaires du premier ordre

Différences finies centrées…

Système de m équations différentielles ordinaires du second ordre

$$\frac{d^2U_i}{dt^2} = c^2\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{U_i^{n+1} - 2U_i^n + U_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} = c^2\frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

Système de m équations aux récurrences à deux termes

$$\frac{U_i^{n+1} - 2U_i^n + U_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$\downarrow$$

$$U_i^{n+1} = 2U_i^n + \boxed{\beta^2}\left(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n\right) - U_i^{n-1}$$

$$\boxed{\beta = \frac{c\Delta t}{\Delta x}}$$

Implémentation

```
X = linspace(0,L,m);
Uo = (u0*(X/L).^2.*(1-X/L))';
U = (2*Uo + (c*dt)^2*D * Uo)/2.0;
for n=1:nmax
  Uoo = Uo;
  Uo = U;
  U = 2*Uo + ((c*dt)^2*D*Uo) - Uoo;
end
```

Conditions intiales

$$u(x,0) = u_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

Analyse de stabilité

Amplitude quelconque de la pertubation

Nombre imaginaire

$$U_i^n = \boxed{U^n} e^{ikX_i}$$

k quelconque

Indice spatial

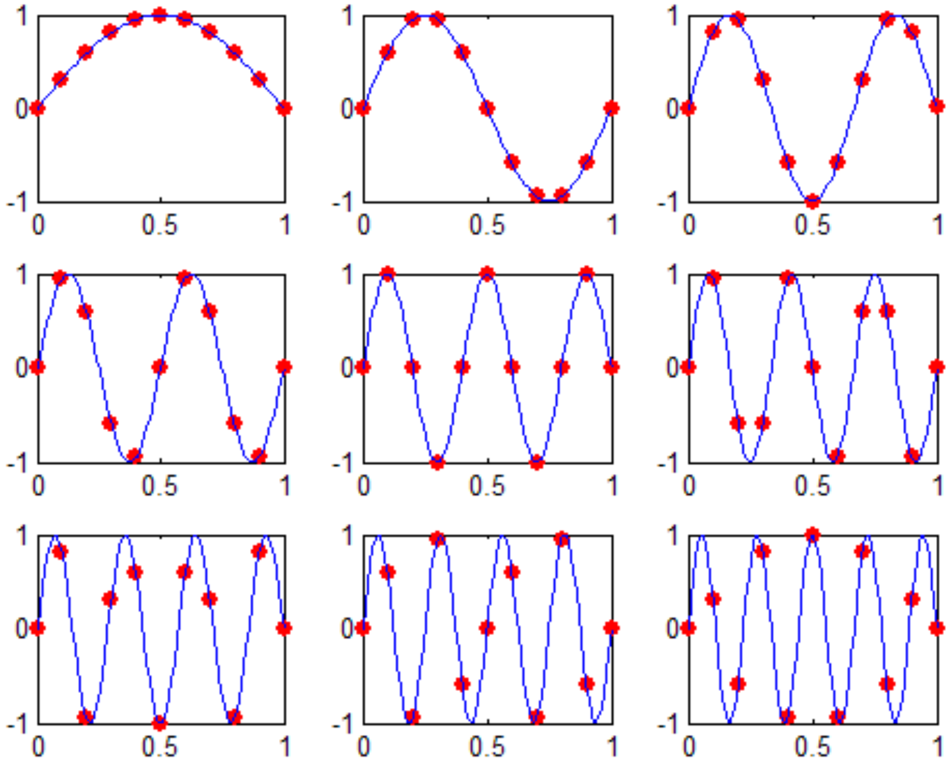
Considérons une perturbation quelconque de la forme suivante
et analysons son évolution….
On souhaite que son amplitude diminue.

Quelques k bien choisis…

m = 11

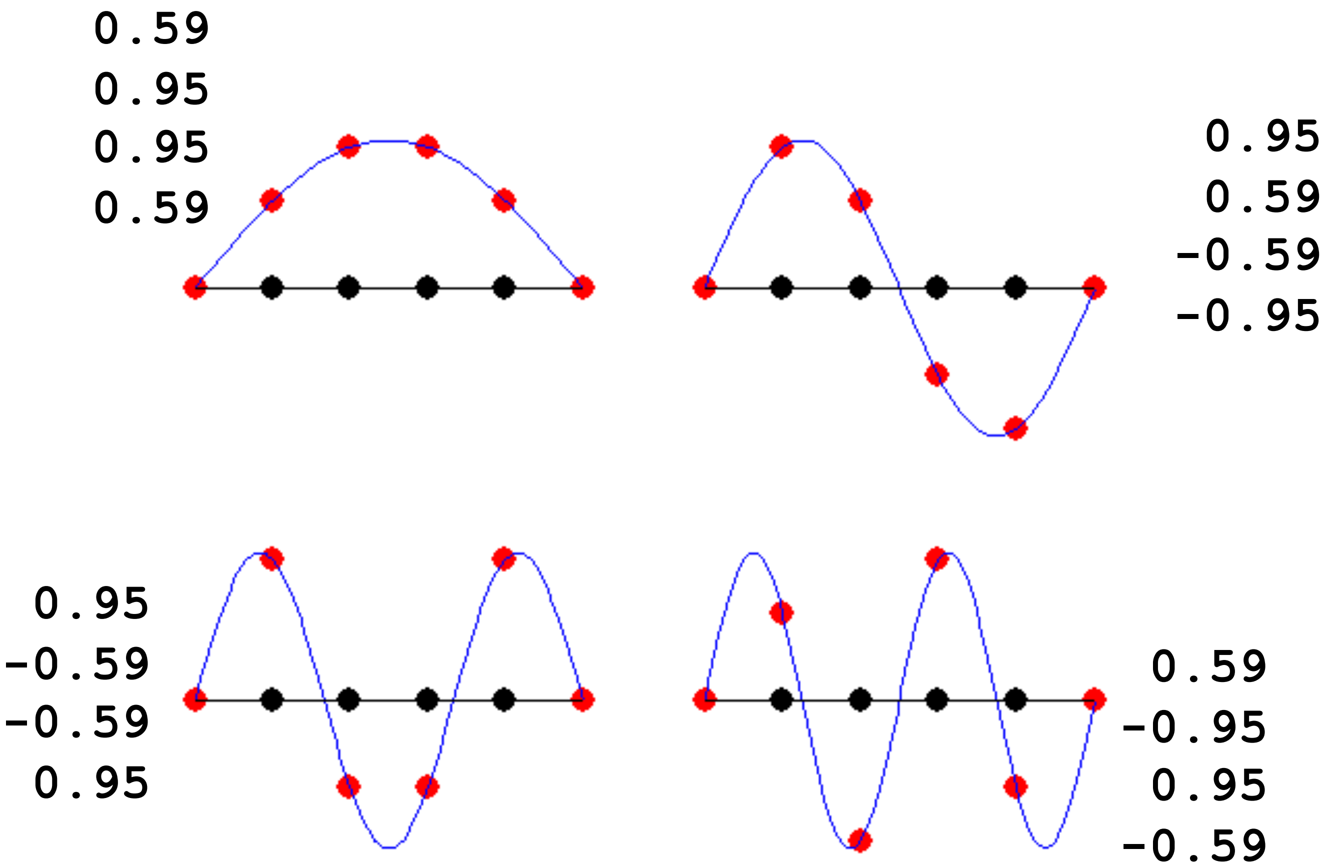
$$U_i^n = U^n \sin(\frac{\hat{k}\pi X_i}{L})$$

$$\Delta x = 0.1$$

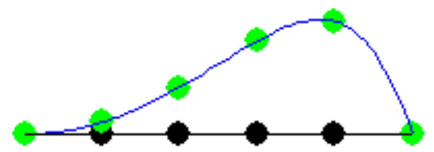


Un espace discret de dimension 4

```
X = linspace(0,1,6)
for n=1:4
  U = sin(n *pi * X);
  U(2:5)
end
```



Soit un vecteur tout à fait quelconque de valeurs nodales …



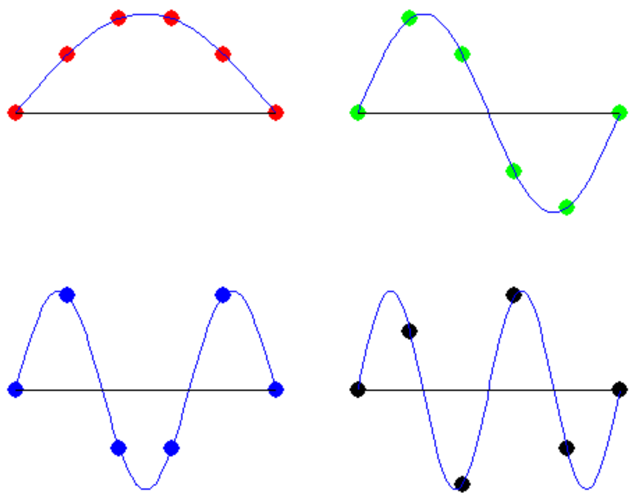
```
x = linspace(0,1,100); u = 2*x.^2.*(1-x.^4);
X = linspace(0,1,6);   U = 2*X.^2.*(1-X.^4);

plot(X,zeros(size(X)),'.k',...
     X,U,'.g',...
     x,u,'-b',...
     [0 1],[0 0],'-k','Markersize',30);
```

N'importe quel vecteur est une combili de sin(nπ)

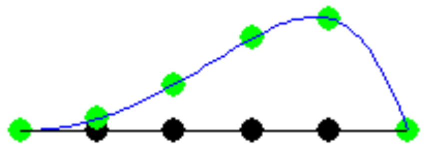
```
A = sin(X(2:5)'*[1:4]* pi)
U = 2* X.^2.*(1- X.^4);
alpha = A \ U(2:5)'
```

```
A' =     0.5878    0.9511    0.9511    0.5878
         0.9511    0.5878   -0.5878   -0.9511
         0.9511   -0.5878   -0.5878    0.9511
         0.5878   -0.9511    0.9511   -0.5878
```

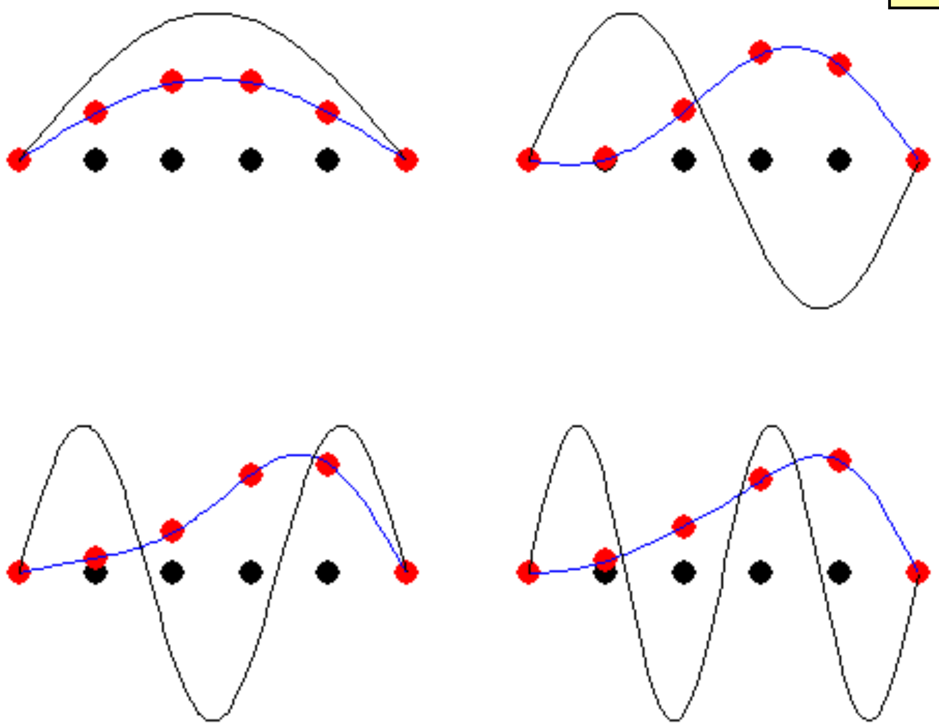


```
alpha =   0.5535
         -0.3311
          0.0972
         -0.0391
```

Et je peux trouver…



```
uh = zeros(100,1)';
for i=1:4
 phi = sin(i*pi*x);
 uh = uh + alpha(i)*phi;
 plot(x,uh,'-b',x,phi,'-k);
end
```



```
alpha =   0.5535
         -0.3311
          0.0972
         -0.0391
```

… cette combili de sin(nπ)

Propagation des erreurs

$$\begin{aligned}
U_i^{n+1} &= 2U_i^n + \beta^2\Big(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n\Big) - U_i^{n-1} \\
&= U_i^n\Big(2 + \beta^2\Big(e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x}\Big)\Big) - U_i^{n-1} \\
&= U_i^n\Big(2 + \beta^2\Big(2\cos(k\Delta x) - 2\Big)\Big) - U_i^{n-1} \\
&= U_i^n\Big(2 - 4\beta^2\sin^2\left(\tfrac{k\Delta x}{2}\right)\Big) - U_i^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{U_i^n = U^n e^{ikX_i}}$$

Commentaire :
L'analyse de stabilité est ce qu'il y a de plus joli dans le cours FSAB1104 !

Méthodes à pas liés : l'analyse de stabilité nécessite la résolution d'un polynôme…

$$U_i^{n+1} = U_i^n \left(2 - 4\beta^2 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right) - U_i^{n-1}$$

$$U^2\ U_i^{n-1} = U\ U_i^{n-1} \left(2 - 4\beta^2 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right) - U_i^{n-1}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{U^2 = 2U\ \underbrace{\left(1 - 2\beta^2 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right)}_{a} - 1}$$

Un peu d'algèbre …

$$\begin{aligned} U^2 - 2aU + 1 &= 0 \\ U &= a \pm \sqrt{a^2 - 1} \end{aligned}$$

$a^2 = 1$	**: une racine réelle unique et unitaire**
$a^2 < 1$	**: deux racines complexes conjuguées de module unitaire**
$a^2 > 1$	**: deux racines réelles distinctes (une supérieure à un, une inférieure à un)**

Condition de stabilité $\boxed{a^2 \leq 1}$

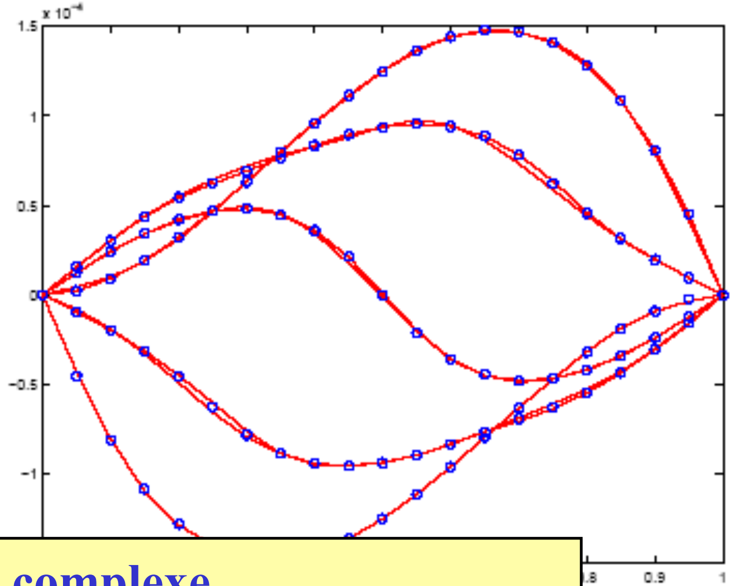
$$
\begin{aligned}
\left(1 - 2\beta^2 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right)^2 &\leq 1 \\
1 - 4\beta^2 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) + 4\beta^4 \sin^4\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) &\leq 1 \\
-1 + \beta^2 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) &\leq 0
\end{aligned}
$$

… et un peu de calcul

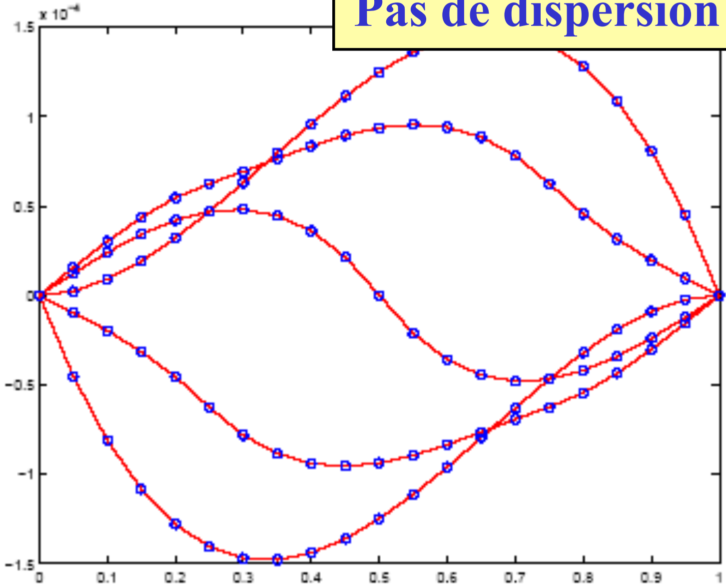
$$
\boxed{\beta = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1}
$$

Condition de stabilité
pour une équation d'onde….

$\beta = 0.5$



U=1 réel
Pas de dissipation
Pas de dispersion

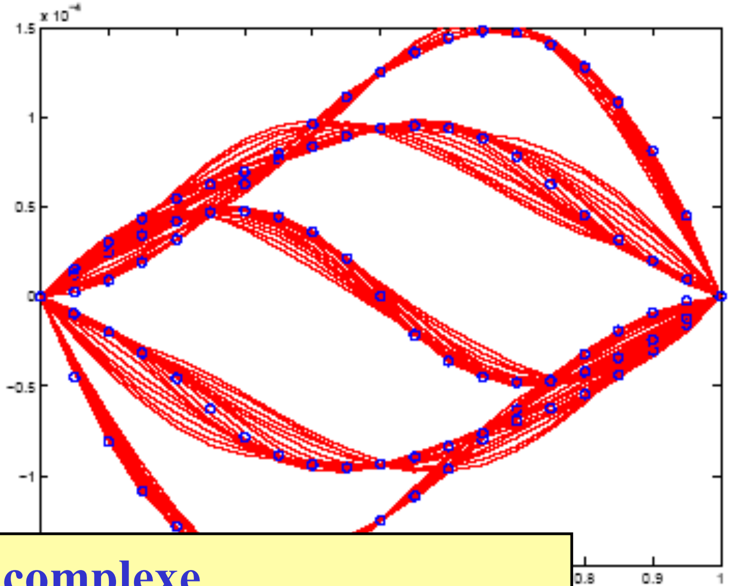


U complexe
Pas de dissipation
Mais présence de dispersion

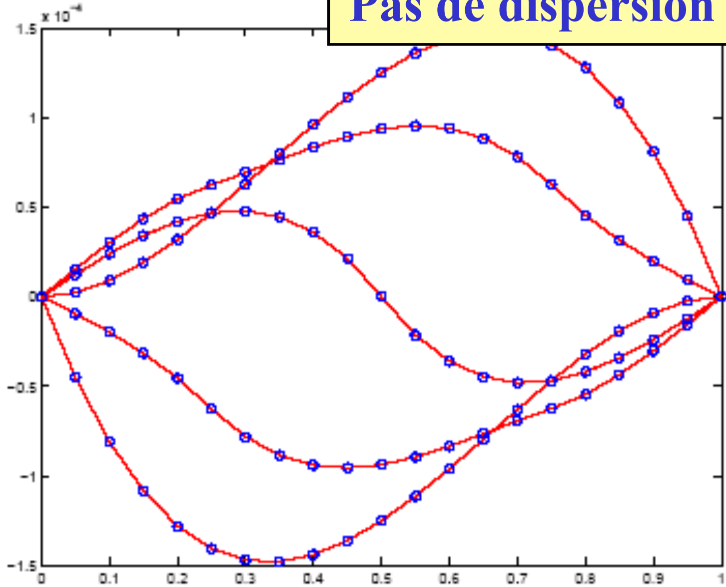
$\beta = 1.0$

Résultat sur <u>une</u> période

$\beta = 0.5$



U complexe
Pas de dissipation
Mais présence de dispersion

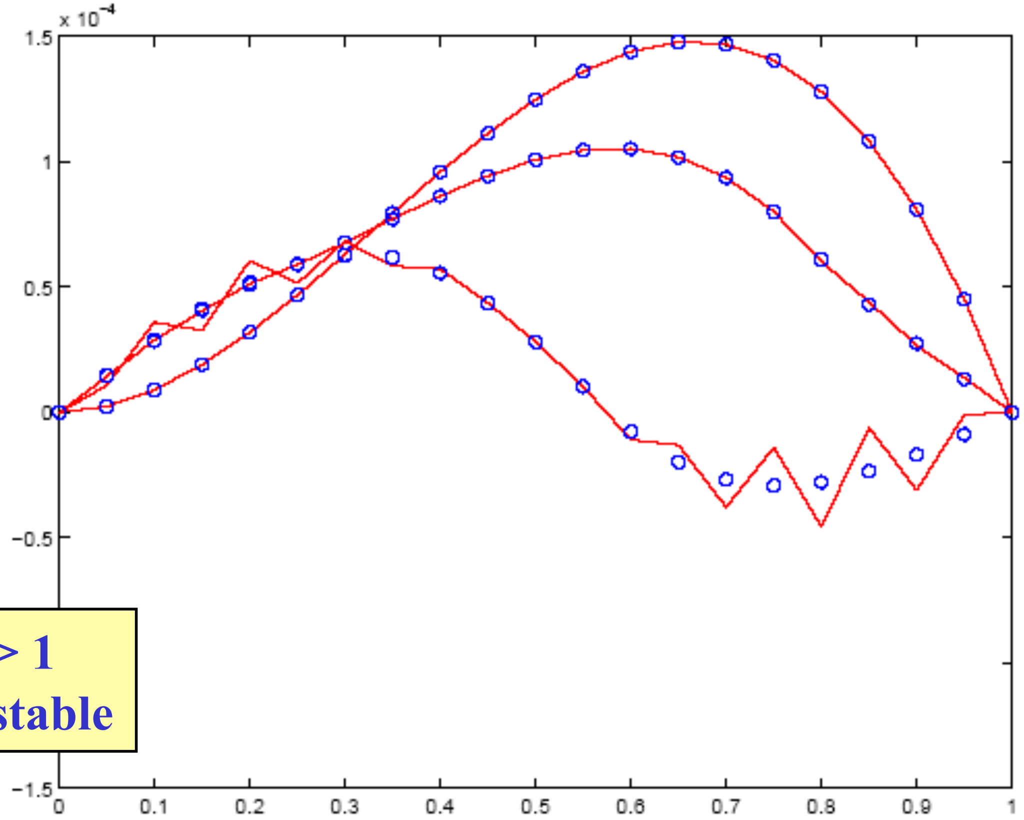


U=1 réel
Pas de dissipation
Pas de dispersion

$\beta = 1.0$

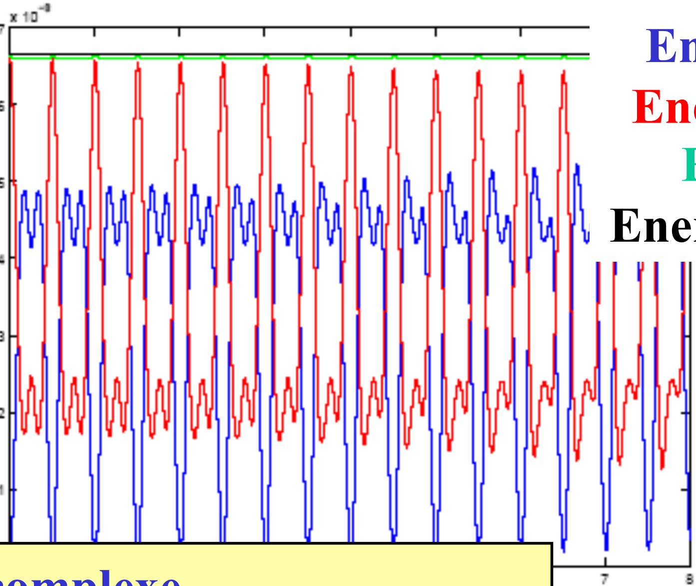
Résultat sur huit périodes

$\beta = 1.1$



U > 1
Instable

$\beta = 0.5$

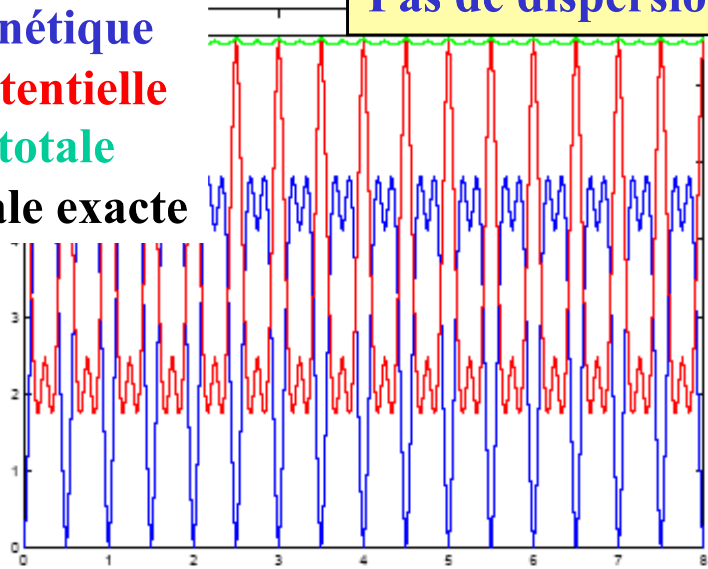


Energie cinétique

Energie potentielle

Energie totale

Energie totale exacte

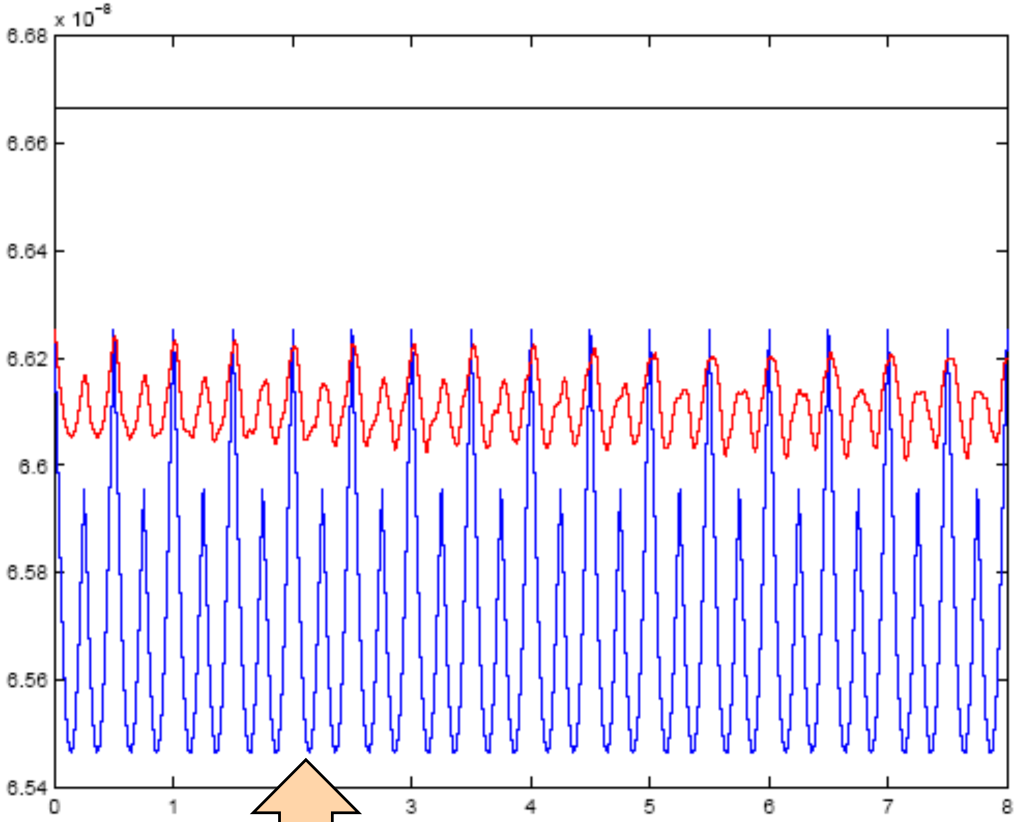


U=1 réel
Pas de dissipation
Pas de dispersion

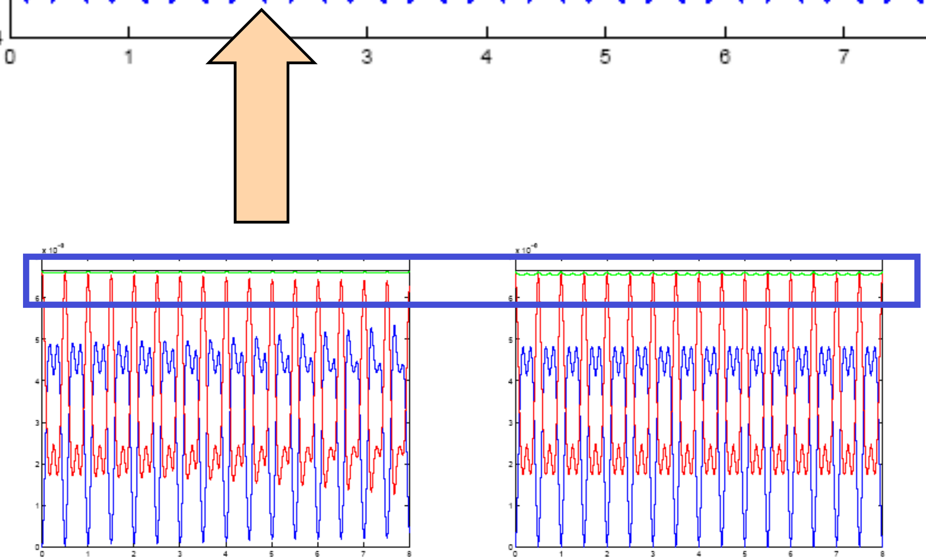
U complexe
Pas de dissipation
Mais présence de dispersion

$\beta = 1.0$

Résultat sur <u>huit</u> périodes

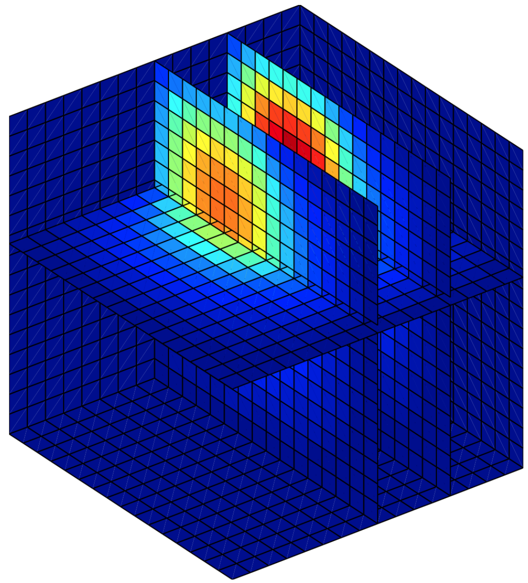


Energie totale β = 1.0
Energie totale β = 0.5
Energie totale exacte



Effectuons un zoom…

Les méthodes numériques c’est presque fini en 11-12….



Grand Prix International des Tuteurs 2012

C’est presque fini !
Remise du dernier problème : le lundi 26 décembre à 23h59 !
Il est toutefois possible de le faire ce soir et de le montrer au tuteur vendredi !

Un tout grand merci à tous ceux qui ont trouvé les dernières coquilles de notes de cours

Errata 11-12

Tous les erratas soumis du syllabus !
Tous les erratas soumis pour les énoncés des exercices !
Tous les erratas soumis pour les solutions des exercices !
Tous les erratas soumis pour les transparents des cours magistraux !
Tous les erratas soumis pour les problèmes MATLAB !

Ci-dessous, vous trouverez uniquement les erreurs et améliorations réelles et validées
(autres que les corrections mineures de style, de ponctuation et d'orthographe).
Oui : racine s'écrit sans cédille et perturbation a plein de 'r' qui me perturbent : honte sur moi. Par contre, la fonction qu'on intègre, c'est bien un intégrand (et pas un intégrant) et a priori s'écrit sans accent car c'est une citation latine. Dans les listing des codes source MATLAB, il n'y a parfois pas d'accents dans les commentaires pour des raisons historiques de portabilité dans l'encodage des fichiers : il est inutile de mentionner ce type d'erreur :-(

Autre : cours 2008

Solution de l'interrogation 2008 (point 6)

-1/16 +9(1-**1/2**+1/16)=Beta (16-1)/16. => Beta=16/3

VL : vachement bien vu :-)

(Gauthier Limpens, 05/11/2011)

Autre : cours 2010

Solution de l'interrogation 2010 (point 1)

En outre, la fonction B_02(t) est définie sur l'intervalle [T0, T**3**] : (ce qui n'est pas l'intervalle [0 **3**])

(Xavier Rixhon, 07/11/2011)

exercices : solutions : page 19 ex 27

Sur l'intervalle [0,3], on doit d'abord écrire

x_B(t))=sum_(i=0)^4X_iB_i^2(t)=B_1^2(t)**+B_4^2(t)**

Pour développer cette expression sur l'intervalle $[0,1[$, il faut uniquement
évaluer les deux fonctions B-splines : $B_1^2(t)$ et $B_2^2(t)$, **car la fonction $B_4^2(t)$ s'annule sur l'intervalle $[0,1[$, comme on le voit clairement sur la représentation des fonctions de base.**

VL : c'est vrai que mon explication était un peu elliptique :-)
(Gauthier Limpens, 04/11/2011)

Vous pouvez continuer à m'envoyer vos remarques-suggestions jusqu'au 13 janvier.
J'essaieré de fère moin de fotes d'aurtograf l'anée prauchéne !
Les bonus ainsi acquis resteront perpétuellement valables :-)

Et l’examen, Monsieur :-)

Question MATLAB
Un programme de 10 lignes à écrire
Les programmes des transparents sont supposés compris
Les 8 problèmes MATLAB sont supposés compris

Question « application de l’acquis »
Exercice simple fortement inspiré des exercices simples des notes

Question « compréhension »
Exercice plus subtil dû à la créativité de l’enseignant

Pas de calculatrice,
Formulaire manuscrit recto-verso,
Les travaux MATLAB interviendront pour 10% de la note de l’examen.