Equations d'état pour des écoulements compressibles…

Lois de conservation | Lois de comportement

Conditions aux limites

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 3\hat{\kappa}(p,T)\mathbf{d}^s + 2\hat{\mu}(p,T)\mathbf{d}^d,$$

$$\mathbf{q} = -\hat{k}(p,T)\boldsymbol{\nabla}T,$$

$$\boxed{\begin{aligned} \rho &= \hat{\rho}(p,T), \\ H &= \hat{H}(p,T), \end{aligned}}$$

$$S = \hat{S}(p,T).$$

Equations d'état ?

Modèle du fluide visqueux Newtonien

Modèle de gaz idéal

$$\boxed{\widehat{\rho}(p,T) \;=\; \frac{p}{R_* T}}$$

Constante du gaz

Un exemple d'équation d'état pour la masse volumique

Ecoulements compressibles

Propagation des sons au sein de l'air : c'est un effet de la compressibilité de l'écoulement.
Caractérisation par le nombre de Mach

Presque comme en thermo…

Concentration molaire [mole/m³]

$$\boxed{\rho} = \boxed{c}\boxed{M}$$

Masse volumique [kg/m³]

Masse molaire [kg/mole]

$$pV = nRT$$

$$c = \frac{n}{V}$$

$$c = \frac{p}{RT}$$

Constante des gaz

$$\rho = \frac{p}{R_* T}$$

Constante du gaz

$$R = 8.314 \; [J/moleK]$$

$$R_{*,air} = \frac{R}{M_{air}} = 287 \; [m^2/s^2K]$$

$$\boxed{\widehat{H}(p,T)}$$

Et la relation d'état pour l'enthalpie [1] ?

$$\widehat{H}(p,T) = \boxed{\frac{\partial H}{\partial T}}\, T + \frac{\partial H}{\partial p}\, p = U(p,T) + \frac{p}{\rho(p,T)}$$

Chaleur massique à pression constante

$$= \left(\boxed{\frac{\partial U}{\partial T}} - \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial T}\right) T + \left(\frac{\partial U}{\partial p} - \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{1}{\rho}\right) p$$

Chaleur massique à volume constant

$$\boxed{\beta \triangleq -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}} = \frac{1}{T}$$

Coefficient de dilatation thermique

$$\boxed{\gamma \triangleq \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p}} = \frac{1}{p}$$

Coefficient de compressibilité

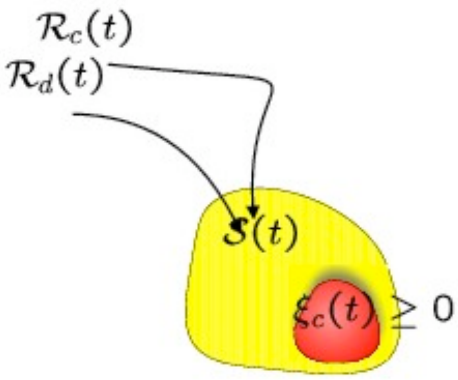
(1) ou l'énergie interne

Il s'agit
donc de définir
une équation d'état pour la
chaleur massique à pression
constante et …

Chaleur massique à pression constante

$$\boxed{c_p(p,T)} \triangleq \frac{\partial \widehat{H}}{\partial T}$$

$$f(p,T) \triangleq \frac{\partial \widehat{H}}{\partial p}$$



On ne peut pas écrire n'importe comment ces relations d'état !

Second principe de la thermodynamique

$$\boxed{\rho \frac{DS}{Dt} \geq \frac{r}{T} - \frac{1}{T} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \frac{\mathbf{q}}{T^2} \cdot \boldsymbol{\nabla} T,}$$

Inégalité de Clausius-Duhem : $\rho T \frac{DS}{Dt} - \rho \frac{DU}{Dt} \geq -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \boldsymbol{\nabla} T$

Il faut respecter certaines règles !
En particulier, il faut les écrire afin que le second principe de la thermodynamique soit toujours satisfait.

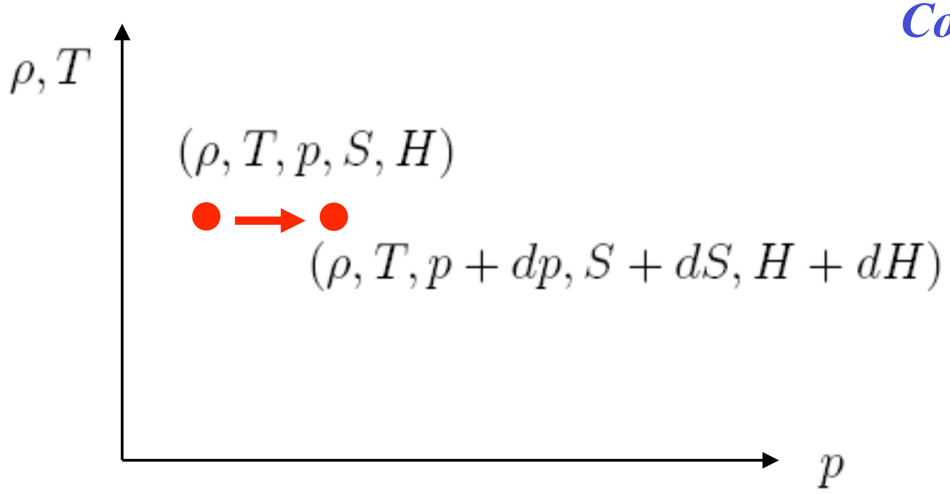
Qu'implique le second principe ?

$$\rho T\frac{DS}{Dt} - \rho\frac{DH}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} \;\; \geq \;\; -\boldsymbol{\tau} : \mathrm{d} + \frac{\mathbf{q}}{T}\cdot\boldsymbol{\nabla}T$$

$$\downarrow$$

$$\rho T\frac{DS}{Dt} - \rho\frac{DH}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} \;\; \geq \;\; -\left[\kappa(\delta : \mathrm{d})^2 + 2\mu(\mathrm{d}^d : \mathrm{d}^d) + \frac{k}{T}\boldsymbol{\nabla}T\cdot\boldsymbol{\nabla}T\right]$$

Considérons deux états distincts



En allant très très très lentement et en revenant très très très lentement

$\bullet \rightarrow \bullet$ $$\rho T dS - \rho dH + dp \geq dt\,[\ldots]$$

$\bullet \leftarrow \bullet$ $$\rho T dS - \rho dH + dp \leq dt\,[\ldots]$$

Nul, car lent et isotherme

$$\boxed{\rho T dS - \rho dH + dp = 0}$$

En allant plus rapidement…

$$\boxed{\rho T\,dS - \rho dH + dp} \geq dt\,[\ldots]$$

On vient de montrer que ce terme est nul…

$$0 \geq -\left[\kappa(\delta : \mathbf{d})^2 + 2\mu(\mathbf{d}^d : \mathbf{d}^d) + \frac{k}{T}\boldsymbol{\nabla} T \cdot \boldsymbol{\nabla} T\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \kappa & \geq & 0 \\ \mu & \geq & 0 \\ k & \geq & 0 \end{array}}$$

$$dS = \frac{dH}{T} - \frac{dp}{\rho T}$$

Peut-on faire quelque chose d'utile de cela ?

$$\begin{cases} T\dfrac{\partial \hat{S}}{\partial p}(p,T) = \dfrac{\partial \hat{H}}{\partial p}(p,T) - \dfrac{1}{\hat{\rho}(p,T)}, \\[2ex] T\dfrac{\partial \hat{S}}{\partial T}(p,T) = \dfrac{\partial \hat{H}}{\partial T}(p,T). \end{cases}$$

On exige que dS soit une différentielle exacte

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial \hat{H}}{\partial p} - \frac{1}{\hat{\rho} T}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial \hat{H}}{\partial T}\right)$$

$$-\frac{1}{T^2}\frac{\partial \hat{H}}{\partial p} + \frac{1}{T}\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial p \partial T} + \frac{1}{\rho T^2} + \frac{1}{\rho^2 T}\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial p \partial T},$$

$$\boxed{-\frac{\partial \hat{H}}{\partial p} + \frac{1}{\rho} + \frac{T}{\rho^2}\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial T} = 0.}$$

Conséquence pour une équation d'état de gaz idéal

$$-\frac{\partial \hat{H}}{\partial p} + \frac{1}{\rho} + \frac{T}{\rho^2}\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial T} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial p} = \frac{1}{\rho}(1 - \underbrace{\frac{p}{\rho R T}}_{=1}) = 0.$$

$$\boxed{\begin{aligned} dU &= \hat{c}_v(T)dT, \\ dH &= \hat{c}_p(T)dT, \\ R &= \hat{c}_p(T) - \hat{c}_v(T). \end{aligned}}$$

$$-\frac{\partial \hat{H}}{\partial p} + \frac{1}{\rho} + \frac{T}{\rho^2}\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial T} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial p} = \frac{1}{\rho}$$

Conséquence pour un écoulement incompressible

$$\boxed{c = \hat{c}(T) = \frac{\partial \hat{U}}{\partial T} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial T}}$$

Nombre de Mach

$$Ma = \frac{U}{\sqrt{\frac{c_p}{c_v} R_* T}}$$

Born: 18 Feb 1838, Turas, Moravia

Died: 19 Feb 1916, Munchen, Germany

caractérise un écoulement d'un fluide !

$$\frac{\textbf{Vitesse caractéristique du fluide}}{\textbf{Vitesse caractéristique de propagation du son}}$$

Calcul de la vitesse du son : l'erreur de Newton !

$$\begin{aligned}
\rho(x,t) &= \rho_0 + \rho'(x,t) \\
v(x,t) &= \cancel{v_0} + v'(x,t) \\
p(x,t) &= p_0 + \underbrace{p'(x,t)}_{\mathcal{O}(\epsilon)}
\end{aligned}$$

Petites pertubations de vitesse, pression et de densité.
Les effets visqueux sont négligeables.
L'air est un gaz idéal.

Que devient la conservation de la masse ?

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v\right) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial x} + \underbrace{\rho' \cancel{\frac{\partial v'}{\partial x}} + v' \cancel{\frac{\partial \rho'}{\partial x}}}_{\mathcal{O}(\epsilon^2)} = 0$$

Equation linéarisée en termes de petites perturbations

Par paresse de notations, nous noterons désormais les perturbations sans apostrophe :-)

Modèle 1 :
Ecoulement isotherme :-(

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial x} & = & 0 \\ \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} & = & -\dfrac{\partial p}{\partial x} \end{cases}$$

$$\boxed{p = \rho R_* T} \qquad \boxed{T = cst}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = R_* T \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

Modèle 1 :
Ecoulement isotherme :-(

$$\boxed{p = \rho R_* T} \quad \boxed{T = cst}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = R_* T \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

$$\Downarrow$$

La vitesse du son ainsi prédite ne correspond pas aux valeurs mesurées expérimentalement ...

$$c = \sqrt{R_* T}$$

Modèle 2 :
Ecoulement adiabatique :-)

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Petites pertubations de vitesse, pression et de densité.
Les effets visqueux sont négligeables : pas de dissipation.
L'air est un gaz idéal.

Il s'agit donc d'un écoulement adiabatique réversible ou encore d'un <u>écoulement isentropique</u>

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial x} & = & 0 \\[2ex] \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} & = & -\dfrac{\partial p}{\partial x} \\[2ex] \rho_0 c_p \dfrac{dT}{dt} & = & \dfrac{\partial p}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\boxed{p = \rho R_* T} \qquad \boxed{\frac{\partial T}{\partial x} = 0}$$

L'air est un
mauvais conducteur !
C'est même un bon isolant !

Il faut conserver une densité variable pour avoir une pression non constante dans l'espace !

Un peu d'algèbre fastidieuse

$$\boxed{p = \rho R_* T}$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial x} = 0}$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{p}{R_* T} c_p \frac{dT}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\ln\left(T^{c_p}\right)\right) = \frac{c_p}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{c_p - c_v}{p}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(\ln\left(p^{c_p - c_v}\right)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\ln\left(\frac{p^{c_p-c_v}}{T^{c_p}}\right)\right) = 0$$

$$\frac{p^{c_p-c_v}}{T^{c_p}} = C$$

$$\frac{R_*^{c_p}\rho^{c_p}}{p^{c_v}} = C$$

$$\boxed{\frac{\rho^\gamma}{p} = C^*}$$

Modèle 2 :
Ecoulement adiabatique :-)

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial x} & = & 0 \\ \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} & = & -\dfrac{\partial p}{\partial x} \end{array}\right.$$

$$\boxed{p = A\rho^\gamma}$$

$$\boxed{p = \rho R_* T} \qquad \boxed{\frac{\partial T}{\partial x} = 0}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = A\gamma\rho^{\gamma-1}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \gamma R_* T \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \gamma R_* T \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \gamma R_* \cancel{\frac{\partial T}{\partial x}} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Modèle 2 :
Ecoulement adiabatique :-)

$$\boxed{p = \rho R_* T} \quad \boxed{\frac{\partial T}{\partial x} = 0}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \gamma R_* T \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

$\Downarrow$

La vitesse du son ainsi prédite correspond bien aux valeurs mesurées expérimentalement ...

$$c = \sqrt{\gamma R_* T} = 342 [m/s]$$