

Séance 6

Imperméabilité, fonction de courant et traceurs

18

Imperméabilité

On considère l'écoulement plan dont la vitesse est:

$$\mathbf{u}(x, y) = U\mathbf{e}_x + \frac{UR^2}{(x^2 + y^2)^2} [(y^2 - x^2)\mathbf{e}_x - 2xy\mathbf{e}_y]$$

où U est une échelle de vitesse. Montrer que le cercle de rayon R dont le centre est situé au point $(x, y) = (0, 0)$ est imperméable.

19

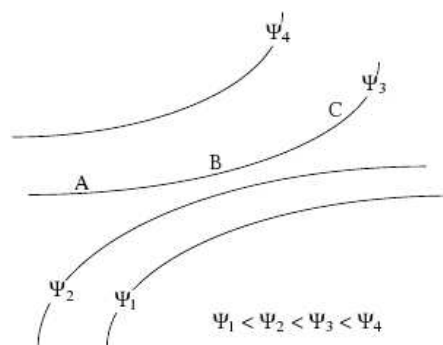
Fonction courant

Montrer que la fonction de courant est constante sur la frontière d'un obstacle imperméable.

20

Fonction courant

La figure ci-dessous illustre quelques iso-lignes de la fonction de courant associée à un écoulement plan à divergence nulle. Esquisser le vecteur vitesse aux points identifiés par les lettres A, B et C.



21

Fonction courant

On considère l'écoulement décrit par la fonction de courant suivante:

$$\psi(x, y) = \frac{y - h^-(x)}{h^+(x) - h^-(x)} \Omega,$$

où Ω est une constante positive; les fonctions $h^+(x)$ et $h^-(x)$ satisfont l'inégalité $h^-(x) < h^+(x)$ pour tout x . Montrer que les courbes $y - h^+(x) = 0$ et $y - h^-(x) = 0$ sont imperméables. Calculer la trajectoire de la particule fluide, qui est située à l'instant $t = 0$ au point de coordonnées $(x, y) = \{x_0, [h^-(x_0) + h^+(x_0)]/2\}$.

22**Fonction courant**

Montrer que le débit volumique traversant toute courbe joignant deux points d'un écoulement plan est égale à la différence entre les valeurs de la fonction de courant aux points concernés. Expliquer pourquoi le débit ainsi calculé s'exprime en $m^2 s^{-1}$ et non en $m^3 s^{-1}$.

23**Traceur**

Une source de débit q injecte un traceur radioactif dans un fluide qui s'écoule dans un domaine V limité par des frontières imperméables. Le débit massique de la source est constant et vaut Q . Le temps caractéristique de décomposition du radio-élément est τ . Montrer que, à mesure que le temps passe, la masse du traceur contenue dans le domaine d'intérêt tend vers la constante $Q\tau$. Pour ce faire, on peut utiliser l'équation régissant la concentration c du traceur radioactif

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} = \rho q - \frac{\rho c}{\tau} - \nabla \cdot (\mathbf{u}\rho c - K\rho\nabla c),$$

sous la contrainte

$$Q = \int_V (\rho q) dV,$$

où ρ , t , \mathbf{u} et K représentent la masse volumique du fluide, le temps, la vitesse du fluide et la diffusivité du traceur radioactif considéré.

24**Traceur**

Soit un écoulement unidimensionnel dans lequel la concentration $C(t, x)$ d'un traceur passif obéit à l'équation d'advection-diffusion

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = q(t)\delta(x - 0) + K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2},$$

où U est la vitesse du fluide; $K(> 0)$ est la diffusivité constante du traceur; $q(t)$ est le taux de rejet d'une source de traceur située au point $x = 0$, δ désignant la fonction de Dirac. Le domaine d'intérêt est dépourvu de frontière: $-\infty < x < +\infty$. Si la concentration du traceur est nulle à l'instant initial et si $q(t) = \delta(t - 0)$, montrer que la concentration vaut

$$C(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Kt}} \exp\left(-\frac{(x - Ut)^2}{4Kt}\right).$$

Montrer que la solution pour une source quelconque s'écrit

$$C(t, x) = \int_0^t \frac{q(t - \theta)}{\sqrt{4\pi K\theta}} \exp\left(-\frac{(x - U\theta)^2}{4K\theta}\right) d\theta.$$

Que deviennent les résultats ci-dessus si la source est située au point $x = x_0$ au lieu de $x = 0$? On pourrait devoir utiliser l'intégrale de Poisson, c'est-à-dire

$$\int e^{-a\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{4a}} \quad (a > 0).$$