PHY1352 : Physique des fluides
Compilation de solutions **non corrigées**
de problèmes susceptibles d'être posés à l'examen

Par les étudiants

December 17, 2009

1

2 Pour résoudre ce problème, il suffit de se rappeler de la formule de la puissance et d'ensuite faire une analyse dimensionnelle.

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{F}\overrightarrow{v} \tag{1}$$

Regardons maintenant les dimensions de la puissance:

$$[\overrightarrow{P}] = [W] = [Nms^{-1}] = [kgm^2s^{-3}] \tag{2}$$

Via l'énoncé, on sait que k est sans dimension, ρ, S et V s'exprime respectivement en $[kgm^3]$, $[m^2]$ et $[ms^{-1}]$. On voit directement que:

$$a = 1 \tag{3}$$

$$b = 1 \tag{4}$$

$$c = 3 \tag{5}$$

En remplaçant cela dans l'équation qui nous est donnée au départ, on obtient:

$$\overrightarrow{P} = k\rho V^3 S \tag{6}$$

Vu que la puissance est directement proportionelle à la surface des ailes, si la surface des ailes du modèle réduit est α fois plus petite, la puissance délivrée par le modèle réduit sera α fois plus faible que l'éolienne de taille réelle. Il est possible de jouer de la même manière avec la vitesse du vent mais dans ce cas, il faudra tenir compte de la puissance 3 qui entre en jeu.

3 Sachant que la température d'un solide (volume V) passe de température T=T_0 à T=T_0+$\triangle\Theta$ en un temps t donné dans un liquide dont la température est constante T_c tell que T_c¿T_0 et que la conductivité thermique λ en $(m^2.s^{-1})$ est connu. On demande quelle est le temps pour que la temperature d'un autre solide de la même forme et température initiale T_0 mais du volume V' et de la conductivité λ' augmente de $\triangle\Theta$.

Ce qu'est important c'est que les deux solides ont la même forme, donc même si ils ont une taille différente, nous pouvons écrire l'équation de la chaleur et les conditions auxiliaires en forme adimensionnelle. Si les nombres adimensionnels caractérisant les deux problèmes sont identiques,alors connaître la solution d'un problème permettra de connaître celle de l'autre. Donc nous pouvons écrire l'équation suivant:

$$\frac{\lambda t}{L^2} = \frac{\lambda' t'}{L'^2}$$

Où L et L' représentent la racine cubique des volumes.

Donc, il sufit de éliminer l'inconnue t' dans l'équation pour avoir la réponse final:

$$t' = \frac{\lambda t L'^2}{L^2 \lambda'}$$

4 On a que $df/ds = lim_{h->0}(f(s+h) - f(s)/h)$, ce qui implique que [df/ds]=[f]/[s]. Le meme resonnement sur df/ds donne que $[d^2f/ds^2] = [f]/[s]^2$.$[d^kf/ds^k] = [f]/[s]^k$ Comme l'integral est l'inverse de la derivee on a que : $[\int f(s)ds] = [f] * [s]$ et $[\int s^4 f(s)ds] = [f] * [s]^5$

5 Comparons l'ordre de grandeur des deux termes considérés dans l'énoncé. Le premier, qu'on sait être un terme dominant, s'écrit $f\vec{e_z} \times \vec{u}$, avec f le facteur de Coriolis ($\approx 10^{-4}$ s^{-1}). L'ordre de grandeur de ce terme est $f|\vec{u}|$ car la norme d'un vecteur résultant d'un produit vectoriel est de l'ordre du produit des normes des deux vecteurs initiaux, et la norme de $\vec{e_z}$ est égale à 1.

Comme nous sommes dans la mer du Nord, nous pouvons considérer que l'hypothèse des eaux peu profondes est acceptable. Dans ce cas, nous avons vu que la vitesse caractéristique est de l'ordre de $\sqrt{gh}$. En prenant pour valeurs $g = 10$ m/s^2, $h = 100$ m, on trouve que $|\vec{u}| = 30$ m/s. L'ordre de grandeur de l'accélération de Coriolis est donc de $f|\vec{u}| = 10^{-4}$ s^{-1}. 30 m/s $= 3\ 10^{-3}$ m/s^2.

L'accéleration $\partial\vec{u}/\partial t$ a un ordre de grandeur égal à $|\vec{u}|/T = 30$ ms^{-1}/45 000 s , où T est le temps caractéristique de propagation de la marée et qui est égal à 12 heures 25 minutes ≈ 12.5 . 3600 secondes ($\approx$ 45 000 s). On voit que les deux termes ont des ordres de grandeurs comparables. L'accélération $\partial\vec{u}/\partial t$ est donc susceptible de faire partie des termes dominants.

6 Pour cet exercice, il suffit de développer entièrement les dérivées partielles selon la nouvelle représentation, autrement dit,

$$\begin{aligned}\psi &= \psi(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ &= \psi(t(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), x(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), y(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), z(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})),\end{aligned}$$

avec le changement de base

$$(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \left[t, x, y, \frac{z}{Z(t)}\right].$$

Explicitons

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{t}}.\frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}}.\frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}}.\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{z}}.\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{t}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{t}}.\frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}}.\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}}.\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{z}}.\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{t}}.\frac{\partial \tilde{t}}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}}.\frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}}.\frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{z}}.\frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{t}}.\frac{\partial \tilde{t}}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}}.\frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}}.\frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{z}}.\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{z}}.\frac{1}{Z(t)}\end{aligned}$$

qui nous donne les expressions correctes ou non dans les équation posées.

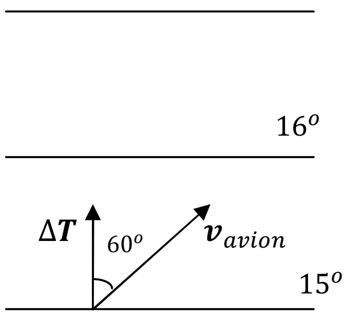
Exo 7

$\boldsymbol{v}_{avion} = 360\frac{km}{h}$; $T_i = 15^oC$; $\Delta T = \frac{1^oC}{100km}$

$\boldsymbol{v}_{\Delta \boldsymbol{T}} = \boldsymbol{v}_{avion}\, cos60 = \frac{180km}{h}$

Après 30 min l'avion aura parcouru selon $\Delta\boldsymbol{T}$: $90km$

La température finale sera de $T_f = T_i + 0.9^oC = 15{,}9^oC$



8 La dérivée matérielle d'une grandeur quelcqonque correspond à la variation temporelle de cette grandeur que mesure un observateur se trouvant "assis" sur une particule de fluide se déplacant à une vitesse $\vec{v}$ dans le repère de l'observateur au repos. En prenant la dérivée matérielle du vecteur position on obtient donc la variation temporelle des coordonées (x,y,z) pour un observateur ayant une vitesse $\vec{v}$ dans le repère au repos. Il mesure donc bien la vitesse de la particule sur laquelle il est assis.

On peut également le voir de manière plus rigoureuse en prenant la définition de la dérivée matérielle et en l'applicant au vecteur $\vec{v}$. Par exemple pour la composante v_x on obtient:

$$D_t v_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_x = 0 + (v_x, v_y, v_z) \cdot (1, 0, 0) = v_x$$

9 On ne peut écrire cette expression si la vitesse du fluide, $\vec{u}(t, \vec{r}(t))$, n'est pas spatialement homogène. Dans ce cas, il faudrait plutôt écrire

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{u}(\theta, \vec{r}(\theta)) d\theta$$

comme $\vec{u}(t, \vec{r}(t))$ dépend de $\vec{r}(t)$. Par contre, si la vitesse est spatialement homogène, c'est-à-dire si $\vec{u}(t, \vec{r}(t)) = \vec{u}(t)$, alors on a

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{u}(t)$$

et on peut écrire l'expression

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{u}(\theta, \vec{r}_0) d\theta$$

.

10

1) Puisque $\vec{u}$ est une vistesse, on trouve les dimensions physiques des constantes: $a = [s^{-1}]$ et $b = [ms^{-1}]$

2) Soit $X = x + iy$. Puisque $\vec{u} = ay\vec{e_x} - a(x - bt)\vec{e_y}$, on a alors

$$\frac{\partial X}{\partial t} = a(y - ix) + abt = -iaX + abt$$

On a donc une équation différentielle à résoudre:
- Solution homogène: $X_h = Ae^{-iat}$
- La solution particulière est de la forme: $X_p = Ct + D$
  en substituant cette solution particulière dans l'équation différentielle: $C = -ia(Ct+D)+abt$
  on obtient alors $C = -ib$ et $D = \frac{a}{b}$

Principe de superposition: $X = X_h + X_p = Ae^{-iat} + (\frac{a}{b} - ibt)$ avec $A = |A|e^{i\delta}$
d'où

$$x = Re(A)cos(at) + Im(A)sin(at) + \frac{a}{b} = |A|cos(\delta - at) + \frac{a}{b}$$
$$y = Im(A)cos(at) - Re(A)sin(at) - bt = |A|sin(\delta - at) - bt$$

On a donc bien les équation d'une cycloïde (composition d'un mouvement circulaire et d'une translation à vitesse constante).

3) Soit ψ tel que $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$
On retrouve bien que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

On a alors:

$$\psi(x, y, t) = a\frac{y^2}{2} + a(\frac{x^2}{2} - btx) + B(t) = \frac{a}{2}[(x - bt)^2 + y^2] - \frac{ab^2t^2}{2} + B(t)$$

Or, en $t = t_0$, une ligne de champ rassemble les points (x,y) tels que $\psi = const$.
On obtient donc $(x - bt_0)^2 + y^2 = const$ qui est bien l'équation d'un cercle.

11 La période de la composante de la marée est de

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

On a

$$u(t,x,y) = U(x,y)sin(\omega t + \varphi(x,y))$$
$$v(t,x,y) = V(x,y)cos(\omega t + \gamma(x,y))$$

comme $U(x,y)$ et $V(x,y)$ ne sont pas forcement des constantes de la position càd qu'elles peuvent varier selon la position. La particule peut suivre n'importe quel type de chemin.

On calcule maintenant la trajectoire avec $U = a + by$, $V = constante = c$ et $\gamma = \varphi = 0$. On a donc

$$u(t,x,y) = (a + by)sin(\omega t)$$
$$v(t,x,y) = ccos(\omega t)$$

or

$$u(t,x,y) = \frac{dr_x}{dt}$$
$$v(t,x,y) = \frac{dr_y}{dt}$$

et avec comme condition initiale $r_0 = 0$.

Il faut donc intégrer les expressions de $u(t,x,y)$ et $v(t,x,y)$ afin de trouver la trajectoire. On commence avec $v(t,x,y)$

$$r_y = \int v(t,x,y)dt = \int ccos(\omega t)dt = \frac{c}{\omega} sin(\omega t) + C_1$$

comme $r_y(0) = 0$ (la condition initiale) et comme on a $r_y(0) = C_1 \Longrightarrow C_1 = 0$

On a alors

$$u(t,x,y) = ((a + \frac{bc}{\omega})sin(\omega t))sin(\omega t)$$

qu'il faut intégrer pour obtenir la trajectoire selon x.

$$r_x = \int u(t,x,y)dt = \int((a + \frac{bc}{\omega})sin(\omega t))sin(\omega t)dt = \int asin(\omega t)dt + \int \frac{cb}{\omega}\frac{(1 - cos2\omega t)}{2}dt =$$
$$\frac{-a}{\omega}cos(\omega t) + \frac{cbt}{w} + \frac{cb}{4\omega^2}sin(2\omega t) + c_1$$

comme $r_x(0) = 0$ (la condition initiale) et comme on a $r_x(0) = \frac{-a}{\omega} + C_1 \Longrightarrow C_1 = \frac{a}{\omega}$

On a donc calculeé la trajectoire

$$r_x = \frac{\omega}{w}(1 - cos(\omega t) + \frac{cb}{\omega}(t + \frac{sint(\omega t)}{\omega}$$
$$r_y = \frac{c}{\omega} sin(\omega t)$$

12 Regardons d'abord l'imperméabilité à la surface:

$$[D_t(z-\eta)]_{z=\eta} = 0$$

En effet, si une surface est imperméable alors les particules du fluide ne doivent pas pouvoir traverser cette surface. Et alors on a comme contrainte que la vitesse d'une particule à la surface doit être tangent à la surface. Ce qu'on peut décrire par:

$$(\underline{v} - \underline{v}^S) \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0$$

où $\underline{v}^S = \frac{\partial \eta}{\partial t}.e_z$.
Cela signifie également que si une particule est à la surface, elle doit y rester. On peut faire le même raisonnement pour l'imperméabilité du fond. Les deux équations représentent alors clairement cette contrainte.

Le changement de coordonnée va mettre en évidence la hauteur relative de la particule : $\tilde{z}$. Cela signifie que si la particule est à la surface: $\tilde{z} = 1$ et si elle est au fond: $\tilde{z} = 0$. Ainsi, si la particule se trouve relativement toujours a milieu de la colonne d'eau, $\tilde{z}$ sera constant et vaudra 0.5.

Vérifions l'égalité suivante :

$$D_t = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + u\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + v\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + w\frac{\partial}{\partial \tilde{z}}$$

$$\begin{aligned} D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial \tilde{z}}\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \end{aligned} \tag{7}$$

On simplifie:

$$= \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + u\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + v\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + w\frac{\partial}{\partial \tilde{z}}\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \tag{8}$$

Regardons $\tilde{w}$

$$\tilde{w} = D_t\tilde{z} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} + u\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} + v\frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} + w\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} = w\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \tag{9}$$

D'où

$$\frac{\tilde{w}}{w} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \tag{10}$$

En remplacant dans D_t, on obtient

$$D_t = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + u\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + v\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + w\frac{\tilde{w}}{w}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \tag{11}$$

On obtient alors l'égalité recherché. Trouvons maintenant les nouvelles conditions d'imperméabilité dans les nouvelles coordonnées. Remarquons tout d'abord que η représente la hauteur de la surface air-eau. Dans les nouvelles coordonnées, il est alors évident que $\tilde{\eta} = 1$. On a donc que

$$[D_t(\tilde{z} - \tilde{\eta})]_{\tilde{z}=\tilde{\eta}} = [D_t\tilde{z}]_{\tilde{z}=1} = [\tilde{w}]_{\tilde{z}=1} = 0 \tag{12}$$

Pour le fond on a que $\eta = 0$ d'où par le même procédé, on obtient la deuxième condition d'imperméabilité.

Exercice (13)

r_{x0} et r_{y0} sont une 'étiquette' de la particule, dans la représentation lagrangienne.
Dans ce formalisme :

$$\vec{v}^L = \frac{dx^L}{dt} = r_{x0}\, kt\, e^{kt} \vec{e}_x + r_{y0}(-kt) e^{-kt} \vec{e}_y$$

Or, dans le formalisme eulérien :

$$\vec{v}^E = kx\,\vec{e}_x - ky\,\vec{e}_y$$

Pour la trajectoire, on a que

$$c^{ste} = r_{x0} \cdot r_{y0} = x \cdot y$$

C'est donc une hyperbole (qui dépend de la particule, c'est à dire de r_{x0} et de r_{y0}).

Pour les lignes de courant, il faut passer dans le formalisme Eulerien.
Calculons $\psi(x,y)$, puisque les lignes de courant sont données par $\psi(x,t)$ = constante (ça revient à être tangent à la vitesse en tout point)
On doit résoudre

$$\frac{d\psi}{dy} = u = kx \qquad -\frac{d\psi}{dx} = v = -ky$$

D'où $\Psi(x,y) = kyx + a$ ← constante arbitraire

D'où les lignes de courant sont des hyperboles d'équations

$$kxy = c^{ste}$$ ← elle varie d'après la ligne de courant

14

15 On nous dit dans l'énoncé que le coefficient d'aspect est très petit, on a donc:

$$\delta = \frac{L_{verticale}}{L_{horizontale}} << 1 \tag{13}$$

On nous dit aussi que l'approximation de Boussinesq s'applique. Dans ce cas, l'équation de continuité revient à:

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{v} = 0 \tag{14}$$

Ce qui peut se réécrire de la forme suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{15}$$

Vu que la somme de ces deux termes vaut 0, ils doivent, en valeur absolue, être du même ordre de grandeur.

$$\frac{u}{L_{horizontale}} \sim \frac{v}{L_{verticale}} \Rightarrow v \sim \frac{uL_{verticale}}{L_{horizontale}} \tag{16}$$

Mais on a vu précédemment que:

$$\frac{L_{verticale}}{L_{horizontale}} << 1 \tag{17}$$

Donc en mettant (11) dans (10), on trouve:

$$u >> v \tag{18}$$

16 L'equation de continuté

$$D_t\rho + \rho\overrightarrow{\bigtriangledown} \bullet \overrightarrow{u} = 0$$

avec l'approximation Boussinesq elle est devenu:

$$\overrightarrow{\bigtriangledown} \bullet \overrightarrow{u} = 0$$

Nous voulons savoir si l'approximation Boussinesq va impliquer que la dérivée matérielle de la masse volumique est nécessairement nulle.

N.B:"'l'approximation Boussinesq $\Longrightarrow$ la variation de la masse volumique est faible si elle n'est pas multipliée par g "

Par conséquence, l'équation de continuté est réduit à

$$\overrightarrow{\bigtriangledown} \bullet \overrightarrow{u} = 0$$

ne va pas impliquer que la dérivée matérielle de la masse volumique est nécessairement nulle (c'est possible que $D_t\rho$ est nulle mais c'est à cause des conditions pasticulière, mais pas dans tous les cas). Elle est juste négligeable devant l'ordre de grandeur de [la divergence de $\overrightarrow{u}$] en pratique.

17 Le rayon est impenetrable si aucun volume de fluide ne peut traverser ce rayon. Pour traverser le rayon il faut que la vitesse normale au rayon soit differente de 0, on va montrer que sur le cercle de rayon R cette vitesse = 0. On va faire le produit scalaire avec la normal pour isoler la vitesse normal a la surface. La normale au cercle est $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{R}$ car on peut voir que la normale est toujours dans la direction du rayon et de norme 1. $\vec{u}\ (x,y) * \vec{n}$ vaut alors en prenant l'expression donne pour la vitesse $\vec{u}\ (x,y) * \vec{n} = \frac{Ux}{R} + \frac{UR^2}{(x^2+y^2)^2}[(y^2 - x^2)\frac{x}{R} - \frac{2xy^2}{R}$. Le cercle de rayon R est l'ensemble des points tel que $R = (x^2+y^2)^{1/2}$ et donc $y^2 = R^2 - x^2$. On calcule donc u au point x, y tel x, y appartienne au cercle de rayon R :$\vec{u}\ (R) * \vec{n} = \frac{Ux}{R} + \frac{UR^2}{R^4}((R^2 - 2x^2)\frac{x}{R} - \frac{2x}{R}(R^2 - x^2)) = \frac{Ux}{R} + \frac{U}{R^2}(-Rx) = 0$. Ce qui montre que le cercle de rayon R est imperméable.

18 Les conditions d'imperméabilité sont données par $(\vec{u} - \vec{u_s}) \,.\, \vec{n} = 0$, où $\vec{u}$ est la vitesse du fluide, $\vec{u_s}$ la vitesse de la surface, et $\vec{n}$ un vecteur normal à la surface. Il s'agit donc de trouver l'expression du vecteur $\vec{n}$ en fonction de l'expression de l'interface océan/atmosphère ou du fond marin.

Commençons par le fond. On négligera $\vec{u}_s$ car ce dernier reste fixe en fonction du temps. Si on prend la différentielle de $h(x, y)$, on obtiendra l'expression, pour chaque point du fond, du plan tangent au fond en ce point. Il suffira ensuite de prendre deux vecteurs non colinéaires, d'en faire le produit vectoriel et de normer le vecteur obtenu ; nous aurons un vecteur normal unitaire au fond océanique. Voici donc la différentielle :

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x}\, dx + \frac{\partial h}{\partial y}\, dy.$$

L'équation du plan tangent au point (x, y) est donnée par l'expression (attention, h est antilinéaire à la direction z, ce qui explique le signe de z) :

$$-z = \frac{\partial h}{\partial x}\, x + \frac{\partial h}{\partial y}\, y.$$

On trouve sans difficultés deux vecteurs perpendiculaires appartenant au plan tangent : $\vec{a} = (1, 0, -\frac{\partial h}{\partial x})$ et $\vec{b} = (0, 1, -\frac{\partial h}{\partial y})$. Calculons leur produit vectoriel[1] :

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, 1).$$

Maintenant, en faisant le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{n}$, on trouve :

$$\vec{u} \,.\, \vec{n} = (u, v, w) \,.\, (\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, 1) = \Big[u\, \frac{\partial h}{\partial x} + v\, \frac{\partial h}{\partial y} + w\Big]_{z=-h} = 0,$$

ce qui correspond bien à l'expression donnée dans l'énoncé de l'exercice.

La résolution pour $\eta(x, y, t)$ est basée sur le même raisonnement, mais le vecteur $\vec{u_s} = (0, 0, \frac{\partial \eta}{\partial t})$ va ajouter un terme supplémentaire $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ dans la condition d'imperméabilité.

[1] Ici, je n'ai pas normé le vecteur $\vec{n}$. Ce n'est pas fondamental car la condition d'imperméabilité demande que le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{n}$ soit nul ; un facteur multiplicatif ne changera rien au résultat.

19 Les variables utilisés dans cet exercice seront :

Commençons par écrire l'équation de continuité :

$$\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

que l'on peut intégré le long de la verticale

$$\int_{-h}^{\eta} (\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z}) dz = 0. \tag{19}$$

Avant de continuer, rappelons-nous de la règle de Leibniz, qui nous dit

$$\boldsymbol{\nabla}_h \int_{-h} \eta \mathbf{u} dz = \int_{-h}^{\eta} \left(\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \mathbf{u}\right)\, dz + \boldsymbol{\nabla}_h(\eta) \cdot \mathbf{u}_\eta - \boldsymbol{\nabla}_h(-h) \cdot \mathbf{u}_{-h}$$

qui une fois remise dans (19) donne

$$\boldsymbol{\nabla}_h \Big(\int_{-h}^{\eta} \mathbf{u}\, dz \Big) + \boldsymbol{\nabla}_h(-h) \cdot \mathbf{u}_{-h} - \boldsymbol{\nabla}_h(\eta) \cdot \mathbf{u}_\eta + w_\eta - w_{-h} = 0. \tag{20}$$

Il est maintenant utile de se rappeler les conditions d'imperméabilité (ou autrement dit, que l'eau ne passe ni dans l'atmosphère ni sous le fond de l'eau)

$$\begin{array}{rll} \frac{\partial \eta}{\partial t} + & \mathbf{u}_\eta \boldsymbol{\nabla}_h \eta - w_\eta & = 0 \\ & \mathbf{u}_h \boldsymbol{\nabla}_h h + w_{-h} & = 0, \end{array}$$

et avec la définition de la vitesse moyenne

$$\bar{\mathbf{u}}(t, x, y) = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} \mathbf{u}\, dz,$$

donne, une fois replacé dans (20),

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}_h (H \bar{\mathbf{u}}) = 0.$$

Mais comme h ne dépend pas du temps, $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$ ce qui donne en explicitant le gradiant horizontal

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial (Hu)}{\partial x} - \frac{\partial (Hv)}{\partial y}$$

Afin de visualiser physiquement ce résultat, considérons que le fluide est dans un plan (pour négliger la composante y). Prenons un élément

20

21 Pour montrer l'imperméabilité des courbes il faut que $\vec{v}(x,y) \cdot \vec{n}(x,y) = 0\ \forall (x,y) \in courbe$. Pour cela il suffit premièrement de parametriser $\vec{n}(x,y)$ ce qui donne, pour la courbe $y - h^-(x) = 0$:

$$\vec{n} = (-\frac{dh^-(x)}{dx}, 1)$$

Il faut ensuite se rappeler du lien reliant la vitesse et la fonction de courant, à savoir:

$$v_x = \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y}$$

$$v_y = -\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x}$$

On trouve alors que

$$v_x = \frac{\phi}{h^+(x) - h^-(x)}$$

$$v_y = [\frac{-\frac{dh^-(x)}{dx}(h^+(x) - h^-(x)) - (y - h^-(x))(\frac{dh^+(x)}{dx} - \frac{dh^-(x)}{dx})}{(h^+(x) - h^-(x))^2}] = \frac{\phi \frac{dh^-(x)}{dx}}{h^+(x) - h^-(x)}\ car\ y - h^-(x) = 0$$

Il est donc maintenant immédiat que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ Le même raisonnement s'applique à l'autre courbe.

En ce qui concerne la trajectoire on a que

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(\vec{r}(t'), t')\, dt'$$

On obtient donc que

$$r_x(t) = x_0 + \frac{\phi(t - t_0)}{h^+(x_0) - h^-(x_0)}$$

$$r_y(t) = \frac{h^-(x_0) + h^+(x_0)}{2} + \frac{\phi[\frac{dh^-}{dx}(x_0) + \frac{(\frac{dh^+}{dx}(x_0) - \frac{dh^-}{dx}(x_0))}{2}](t - t_0)}{h^+(x_0) - h^-(x_0)}$$

$\rightarrow (t - t_0) = (r_x - x_0)\frac{(h^+(x_0) - h^-(x_0)}{\phi}$

La trajectoire s'obtient en exprimant la composante r_y en fonction de la composante r_x en substituant $(t - t_0)$. On obtient au final

$$r_y(r_x) = (1 + (r_x - x_0)\frac{d}{dx})\frac{(h^-(x_0) + h^+(x_0))}{2}$$

22

23 Nous avons résolu cet exercice en séance de TP (Ex 18)

Dans le cas 2D et à divergence nulle, la décomposition de la vitesse s'écrit simplement:

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\psi \times \vec{e_z}$$

On décompose ensuite cette vitesse en une partie tangente et une partie normale:

$$\vec{u} = [(\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{t})\vec{t} + (\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{n})\vec{n}] \times \vec{e_z}$$

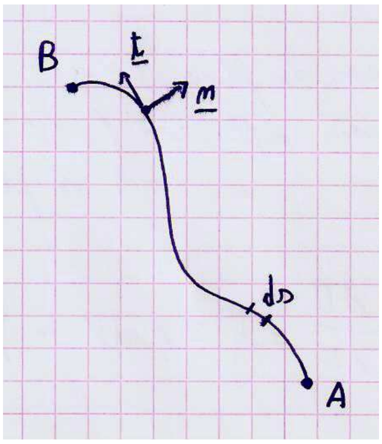
Calcul du débit:

$$Q = \int_A^B \vec{u} \cdot \vec{n}\, ds$$

$$= \int_A^B \left[\left((\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{t})\vec{t} + (\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{n})\vec{n}\right) \times \vec{e_z}\right] \cdot \vec{n}\, ds$$

$$= \int_A^B -\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{t}\, ds$$

$$= \int_A^B -\frac{\partial \psi}{\partial s}\, ds = -[\psi]_A^B = \psi_A - \psi_B$$



24 Si on a un écoulement incompréssible alors

$$\nabla u = 0$$

or si on prend la divergence en coordonnées sphériques, on obtient

$$\nabla u = \frac{1}{Rcos\theta}\frac{\partial U_b}{\varphi} + \frac{1}{Rcos\theta}\frac{\partial V_b cos\theta}{\partial\theta} = 0$$

où R est le rayon de la Terre et $u = (U_b, V_b)$. Comme $\nabla u = 0$, il existe une fonction ψ telle que $\nabla \times \psi = u$ Et on peut exprimer

$$(U_b, V_b) = \tfrac{1}{R}(\frac{-\psi_b}{\partial\theta}, \tfrac{1}{cos\theta}\frac{\partial\psi_b)}{\partial\varphi}$$

On a par définition que le U_b est positif si le transport est dirigé vers l'est et V_b est positif si le transport se dirige vers le nord.

Donc pour le détroit de Brake (entre l'Antarticque et l'Amérique du Sud) le transfert se fait de l'ouest vers l'est car ψ_b augmente lorsque θ diminue càd que U_b est positif car $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$ est négatif.
On observe le même comportement le long de tout l'Antarticque.

Dans le Pacifique, on a une circulation de l'ouest vers l'est de 50 degrés nord à 30 degrés nord puis une circulation de l'est vers l'ouest jusqu'à l'équateur et même dans le Pacifique Sud.

Dans l'océan Indien , on a une circulation de l'est vers l'ouest car ψ_b augment lorsque θ augmente.

Le flux d'eau dans le passage de Drake est de $120.10^6 m^3 s^{-1}$ (donné au cours). on peut aussi calculé ce flux est fesant la différence de ψ à deux points différents. En observant la carte on voit que ce chiffre est correcte.

25 Pour représenter le transport méridien à partir de la fonction de courant méridienne, il suffit considérer $V_m = -\frac{\partial \psi_m}{\partial z}$ et $W_m = \frac{1}{R}\frac{\partial \psi_m}{\partial \theta}$ et on retrouve alors à partir de l'équation de continuité

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \psi_m}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{R}\frac{\partial \psi_m}{\partial \theta} = -\frac{1}{R}\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \theta \partial z} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \psi_m^2}{\partial z \partial \theta} = 0 \tag{21}$$

Le flux est donnée partial

$$Q = \int_S \mathbf{v}.ds \tag{22}$$

où S désigne la surface traversée par l'eau et $\mathbf{v}$ la vitesse du fluide. Grâce à l'exercice 23, on sait que "le débit volumique traversant toute courbe joignant deux points d'un écoulement plan à masse volumique constante vaut la différence entre les valeurs de la fonction de courant aux points concernés." C'est-à-dire que

$$Q = \psi(A) - \psi(B) \tag{23}$$

où A et B sont les deux points concernés.

On peut alors facilement calculer les flux:

Section AB : $Q_{AB} = \psi(B) - \psi(A) = (0 - 12).10^6\ m^3 s^{-1}$.

Section CD : $Q_{CD} = \psi(D) - \psi(C) = (15 - 6).10^6\ m^3 s^{-1}$.

Section EF : $Q_{EF} = \psi(F) - \psi(E) = (0 - 21).10^6\ m^3 s^{-1}$.

Pour trouver la direction du transport il suffit de regarde la direction du produit vectorielle entre la normale et le gradient de la fonction de courant ψ_m. Donc pour un point situé sur le segment CD, le gradient va vers le bas et donc le transport va vers la droite (nord). De même, pour le segment AB, le gradient va vers le haut et le transport va donc vers la gauche.

(26) Ψ est définie pour un écoulement incompressible

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

par $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = u$ et $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v$

$$= \frac{Q}{2\pi}\frac{x-x_S}{(x-x_S)^2+(y-y_S)^2} \qquad = -\frac{Q}{2\pi}\frac{y-y_S}{(y-y_S)^2+(x-x_S)^2}$$

$$\Rightarrow \Psi(x,y) = f(x) + \frac{Q}{2\pi}\int \frac{x-x_S}{(x-x_S)^2+(y-y_S)^2}\,dy$$

$$= f(x) + \frac{Q}{2\pi}\frac{1}{(x-x_S)^2}\int \frac{x-x_S}{1+\left(\frac{y-y_S}{x-x_S}\right)^2}$$

Changement de variable

$$u = \frac{y-y_S}{x-x_S}$$

$$dy = du \cdot x - x_S$$

$$\Rightarrow \Psi(x,y) = f(x) + \frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y-y_S}{x-x_S}$$

et, en recommençant avec l'autre condition sur Ψ (en primitive selon x :)

$$\Psi(x,y) = g(y) - \frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{x-x_S}{y-y_S}$$

On obtient que $f(x)$ et $g(y)$ sont constantes en réduisant les équations.

D'où on peut réécrire, en utilisant la détermination principale de l'argument : $x \cdot x_S$) $]-\pi,\pi[$

$$\Psi(x,y) = \frac{Q}{2\pi} \arg(x-x_s,\, y-y_s) \quad (+k)$$

car : $\begin{cases} \arg \frac{1}{z} = -\arg z \\ \arg(x,y) = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$

($\pm\pi$ pour appartenir à $]-\pi, \pi[$ ...)

On a une singularité physique à la source,

et une ~~singularit.~~ discontinuité

 sur une demi-droite due à la détermination de l'argument

27

28 On nous dit que:

$$\overrightarrow{u}(r,\phi) = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\overrightarrow{e_r} - \frac{\partial\Psi}{\partial r}\overrightarrow{e_\phi} \tag{24}$$

avec

$$\overrightarrow{\Psi}(r,\phi) = Cr^{\frac{\pi}{\alpha}}sin(\frac{\pi}{\alpha}\phi) \tag{25}$$

Calculons donc déjà $\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}$ et $\frac{\partial\Psi}{\partial r}$:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} = C\frac{\pi}{\alpha}r^{\frac{\pi}{\alpha}}cos(\frac{\pi}{\alpha}\phi) \tag{26}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} = C\frac{\pi}{\alpha}r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}sin(\frac{\pi}{\alpha}\phi) \tag{27}$$

On peut donc finalement écrire:

$$\overrightarrow{u}(r,\phi) = C\frac{\pi}{\alpha}r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}[cos(\frac{\pi}{\alpha}\phi)\overrightarrow{e_r} - sin(\frac{\pi}{\alpha}\phi)\overrightarrow{e_\phi}] \tag{28}$$

0.1 Imperméabilité du dière

La condition d'imperméabilité est:

$$(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u^s}).\overrightarrow{n} = 0 \tag{29}$$

où $\overrightarrow{u^s}$ est la composante tangente de la vitesse à la surface et $\overrightarrow{n}$ est la normale sortante de la surface. Il y a deux cas à traiter ici: $\phi = 0$ et $\phi = \alpha$. Dans les deux cas: $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e_\phi}$ et $\overrightarrow{u^s} = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{e_r})\overrightarrow{e_r}$.

Nous devons donc vérifier la condition d'imperméabilité.

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u^s}).\overrightarrow{n} &= [\overrightarrow{u} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{e_r})\overrightarrow{e_r}].\overrightarrow{n} && (30)\\ &= (-C\frac{\pi}{\alpha}r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}sin(\frac{\pi}{\alpha}\phi)\overrightarrow{e_\phi}).\overrightarrow{e_\phi} && (31)\\ &= -C\frac{\pi}{\alpha}r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}sin(\frac{\pi}{\alpha}\phi) && (32)\end{aligned}$$

Lorsque $\phi = 0$, cela vaut bien 0 car $sin(0) = 0$. Lorsque $\phi = \alpha$, cela vaut bien aussi 0 vu que $sin(\pi) = 0$. Cela nous montre bien que le dièdre est bien imperméable.

0.2 Ecoulement irrotationnel

Montrons maintenant que le rotationnel de la vitesse est effectivement nul. L'expression du rotationnel en coordonnées sphériques nous est donnée dans le formulaire:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\nabla} \otimes \overrightarrow{u}) &= \frac{\overrightarrow{e_r}}{rcos(\theta)}[\frac{\partial u_\theta}{\partial\phi} - \frac{\partial(cos(\theta)u_\phi)}{\partial\theta}] && (33)\\ &+ \frac{\overrightarrow{e_\phi}}{r}[\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r}] + \frac{\overrightarrow{e_\theta}}{r}[\frac{\partial(ru_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{cos\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\phi}]\end{aligned}$$

On sait que $\overrightarrow{u}$ ne dépend pas de θ et n'a pas de composante selon θ. Donc $u_\theta = 0$ et toutes les dérivées par rapport à θ vaudront 0. Il ne nous reste donc que:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\nabla} \otimes \overrightarrow{u}) &= \frac{\overrightarrow{e_\theta}}{r}[\frac{\partial(ru_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{cos\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\phi}] && (34)\\ &= \frac{\overrightarrow{e_\theta}}{r}[u_\phi + r\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{1}{cos\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\phi}] && (35)\\ &= \frac{\overrightarrow{e_\theta}}{r}[-C\frac{\pi}{\alpha}r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}sin(\frac{\pi}{\alpha}\phi) - rC\frac{\pi}{\alpha}(\frac{\pi}{\alpha}-1)r^{\frac{\pi}{\alpha}-2}sin(\frac{\pi}{\alpha}\phi) + C(\frac{\pi}{\alpha})^2r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}sin(\frac{\pi}{\alpha}\phi)] && (36)\\ &= C\frac{\overrightarrow{e_\theta}}{r}\frac{\pi}{\alpha}r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}sin(\frac{\pi}{\alpha}\phi)(-1 - \frac{\pi}{\alpha} + 1 + \frac{\pi}{\alpha}) && (37)\\ &= 0 && (38)\end{aligned}$$

Le rotationnel de la vitesse est donc bien égal à 0.

0.3 Vitesse au sommet

On cherche:

$$\overrightarrow{u'}(x=0,y=0) = \lim_{r\to 0} \overrightarrow{u}(r,\phi) \tag{39}$$

Il y a trois cas à prendre en considération.
Lorsque $\alpha = \pi$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u'}(x=0,y=0) &= \lim_{r\to 0} \overrightarrow{u}(r,\phi) && (40)\\
&= Ccos\phi\ \overrightarrow{e_r} - Csin\phi\ \overrightarrow{e_\phi} && (41)\\
&= cos^2\phi\ \overrightarrow{e_x} + cos\phi\ sin\phi\ \overrightarrow{e_y} + sin^2\phi\ \overrightarrow{e_x} - cos\phi\ sin\phi\ \overrightarrow{e_y} && (42)\\
&= C\overrightarrow{e_x} && (43)
\end{aligned}$$

Lorsque $0 < \alpha < \pi$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u'}(x=0,y=0) &= \lim_{r\to 0} \overrightarrow{u}(r,\phi) && (44)\\
&= 0 && (45)
\end{aligned}$$

vu que $\frac{\pi}{\alpha} - 1 > 0$
Lorsque $\pi < \alpha < 2\pi$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u'}(x=0,y=0) &= \lim_{r\to 0} \overrightarrow{u}(r,\phi) && (46)\\
&= \infty && (47)
\end{aligned}$$

Dans ce cas, la limite n'existe pas. On a une vitesse infinie quand $r \to 0$ car $\frac{\pi}{\alpha} - 1 < 0$.

29 On suppose que $U(x,y) = (u_x, u_y, 0)$. Par la définition de la fonction de courant$\Psi(x,y)$ on a que:

$$u_x = \frac{\vartheta\Psi}{\vartheta y}$$

$$u_y = -\frac{\vartheta\Psi}{\vartheta x}$$

On sait qu'en dimention 3, on peut décomposer $U(x,y) = U_1 + U_2$ tell que divU_1=0 est div$U_2 \neq$0.
Par definition de fonction de courant, on peut écrire $U_1 = rot(\Psi e_z)$,
où $\Psi e_z = (0,0,\Psi)$ et on suppose que U_2 égale au gradient d'une porentiel scalaire Φ. Donc l'intégrale:

$$J = \iint |\overrightarrow{\bigtriangledown} \times \Psi e_z - U|^2 dxdy$$

représente l'intégrale de la norme de U_2(la partie divergentielle) au carré. Pour minimiser cet intégrale, il faut que U soit purement non divergentielle, c'est à dire que U_2=0. Donc il faut que $U = U_1 = rot(\Psi e_z)$

Pour avoir l'identité suivant:

$$\bigtriangledown^2\Psi = -(\bigtriangledown \times U) \bullet e_z$$

il faut procéder composant par composant, en écrivant que "$\bigtriangledown = (\vartheta x, \vartheta y, \vartheta z)$, $U = \bigtriangledown\Phi + \bigtriangledown \times \Psi$ et en sachant que Ψ **est independant de z**". En considérant que la partie droit de l'égalité, nous n'allons regarder que la composant en z(cas projecter sur l'axe de z), aprés un certain devellopement on obtient:

$$-(\bigtriangledown \times U) \bullet e_z = \vartheta^2 x\Psi + \vartheta^2 y\Psi = \bigtriangledown^2\Psi$$

On constacte que si la champ de vitesse est uniquement dans la direction de z, Ψ sera égale à 0.

Pour trouver la fonction associé aux champs de vitesse:
$Ue_x = (U, 0, 0)$
$U[(x/L)e_x + (y/L)e_y] = (Ux/L, Uy/L, 0)$
$U[(y/L)e_x - (x/L)e_y] = (Uy/L, -Ux/L, 0)$
nous devrons utiliser la hypothèse tell que Ψ minimise l'intégrale. Donc nous avons que:

$$\overrightarrow{\bigtriangledown} \times \Psi e_z = \overrightarrow{U}$$

sachant que la matrice qui nous définit $\overrightarrow{\bigtriangledown} \times \Psi e_z$ est le suivant: $\begin{pmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \vartheta x & \vartheta y & \vartheta z \\ 0 & 0 & \Psi \end{pmatrix}$

pour Ue_x, comme la champ de vitesse est uniquement dans la direction de e_x on arrive au résultat suivant:

$$\frac{\vartheta\Psi}{\vartheta y} = U$$

la solution de Ψ est évidente, $\Psi = U.y + Cst$, donc la partie non divergentielle sera $= \overrightarrow{\bigtriangledown} \times \Psi e_z$
et pour $U[(y/L)e_x - (x/L)e_y]$,on fait la même chose et on obtient la système suivante:

$$\frac{\vartheta\Psi}{\vartheta y} = \frac{Uy}{L}$$

$$\frac{\vartheta\Psi}{\vartheta x} = \frac{Ux}{L}$$

La solution pour Ψ est aussi évidante, $\Psi = \frac{U}{2L}(x^2 + y^2)$.

Pour $U[(x/L)e_x + (y/L)e_y]$, on obient la système suivante:

$$\frac{\vartheta\Psi}{\vartheta y} = \frac{Ux}{L}$$

$$-\frac{\vartheta\Psi}{\vartheta x} = \frac{Uy}{L}$$

ce qui voulais dire que Ψ n'éxiste pas, car

$$\frac{\vartheta^2\Psi}{\vartheta y\vartheta x} = \frac{U}{L} \neq \frac{\vartheta^2\Psi}{\vartheta x\vartheta y} = -\frac{U}{L}$$

en plus si on fait la divergence de $U[(x/L)e_x + (y/L)e_y]$, elle n'est pas égal à 0, donc $\overrightarrow{\bigtriangledown} \times \Psi e_z = 0$, ce qui revient de dire qu'on ne peut pas trouver une fonction de courant qui minimise l'intégrale.

30 On va calculer la concentration. Si on calcul a une dimension on a que $u(x)\frac{\partial C}{\partial x} + \gamma C = 0$. On a alors $u(x)\frac{\partial C}{\partial x} = -\gamma C = 0$. On resout ce qui donne : $\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{\gamma}{u(x)}$. En integrant des deux cote : $\int \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial x}dx = -\int \frac{\gamma}{u(x)}dx$. On fait un changement de variable C(x)=C ce qui implique que $\frac{\partial C}{\partial x}dx = dC \Leftrightarrow \int \frac{dC}{C} = -\gamma \int \frac{1}{u(x)}dx \Leftrightarrow lnC + d = -\gamma \int \frac{1}{u(x)}dx$ avec d une constante d'integration. $C(x) = exp[-\gamma \int \frac{1}{u(x)}dx - d]$ on note $exp[-d] = C_0$. On a donc que $C(x) = exp[-\gamma\tau(x)]$. On verifie que le τ est bien tel que $u\frac{\partial \tau}{\partial x} = 1 \Leftrightarrow \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{1}{u} \Leftrightarrow \tau = \int \frac{1}{u}dx$. En plusieurs dimensions, on peut deriver la solution donnee et l'inserer dans l'equation puis verifier que l'egalite est verifiee. Le C_0 est la concentration au point x=0, en effet en x=0 la solution est C_0 car τ est alors une integrale sur un intervalle nul et vaut alors 0. (Rem : generalement quand on parle de desintegration on prend des molecules fixee et on regarde comment elle evolue (+- Lagrange) tendis que ici on definit ce qui ce passe a un endroit (+- Euler) on ne suit pas les molecules c'est-a-dire que, malgre que les particules radioactive se desintegre, en tout point elle reste constant par rapport au temps (on en apporte en tout temps a la source et on attend que la concentration atteigne un equilibre)). $\tau(x)$ a les dimension d'un temps, en une dimension on fait un changement de coordonne x(t)=x (donc $\dot{x}(t)dt = dx$) et on obtient $\tau(x) = \int \frac{1}{u(x)}dx = \int dt$ et on voit que c'est le temps qu'il a fallut pour arriver au point x (en plusieur dimension c'est le temps qu'il a fallu a la particule pour faire la trajet jusqu'a x). La derniere chose a calculer est le temps de demi vie (le temps tel que la concentration est la moitie de la concentration initiale) : $t_{demivie} = \frac{1}{\gamma}ln(2)$. (j'ai considere que τ nous donne le temps et j'ai donc calculer le necessaire tel que $C = \frac{C_0}{2}$.) Rem : τ a bien les dimension d'un temps.

31 Pour vérifier que l'expression donnée dans l'énoncé est bien une solution pour la concentration d'un traceur, il faut substituer de façon brute la fonction dans l'équation différentielle et montrer qu'elle vérifie cette derniere, et également calculer l'intégrale suivante qui garantit la conservation de la quantité de traceur en fonction du temps :

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi Kt}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(x-Ut)^2}{4Kt}\right)\, dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Kt}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-y^2}{4Kt}\right)\, dy = \frac{\sqrt{4\pi Kt}}{\sqrt{4\pi Kt}} = 1,$$

ce qui correspond bien aux conditions initiales données dans l'énoncé (largage en x = 0 et t = 0 d'une quantité 1 de traceur).

32 Si on prend

$$\mathbf{x} = \left(\frac{a = x + y}{a = x - y}\right)$$

$$\mathbf{K} = K \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = U \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

on voit que $\mathbf{K}$ est bien défini positif, que si on développe

$$\boldsymbol{\nabla}\psi = \begin{pmatrix} \partial/\partial a \\ \partial/\partial b \end{pmatrix} \psi = \begin{pmatrix} \partial/\partial x + \partial/\partial y \\ \partial/\partial x - \partial/\partial y \end{pmatrix} \psi$$

donc

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi = U \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

que

$$\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi = K \begin{pmatrix} \partial\psi/\partial b \partial\psi/\partial a + \partial\psi/\partial b \end{pmatrix}$$

ainsi

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi = K \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

Il suffit de développer pour s'en convaincre. Il ne reste qu'à prendre ψ comme équivalent à C comme donné ci-dessus, et les conditions sont satisfaite (en utilisant aussi les résultats de l'exercice 31). Le tout au temps $t = 0$ de C.

Exo 33

$$\rho = constante \quad ; \quad V = volume \quad ; \quad \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} = 0 \quad ; \quad p_a = constante \quad ; \quad S = aire$$

Equation de mouvement :

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho\, F^v - \nabla p + \nabla(2muF)$$

$$\frac{\nabla \rho v}{\nabla t} = -\nabla(\rho v^2) + \rho g + \nabla p$$

Comme dans ce cas-ci $v = 0$ et comme on sait que les forces exercées par le fluide sont definies par le membre de droite de la dernière équation on obtient :

$$F = \int (-\nabla(v\rho v) + \nabla p + \rho g) dV$$

En passant par une intégrale de surface pour le deuxième terme de droite

$$F \ = p_a S + \rho g V$$

34 Dans le repère "c" $\lambda_c = \vec{u}Tc$ où $\vec{u}$ est la vitesse de l'onde dans le milieu. Celle-ci est l'inconnue. En utilisant l'effet doppler en 3 dimension on a que

$$\nu' = (\frac{||\vec{u}|| - v_R^r}{\vec{u} - v_E^r})\nu$$

où l'indice r signifie"radiale" et où Ret$E$ signifient respectivement recepteur et emetteur. On a donc que

$$\nu_b = (\frac{u - V}{u})\nu_c$$
$$\nu_a = (\frac{u - U}{u})\nu_c$$

et donc que

$$u = \frac{(V\nu_a - U\nu_b)}{(\nu_a - \nu_b)}$$

et on obtient donc λ_c

35

36

Notions théoriques. Définissons l'opérateur suivant

$$D_t^o = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} \tag{48}$$

D_t^o est l'opérateur qui détermine le taux de variation temporelle enregistré par un observateur dont la trajectoire $\mathcal{C}^o$ est définie par $\frac{dx}{dt} = u$. Les trajectoires $\mathcal{C}^o$ sont des "caractéristiques".

Lien avec le problème. Dans notre problème, on a

$$D_t^o u(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0 \tag{49}$$

Les caractéristiques sont dont des courbes pour lesquelles $u(x,t)$ est constant. Les caractéristiques sont données par $\frac{dx}{dt} = V$ où V est une constante. Ce sont donc des droites.

Résolution du problème. On résoud l'équation différentielle en cherchant des solutions aux variables séparées de la forme

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{50}$$

On obtient les équations différentielles ordinaires suivantes

$$0 = T' - kT \tag{51}$$

$$0 = X' + \frac{k}{V}X, \tag{52}$$

dont on trouve aisément les solutions. La solution de l'équation est donc

$$u(x,t) = C_1 C_2 e^{-k\left(\frac{x}{V}-t\right)}, \tag{53}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration. On observe alors que si $u(x,t)$ est constant alors $k\left(\frac{x}{V} - t\right) = 0$ ou $k\left(\frac{x}{V} - t\right) = C$ où C est une constante. Le premier cas est évident, pour le second cas on a que

$$u(x,t) = C_1 e^{\ln C_2 - k\left(\frac{x}{V}-t\right)} = C, \tag{54}$$

et l'on choisi C_2 telle que $\ln C_2 - k\left(\frac{x}{V} - t\right) = 0$ ou encore

$$x = Vt + C \tag{55}$$

Interprétation physique de V. V est la vitesse à laquelle l'information concernant $u(x,t)$ est transportée depuis l'amont vers l'aval. En $(0,0)$, il y a une discontinuité. La caractéristique $\mathcal{C}_0^o$ qui passe par $(0,0)$ représente la propagation de cette discontinuité. U est la valeur du "saut" de cette discontinuité.

37

Les unités de ν_t sont
$\nu_t = \frac{\mu}{\rho} \Longrightarrow \sqsubset \nu_t \sqsupset = \frac{\frac{M}{LT}}{\frac{M}{L^3}} = \frac{L^2}{T} = \frac{m^2}{s}$

Les unités de e sont
$e = \frac{\overline{\tilde{v}\tilde{v}}}{2} \Longrightarrow \sqsubset e \sqsupset = \frac{L}{T}\frac{L}{T} = \frac{L^2}{T^2} = \frac{m^2}{s^2}$

Quelles sont les paramétrisations fausses?

La première paramétrisation fausse est
$\overline{\tilde{v}\tilde{v}} = -\nu_t \nabla v$
car le membre de droite est sysmétrique et pas le membre de gauche.

$$\overline{\tilde{v}_i\tilde{v}_j} = \overline{\tilde{v}_j\tilde{v}_i}$$

mais

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \neq \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

La deuxième paramétrisation fausse est
$\overline{\tilde{v}\tilde{v}} = -\nu_t \sqsubset \nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^t \sqsupset$
car la valeur de la trace est différente des deux côtés de l'égalité.

$$\overline{\tilde{v}_1\tilde{v}_1} + \overline{\tilde{v}_2\tilde{v}_2} + \overline{\tilde{v}_3\tilde{v}_3} \neq 0$$

et

$$-\nu_t \sqsubset \nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^t \sqsupset = 0$$

38 Le nombre de Reynolds de l'écoulement i est donné par

$$Re_i = \frac{\rho_i \bar{v}_i R_i}{\mu_i} \tag{56}$$

Avec

- R_i le rayon de la conduite
- ρ_i la masse volumique
- μ_i la viscosité dynamique
- $\bar{v}_i$ la vitesse moyenne de l'écoulement.

On sait que le débit massique est donné par

$$Q_i = \bar{v}_i \rho_i S_i \tag{57}$$

Où S_i est la section de la conduite i qui vaut πR_i^2 Donc on obtient

$$\bar{v}_i = \frac{Q_i}{\pi \rho_i R_i^2}. \tag{58}$$

On peut alors réécrire le nombre de *Reynolds*:

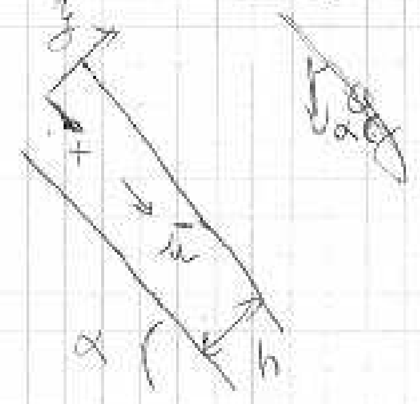
$$Re_i = \frac{Q_i}{\pi \mu_i R_i} \tag{59}$$

En utilisantl le fait que $(\rho_1, \mu_1, R_1, Q_1) = 10(\rho_2, \mu_2, R_2, Q_2)$ On peut voir que

$$Re_1 = \frac{Q_1}{\pi \mu_1 R_1} = \frac{10 Q_2}{\pi (10\mu_2)(10 R_2)} = \frac{1}{10} \frac{Q_2}{\pi \mu_2 R_2} = \frac{Re_2}{10}. \tag{60}$$

Comme $Re_2 > Re_1$ et comme un écoulement est d'autant plus turbulent que son Re est élevé, on peut affirmer que l'écoulement 2 sera turbulent si l'écoulement 1 l'est.

Exercice 39



On sait que $\bar{u}$ est dirigé selon $\vec{x}$. (la rivière ne se soulève pas).
Si, en moyenne, selon y, les contraintes s'équilibrent (ainsi que les forces), selon $\vec{x}$ on a g qui agit.
En projetant ~~[illegible]~~ $F = ma$ sur $\hat{x}$, on obtient $g.\sin\alpha.\rho.\text{volume} = F$
Cette force agit sur le volume d'eau, et lui transmet une certaine énergie $\frac{M v^2}{2}$, mais ce dernier résiste un peu, du fait que l'écoulement est turbulent.

D'où $g\sin\alpha \, \cancel{M} d = \frac{\cancel{M} v^2}{2} . C_D$

$d = \frac{h}{2}$

D'où $g\sin\alpha \, h = C_D \, |u| \, u$

Ou bien, on vérifie que

$\tau = u|u| C_D . \rho_{eau}$, et par analyse dimentionnelle on a

$gh\beta = u|u| \rho_{eau}$

Si on a la formule et h,
on obtient ~~le dé~~ $\bar{u}$ et puis on
a que $Q = h\,\bar{u}$.

40 Quand $\varepsilon \to \infty$, le terme dominant de l'équation différentielle est $\frac{d^2\psi}{d\xi^2}$. On a alors

$$\varepsilon \frac{d^2\psi}{d\xi^2} = 0$$

dont la solution est de la forme

$$\psi(\xi) = A\xi + B$$

Avec les conditions initiales, on obtient $\psi(0) = 1 \Rightarrow B = 1$ et $\psi(1) = 2 \Rightarrow A + B = 2 \Rightarrow A = 1$. Finalement, la solution asymptotique est $\psi(\xi) = \xi + 1$.

41 Nous sommes ici en présence d'un fluide newtonien incompressible en régime stationnaire. Les axes x et y sont respectivement dans le sens de l'écoulement et perpendiculaire au plan incliné. Nous avons donc les équations suivantes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{61}$$

$$\rho(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + \rho g_x \tag{62}$$

$$\rho(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) + \rho g_y \tag{63}$$

Vu que l'écoulement est établi, on sait que les dérivées partielles par rapport à x de la vitesse seront égales à 0. Il nous reste donc:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{64}$$

$$\rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g_x \tag{65}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y \tag{66}$$

De la première équation, on tire que: $v(y) = c^{cste}$ mais vu que le fluide ne passe pas dans l'air, on impose que $v(h) = 0$ donc la composante selon y de la vitesse est nulle. A partir de l'équation 41 et en vertu de ce qu'on vient de dire, on obtient:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g_x \tag{67}$$

De cette manière, nous avons une solution pour $p(x, y)$:

$$p(x, y) = \rho g_y y + F(x) \tag{68}$$

où F(x) est la constante d'intégration selon y mais qui peut dépendre de x

Etant donné la condition qui nous dit qu'en $y = h$ la valeur de la pression est égale à la pression atmosphérique p_a, on a:

$$F(x) = p_a - \rho g_y h \tag{69}$$

L'expression finale pour la pression est donc:

$$p(x, y) = p(y) = \rho g_y(y - h) + p_a \tag{70}$$

Nous avions précédemment:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x) \tag{71}$$

qui peut donc se réécrire comme suit:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-\rho g_x}{\mu} \tag{72}$$

On a donc:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\rho g_x y}{\mu} + A \tag{73}$$

On nous dit que la tension tangentielle est négligeable, nous la prendrons donc égale à 0.

$$\overrightarrow{\tau} = [\mu\frac{\partial u}{\partial y}]_{y=h} = 0 \tag{74}$$

Avec cette condition, on trouve que $A = \frac{\rho g_x h}{\mu}$, ce qui nous donne comme expression:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\rho g_x}{\mu}(y - h) \tag{75}$$

On trouve finalement que:

$$u(y) = \frac{\rho g_x}{\mu}(yh - \frac{y^2}{2}) \tag{76}$$

On peut maintenant calculer la valeur moyenne de cette vitesse:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(y) &= \frac{1}{h}\int_0^h u(y)dy && (77)\\
&= \frac{\rho g_x}{h\mu}[\frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{6}]_0^h && (78)\\
&= \frac{\rho g_x}{h\mu}(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{6}) && (79)\\
&= \frac{\rho g_x h^2}{3\mu} && (80)
\end{aligned}$$

On obtient bien l'expression qui nous est donnée dans l'énoncé si on décompose g_x dans la base xy. En effet, $g_x = gsin(\alpha)$

Pour exprimer le débit descendant la pente en fonction de la hauteur de la couche limite, il est nécessaire de se rappeler que:

$$D = h\bar{u}(y) \tag{81}$$

Dans le cas présent, le débit sera lié à la hauteur de la couche limite par l'expression suivante:

$$D = \frac{\rho g_x h^3}{3\mu} \tag{82}$$

42 on voulait montrer que la surface d'un liquide de masse volumique constante place dans un recipient cyclindrique a fond plat de rayon R en rotation a vitesse angulaire constante ω autour de son axe de symetrie est un paraboloide de revolution. Et que le volume de liquide present dans le recipient doit etre superieur à $\pi\omega^2 R^4/(4g)$ pour que la couche de liquide s'etende jusqu'au centre du recipient.

D'abord on va considére que le cylindre est en rotation depuis un temps suffisament long pour que le mouvement du fluide soit homogène qutour de son axe symétrique(axe z) puisque on avais supposé que la masse volumique est constante. Et il est claire que on a plus de avantage en utilisant les coordonées cylindriques (r,Θ,z), puisque la hauteur de la colonne d'eau ne depend que la distance horizontale au centre(r), donc la préssion aussi. à l'équilibre on a les forces en présence sont le poids, la force de pression et la force centrifuge. Supposons que les forces sont en équilibre, on va essayer d'obtenir la solution. à partir de l'équation d'Euler:

$$\overrightarrow{F} - \overrightarrow{\nabla} P - \rho a = 0$$

Où $\overrightarrow{F}$=la densité volumique de force(dans notre cas $=\rho.\overrightarrow{g}+\rho$r$\omega^2$), P la préssion et a=l'accélération du fluide par rapport au référentiel galiléen=0 (car l'équilibre). On obtient le système suivant (en coordonné cylindrique):
Selon horizontale, les forces sont la force cendrifuge et la force de la présion

$$-r\omega^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\vartheta P_r}{\vartheta r}$$

Selon vertivale, les forces sont la force du poids et la force de la présion

$$g = -\frac{1}{\rho}\frac{\vartheta P_z}{\vartheta z}$$

N.B:"la variation en fonction de Θ est nulle."

En intégrant les 2 équations précedantes, nous allons obtenu P_r et P_z:

$$P_r = \rho\omega^2\frac{r^2}{2} + C_1$$

$$P_z = -\rho g z + C_2$$

et la solution P=P(r,z) est la somme de ces deux solutions:

$$P(r, z) = \rho\omega^2\frac{r^2}{2} - \rho g z + C$$

avec C=$C_1 + C_2$. donc on peut trouver C en se servant de la condition de limite(pression à la surface du fluide = 1 atm).On va définir la préssion comme l'exprésion suivante:

$$P(r, z) = P_{atm} + \rho g(h(r) - z)$$

Où h(r) est la hauteur du fluide en fonction de r, on peut la définir à partir les deux équations précedantes, en supposant que la hauteur de du fluide est assez petite tell que l'ordre de grandeur de la variation de la pression est négligéable par rapport à l'ordre de grandeur de $\rho\omega^2 r$ donc:

$$\frac{\vartheta P}{\vartheta r} = \rho g\frac{\vartheta h}{\vartheta r} = \rho\omega^2 r$$

ce qui implique que:

$$h(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_m$$

avec h_m la hauteur du fluide au centre du cylindre. cet équation représente bien l'équation d'une parabole. etant donné que la système admet une symétrie cylindrique, la surface du fluide donne bien un paraboloïde de révolution. Nous allons maintenant chercher pour quelle volume du fluide on aura h_m=0, donc on a:

$$h(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

le volume occupé est alors:

$$V = \int_0^R 2\pi r.h(r)\, dr$$

$$V = \frac{\omega\pi R^4}{4g}$$

Où R=la rayons de cylindre. En conclusion, si la volume de liquide dépasse $V = \frac{\omega\pi R^4}{4g}$, on aura que h_m¿0.

43 Les ordres de grandeur...

- de la viscosité moléculaire de l'eau : 10^{-6} m^2/s
- de la viscosité turbulente de l'eau : $10^{-6} - 1$ m^2/s
- de la diffusivité moléculaire d'un traceur dans l'océan : 10^{-6} m^2/s
- de la diffusivité turbulente d'un traceur dans l'océan : $10^{-5} - 1$ m^2/s.

44 Pour commencer, dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, les équations de l'équilibre géostrophique s'écrivent (en utilisant les notations du cours)

$$f\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_g = \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}_h p, \tag{83}$$

ainsi que celle de l'équilibre hydrostatique est

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \tag{84}$$

L'équation vectorielle suivante

$$\mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) = \underbrace{\mathbf{e}_z(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v})}_{=0} - \underbrace{(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z)}_{=1}\mathbf{v} = -\mathbf{v} \tag{85}$$

sera aussi utile.

Une fois que l'on dérive suivant z l'équation (83) de l'équilibre géostrophique

$$f\mathbf{e}_z \times \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}_h \frac{\partial p}{\partial z}$$

où il est évident que l'on peut replacer (84) dans le membre de droite ce qui donne

$$f\mathbf{e}_z \times \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}_h(-\rho g)$$

Si l'on multiplie vectoriellement à gauche par $\mathbf{e}_z$ et que l'on utilise l'identité (85) pour le membre de gauche, on arrive à

$$\frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial z} = \frac{g}{\rho_0 f}\mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\nabla}_h \rho.$$

Mais comme la vitesse géostrophique est horizontale, on a bien que la variation verticale de la vitesse horizontale dépend de la variation horizontale de la densité.

Exo 45

Hypothèses : écoulement géostrophique : $R_o \ll 1$, $R_{ot} \ll 1$ et $E_k \ll 1$

Ecoulement hydrostatique : $p(z) = p(0) - \rho_0 g z$

$$\frac{\partial p(z)}{\partial z} = -\rho_0 g$$

$$f e_z \times u_g = -\nabla_\mathrm{h}\, q$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 0$$

a)

$f e_z \times u_g = -\nabla_\mathrm{h}\, q$

$f e_z \times (e_z \times u_g) = f(e_z . u_g) e_z - f(e_z . e_z) u_g = -e_z \times \nabla_h q$

$u_g = \dfrac{1}{f} e_z \times \nabla_h q$

$u_g$ne dépend pas de la profondeur car $\frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{1}{f} e_z \times \nabla_h \frac{\partial q}{\partial z} = 0$

b)

Pour montrer que la vitesse verticale est nulle, aidons-nous de l'équation de continuité :

$\nabla_h u_g + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

Donc $\nabla_h u_g = -\frac{\partial w}{\partial z} = \nabla_h \left(\frac{1}{f} e_z \times \nabla_h q \right) = 0$ car $-\frac{g}{f} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{g}{f} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0$

On voit alors que w est une constante sur tout la hauteur. Si on tient compte des conditions aux frontières à savoir$w(\eta) = (-h) = 0$, il devient evident que w est nul partout.

c)

Enfin, prouvons que la vitesse horizontale est parallèle aux iso-courbes.

Pour les conditions aux limites a savoir en surface et au fond, la dérivée temporelle :

$\frac{d(\eta - z)}{dt} = 0$ pour $z = \eta$ (1)

$\frac{d(h+z)}{dt} = 0$ pour $z = -h$ (2)

Et en utilisant la relation $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v\nabla_{\mathrm{h}} + w\frac{\partial}{\partial z}$

On développe (1) comme $\cancel{\frac{\partial\eta}{\partial t}} + u_g\nabla_{\mathrm{h}}\eta + w\cancel{\frac{\partial\eta}{\partial z}} - \cancel{\frac{\partial z}{\partial t}} - u_g\cancel{\nabla_h z} - w\frac{\partial z}{\partial z} = 0$ en $z = \eta$

Pour obtenir $u_g\nabla_{\mathrm{h}}\eta - w\frac{\partial z}{\partial z} = 0$ en $z = \eta$

De la même manière pour (2) on obtient : $u_g\nabla_{\mathrm{h}}h + w\frac{\partial z}{\partial z} = 0$ en $z = -h$

Ainsi, en ayant trouve que $w = 0$ on trouve que $u_g \perp \nabla_h\eta$.

46 Pour avoir des oscillations d'inertie il faut avoir une vitesse horizontale homogène. De plus on ne tient pas compte de la vitesse du vent. Ceci permet de simplifier l'équation horizontale de conservation de la quantité de mouvement et d'obtenir le système

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt(t)} - fv_y(t) = -\frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{dv_y}{dt}(t) + fv_x(t) = -\frac{\partial q}{\partial y} \end{cases}$$

On a aussi que

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{gx} + \hat{v_x}(t) \\ v_y(t) = v_{gy} + \hat{v_y}(t) \end{cases}$$

où l'indice g réfère à la vitesse géostrophique qui est constante par hypothèse. En substituant ceci dans le premier système d'équation et en dérivant une deuxième fois par rapport au temps on obtient

$$\begin{cases} \frac{d^2\hat{v_x}}{dt^2}(t) + f^2\hat{v_x}(t) = 0 \\ \frac{d^2\hat{v_y}}{dt^2}(t) + f^2\hat{v_y}(t) = 0 \end{cases}$$

on obtient pour les vitesses

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{gx}(t) + A\cos(ft + \Phi) \\ v_y(t) = v_{gy}(t) - A\sin(ft + \Phi) \end{cases}$$

et pour les trajectoires

$$\begin{cases} r_x(t) = x_0 + v_{gx}(t)t + \frac{A}{f}\sin(ft + \Phi) \\ r_y(t)y_0 + v_{gy}(t)t + \frac{A}{f}\cos(ft + \Phi) \end{cases}$$

Si on pose

$$\Phi = 0$$

$$\vec{r}(t_0) = \vec{a}$$

$$\vec{r}_g = \vec{b}$$

$$\vec{c} = (\frac{A}{f}, 0, 0)$$

$$f = d$$

on obtient ce que l'on voulait démontrer

47

48

Signification des constantes:
- g est l'accélération de pesanteur
- h est la profondeur de référence du canal
- f le facteur de coriolis

On considère que la discontinuité se situe entre x_1 et x_2, deux points variables au cours du temps et accompagnant la discontinuité, avec $x_2 - x_1 \to 0$. On considère que x_1 et x_2 ont la même vitesse que la discontinuité.
Par définition de la discontinuité, la valeur de la limite à gauche (de l'élévation η) est differente que celle pour la limite à droite.

Intégrons les équations des eaux peu profondes entre x_1 et x_2:

1)
$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \eta}{\partial t}\ dx + h \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}\ dx = 0$$

Le premier terme peut aussi s'écrire comme:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \eta}{\partial t}\ dx = \frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \eta\ dx - \left(\eta_2 \frac{dx_2}{dt} - \eta_1 \frac{dx_1}{dt}\right)$$

On appelle $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = U$ la vitesse à laquelle la discontinuité se propage.

L'équation intégrée devient alors:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \eta\ dx - U\Delta\eta + h\Delta u = 0$$

2)
$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t}\ dx + g\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x}\ dx - f\int_{x_1}^{x_2} v\ dx = 0$$

L'équation intégrée devient:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u\ dx - U\Delta u + g\Delta\eta - f\int_{x_1}^{x_2} v\ dx = 0$$

3)
$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial v}{\partial t}\ dx + f\int_{x_1}^{x_2} u\ dx = 0$$

L'équation intégrée devient:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} v\ dx - U\Delta v + f\int_{x_1}^{x_2} u\ dx = 0$$

On passe à la limite $l = x_2 - x_1 \to 0$:

$$\lim_{l\to 0} \frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \eta\ dx \leq \lim_{l\to 0} \frac{d}{dt}(x_2 - x_1) \max_{x_1 < x < x_2} \eta = 0$$

$$\lim_{l\to 0} \frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u\ dx = 0$$

$$\lim_{l \to 0} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} v \ dx = 0$$

$$\lim_{l \to 0} \int_{x_1}^{x_2} u \ dx = 0$$

$$\lim_{l \to 0} \int_{x_1}^{x_2} v \ dx = 0$$

Les équations deviennent alors:

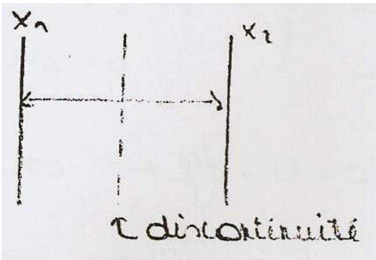
1) $-U\Delta\eta + h\Delta u = 0$
2) $-U\Delta u + g\Delta\eta = 0$
3) $-U\Delta v = 0$

On en déduit $\Delta\eta = \frac{h\Delta u}{U}$ et $\Delta v = 0$ (càd que v reste continue).

L'équation 2 nous donne cette condition: $\Delta u \left(\frac{gh}{U} - U \right) = 0$
Si $\Delta u \neq 0$ alors $\frac{gh}{U} - U = 0$ et donc $U = \pm\sqrt{gh}$

La discontinuité de la vitesse u associée à discontinuité de l'élévation:

$$\Delta u = \pm \frac{\sqrt{gh}}{h} . \Delta\eta = \pm \sqrt{\frac{g}{h}} . \Delta\eta$$



49 Le bilan de masse :
la masse volumique du fluide ρ est constante donc le flux entrant et sortant doit être le même, on a donc

$$H(x_2)l(x_2)u(x_2) - H(x_2)l(x_2)u(x_2) = 0$$
$$\Longrightarrow \frac{d(Hlu)}{dx} = 0$$

Le bilan de quantité de mouvement horizontale :
On a l'équation de Bernouilli

$$\frac{u^2}{2} + zg + \tfrac{p}{g} = constante$$

où z est la hauteur d'eau donc est égal à $H(x)$ dans notre cas, g est la pesanteur et p est la pression. Donc dans notre cas, on obtient pour la surface

$$\frac{u(x)^2}{2} + H(x)g + \tfrac{p}{g} = constante$$

Comme on considère la pression à la surface constante on a donc

$$\frac{d(\frac{u(x)^2}{2} + gH)}{dx} = 0$$

Pour établir $\frac{1}{H}\frac{dH}{dx} = \frac{Fr^2}{1-Fr^2}\frac{1}{l}\frac{dl}{dx}$ où $Fr = \frac{|u|}{\sqrt{gH}}$ est le nombre de Froude

On prend l'équation du bilen de masse

$$\frac{d(Hlu)}{dx} = 0$$

or

$$\frac{d(Hlu)}{dx} = \tfrac{dH}{dx}lu + h\frac{dl}{dx}u + Hl\frac{du}{dx} = 0$$

Si on divise par ulH, on obtient :

$$\tfrac{1}{H}\tfrac{dH}{dx} + \tfrac{1}{l}\tfrac{dl}{dx} + \tfrac{1}{u}\tfrac{du}{dx} = 0$$

Grâce à l'équation du bilan de quantité de mouvement horizontale, on obtient

$$\frac{d(\frac{u(x)^2}{2} + gH)}{dx} = u\tfrac{du}{dx} + g\tfrac{dH}{dx} = 0$$
$$\Longrightarrow \tfrac{du}{dx} = \frac{-g}{u}\tfrac{dH}{dx}$$

Si on injecte ce résultat dans l'équation, on obtient

$$\tfrac{1}{H}\tfrac{dH}{dx} + \tfrac{1}{l}\tfrac{dl}{dx} + \tfrac{1}{u}\frac{-g}{u}\tfrac{dH}{dx} = 0$$

donc

$$\frac{1}{H}\frac{dH}{dx}(1+\frac{-gH}{u^2})+\frac{1}{l}\frac{dl}{dx}=0$$

et on obtient

$$\frac{1}{H}\frac{dH}{dx}=\frac{1}{l}\frac{dl}{dx}\frac{1}{(1-\frac{gH}{u^2})}$$

Si on utilise le nombre de Froude $Fr=\frac{|u|}{\sqrt{gH}}$, on obtient

$$\frac{1}{H}\frac{dH}{dx}=\frac{1}{l}\frac{dl}{dx}\frac{1}{(1-\frac{1}{Fr^2})}=\frac{1}{l}\frac{dl}{dx}\frac{Fr^2}{(1-Fr^2)}$$

Le résultat recherché

Pour établir $\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\frac{-1}{1-Fr^2}\frac{1}{l}\frac{dl}{dx}$ où $Fr=\frac{|u|}{\sqrt{gH}}$ est le nombre de Froude. on utilise la même méthode que précedemment.
On avait

$$\frac{1}{H}\frac{dH}{dx}+\frac{1}{l}\frac{dl}{dx}+\frac{1}{u}\frac{-g}{u}\frac{dH}{dx}=0$$

Grâce à l'équation du bilan de quantité de mouvement horizontale, on obtient

$$\frac{d(\frac{u(x)^2}{2}+gH)}{dx}=u\frac{du}{dx}+g\frac{dH}{dx}=0$$
$$\implies \frac{dH}{dx}=\frac{-u}{g}\frac{du}{dx}$$

Si on injecte ce résultat dans l'équation, on obtient

$$\frac{-u}{gH}\frac{du}{dx}+\frac{1}{l}\frac{dl}{dx}+\frac{1}{u}fracdudx=0$$

donc

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx}(1-\frac{u^2}{Hg})+\frac{1}{l}\frac{dl}{dx}=0$$

et on obtient

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\frac{-1}{l}\frac{dl}{dx}\frac{1}{(1-\frac{u^2}{Hg})}=\frac{-1}{l}\frac{dl}{dx}\frac{1}{(1-Fr^2)}$$

Le résultat recherché.

Analogie :
Le nombre de Mach $M=\frac{|u|}{c_p}$ où c_p est la vitesse de phase des ondes dans un milieu compressible.
Le nombre de Froude $Fr=\frac{|u|}{\sqrt{gH}}$ où $\sqrt{gh}$ est la vitesse des ondes dans le canal.
Si le canal rétrécit alors $\frac{dl}{dx}$ est négatif. Donc si $Fr^2 \lneq 1$ la vitesse augmente et si $Fr^2 \gneq 1$ la vitesse diminue.

50 Les conditions d'imperméabilité sont données par le faite que la vitesse aux limites est tangent à la normale de la surface imperméable, cette condition est donnée par $\mathbf{u}.\mathbf{n} = 0$ au bord du domaine, dès lors on a que

$$u(t,0) = 0 \text{ et } u(t,L) = 0 \tag{86}$$

Les équations dont on recherche les fréquences de résonance sont

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{87}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau cos(\omega t)}{\rho h} \tag{88}$$

Une façon de résoudre le problème est de faire l'hypothèse que l'on peut écrire la solution des équations des eaux peu profondes sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) sin\frac{n\pi x}{L} \tag{89}$$

Si on prend la dérivée partielle de (88) on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -g\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} - \frac{\tau\omega}{\rho h} sin(\omega t) \tag{90}$$

$$= -g\frac{\partial}{\partial x}(-h\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\tau\omega}{\rho h} sin(\omega t), \tag{91}$$

Où l'on a utilisé l'équation (87). En utilisant (89), on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n''(t) sin\frac{n\pi x}{L}) + gh\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n^2\pi^2}{L^2}A_n sin\frac{n\pi x}{L}) + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{4}{(2l+1)\pi}sin(\frac{(2l+1)\pi x}{L})\frac{\tau\omega}{\rho h}sin(\omega t) = 0 \tag{92}$$

Comme les fonctions $sin\frac{n\pi x}{L}$ forment une base orthonormée de fonction, cette relation fournit pour les $A_n(t)$ les équations différentielles ordinaires suivantes

$$A_{2n}''(t) + \frac{4ghn^2\pi^2}{L^2}A_{2n}(t) = 0 \text{ pour } n \geq 1 \tag{93}$$

$$A_{2n}''(t) + \frac{gh(2n+1)^2\pi^2}{L^2}A_{2n+1}(t) + \frac{\tau\omega}{\rho h}sin(\omega t)\frac{4}{(2n+1)\pi} = 0 \text{ pour } n \geq 0. \tag{94}$$

Il est alors facile de résoudre ces équations différentielles ordinaire à coefficients constants. On obtient alors

$$A_{2n}(t) = \alpha_{2n}cos(\sqrt{gh}k_{2n}) + \beta_{2n}sin(\sqrt{gh}k_{2n}) \text{ pour } n \geq 1 \tag{95}$$

$$A_{2n+1}(t) = \alpha_{2n+1}cos(\sqrt{gh}k_{2n+1}) + \beta_{2n+1}sin(\sqrt{gh}k_{2n+1}) + \rho_{2n+1}sin(\omega t) \text{ pour } n \geq 0, \tag{96}$$

Où $k_i = \frac{i\pi}{L}$ et

$$\rho_{2n+1} = \frac{4\tau\omega}{gh(2n+1)\pi(\omega^2 - ghk_{2n+1}^2)} \tag{97}$$

Les fréquences de résonance sont alors

$$\omega = \pm\sqrt{gh}\frac{(2n+1)\pi^2}{L} \text{ pour } n \geq 0. \tag{98}$$

(51) On néglige la rotation de la terre, on considère l'eau de mer comme un fluide parfait de masse volumique constante.

Eq d'Euler :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} v = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} w = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

puis on passe à la pression réduite.

$$q = \frac{P - P_0}{\rho_0} = \frac{P(z) - P_{atm} + \rho g z}{\rho_0}$$

qui devient en $z = \eta$ ($P = P_{atm}$)

$$q(z = \eta) = g \eta \qquad (*)$$

On insère la pression réduite dans les équations d'Euler :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} v + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} w + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial q}{\partial z} + \cancel{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial z} + g} = 0$$

car $\frac{\partial P_0}{\partial z} = -\rho g$

On obtient, en intégrant sur la verticale :

$$\left.\begin{array}{l}\nabla \cdot \underline{u} = 0 \\ \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{q}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{q}}{\partial z} = 0\end{array}\right\} \; (*)$$

De plus, si on impose l'imperméabilité de la surface :

$$D_t \eta = w(\eta)$$

ou encore : $D_t (z - \eta)\Big|_{z=\eta} = 0$

Donc, en remplaçant η dans (*)

$$w(\eta) = \frac{1}{g} \frac{dq}{dt} \quad (* * *)$$

puis, on veut aussi que

$$w(-h) = 0$$

On impose le type de solution : "onde plane" (3D et pression) de vecteur d'onde $(k, l, 0)$ et d'amplitude :

$$\bar{u} = \mathrm{Re}\left[U(z) \exp(\omega t - kx - ly)\right]$$

$$\bar{v} = \text{—} \; V(z) \; \text{—}$$

$$\bar{w} = \text{—} \; W(z) \; \text{—}$$

$$\bar{q} = \text{—} \; Q(z) \; \text{—}$$

En insérant dans le système $\star$:

$$i\omega U(z) - ikQ(z) = 0$$
$$i\omega V(z) - ikQ(z) = 0$$
$$i\omega W(z) + \frac{dQ}{dz} = 0 \quad (**)$$
$$-ikU(z) - ikV(z) + \frac{dW}{dz} = 0$$

On va pouvoir résoudre le système d'équations différentielles.

$$U(z) = \frac{k}{\omega} Q(z)$$
$$V(z) = \frac{k}{\omega} Q(z)$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dz} = \frac{i}{\omega} |k|^2 Q(z) \quad (\star)$$

$$\frac{d^2W}{dz^2} = \frac{i}{\omega} |k|^2 \frac{dQ}{dz}$$

Or on a, par $**$,

$$\frac{dQ}{dz} = -i\omega W(z)$$

D'où $\dfrac{d^2W}{dz^2} = |k|^2 W(z)$

$\Rightarrow W(z) = A \exp(|k|z) + B \exp(|k|z)$

mais, comme $w(-h) = 0$,

$$B = -A \exp(-2|k|h)$$

$\Rightarrow W(z) = 2A \exp(-|k|h) \sinh(|k|(z+h))$

$\star \Rightarrow Q(z) = 2A\, i \frac{\omega}{|k|} \exp(-|k|h) \cosh(|k|(z+h))$

Puis, par * * *, on a

$$\frac{i\omega}{g} Q(z=\eta) = w(z=\eta)$$

Mais on connaît $Q(z)$ et $w(z)$
D'où

$$\omega^2 = g|k| \underbrace{\tanh(|k|(h+\eta))}_{\xrightarrow{h\to\infty} 1}$$

Donc on a bien la relation de dispersion, et les décroissances exponentielles demandées.