

Physique des fluides (PHY1352)

Année académique 2009-2010

Enseignants: *Eric Deleersnijder*

Chercheur qualifié FNRS et Professeur à l'UCL

Bureau a113, bâtiment Euler, 4 avenue G. Lemaître, Louvain-la-Neuve

E-mail: eric.deleersnijder@uclouvain.be

Web: <http://www.ericd.be>

Vincent Legat

Professeur à l'UCL

Bureau a216, bâtiment Euler, 4 avenue G. Lemaître, Louvain-la-Neuve

E-mail: vincent.legat@uclouvain.be

Web: <http://www.uclouvain.be/perso/vincent.legat>

Assistant: *Sylvain Bouillon*

Assistant UCL

Bureau b502, bâtiment de Hemptinne, 2 Chemin du Cyclotron, Louvain-la-Neuve

E-mail: sylvain.bouillon@uclouvain.be

Quand:

Premier quadrimestre de l'année académique 2009-2010

Judi: 10H45 à 12H45 / Vendredi: 14H00 à 16H00

Où: Auditoire a207, 2ème étage, bâtiment Euler, 4 avenue G. Lemaître, Louvain-la-Neuve

Ouvrage de référence:

Kundu P.K. and I.M. Cohen, 2004 (3rd ed.), *Fluid Mechanics*, Academic Press, 759 pp.

(Ouvrage disponible aux bibliothèques ASTR¹ et CESAME²)

Table des matières:

Voir ci-après.

Examen:

Examen oral avec préparation écrite, qui comportera une question de synthèse sur la théorie, des problèmes puisés dans la liste ci-après et des problèmes nouveaux.

¹ Contact: Nicole Depoorter (courriel: Nicole.Depoorter@uclouvain.be; tél.: 010.47.32.97)

² Contact: Astrid Leduc (courriel: astrid.leduc@uclouvain.be; tél.: 010.47.23.50)

TABLE DES MATIERES

I. Equations de base

1. Modèle continu de la matière
2. Lois de conservation et de comportement

II. Ecoulements incompressibles

3. Modèle du fluide visqueux Newtonien - Adimensionnalisation
4. Ecoulement et transfert de chaleur établis
3. Ecoulements avec deux échelles spatiales: lubrification - équations de Reynolds
4. Ecoulements avec deux échelles spatiales: couche limite - équations de Prandtl
5. Ecoulements avec deux échelles spatiales: convection naturelle
6. Transfert de masse: mélange, loi de Fick

III. Ecoulements compressibles

7. Ondes acoustiques
8. Chocs et effets non-linéaires

IV. Ecoulements géophysiques

9. Référentiel mobile
10. Notions de turbulence
11. Equations de la géohydrodynamique
12. Equilibre géostrophique
13. Oscillations d'inertie
14. Couche d'Ekman
15. Equations des eaux peu profondes
16. Ondes de Poincaré et de Kelvin

FORMULAIRE

1. Vecteurs et tenseurs

Coordonnées cartésiennes: x_1, x_2, x_3

Vecteurs de la base orthonormée associée: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, avec $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1$

Composantes du vecteur \mathbf{a} : $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$

Norme du vecteur \mathbf{a} : $|\mathbf{a}| = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2}$

Produit scalaire des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Produit vectoriel des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3$$

Double produit vectoriel: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

Produits scalaire et vectoriel: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

Tenseur \mathbf{A} : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix}$ (matrice associée au tenseur)

Produits scalaires entre le vecteur \mathbf{a} et le tenseur \mathbf{A} :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i A_{i,j} \mathbf{e}_j \quad \text{ou} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{i,j} a_j \mathbf{e}_i$$

Produit "tensoriel" entre les vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} : $\mathbf{a}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$

Produits tensoriel et scalaire: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}\mathbf{c})$

Double produit scalaire entre les tenseurs \mathbf{A} et \mathbf{B} : $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{i,j} B_{i,j}$

2. Opérateurs différentiels en coordonnées cartésiennes

Divergence du vecteur \mathbf{a} : $\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$

Divergence du tenseur \mathbf{A} : $\nabla \cdot \mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_{i,j}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i$

Divergence du produit tensoriel \mathbf{ab} : $\nabla \cdot (\mathbf{ab}) = (\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} + (\nabla \mathbf{a})\mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (a_i b_j) \mathbf{e}_i$

Gradient du scalaire c : $\nabla c = \frac{\partial c}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial c}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial c}{\partial x_3} \mathbf{e}_3$

Gradient du vecteur \mathbf{a} : $\nabla \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ (matrice associée au tenseur)

Rotationnel du vecteur \mathbf{a} : $\nabla \times \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3$

Laplacien du scalaire c : $\nabla^2 c = \frac{\partial^2 c}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x_3^2}$

Laplacien du vecteur \mathbf{a} : $\nabla^2 \mathbf{a} = (\nabla^2 a_1) \mathbf{e}_1 + (\nabla^2 a_2) \mathbf{e}_2 + (\nabla^2 a_3) \mathbf{e}_3 = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$

Quelques formules utiles:

$$\nabla \times \nabla c = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$$

$$\nabla \cdot (c\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \nabla c + c \nabla \cdot \mathbf{a}$$

$$\nabla \times (c\mathbf{a}) = \nabla c \times \mathbf{a} + c \nabla \times \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} = a_1 \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b}$$

Vecteur position (en 3 dimensions): $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$

$$\nabla \cdot \mathbf{x} = 3, \quad \nabla \times \mathbf{x} = 0, \quad \nabla \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{2}{|\mathbf{x}|}$$

3. Intégrales

V : volume limité par la surface S , de normale extérieure unitaire \mathbf{n} ($|\mathbf{n}|=1$); t : temps;

\mathbf{u}^S : vitesse des points de la surface S

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} \, dV = \int_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{a} \, dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{a} \, dS$$

$$\begin{aligned}\int_V \nabla c \, dV &= \int_S c \mathbf{n} \, dS \\ \frac{d}{dt} \int_V c \, dV &= \int_V \frac{\partial c}{\partial t} \, dV + \int_S c \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n} \, dS \\ \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{a} \, dV &= \int_V \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \, dV + \int_S \mathbf{a} (\mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}) \, dS\end{aligned}$$

4. Coordonnées curvilignes orthogonales

Coordonnées cartésiennes: (x_1, x_2, x_3) ; vecteurs orthonormés associés: $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

Coordonnées curvilignes orthogonales: $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$; vecteurs orthonormés associés: $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$

Coefficients métriques: (h_1, h_2, h_3) , avec $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tilde{x}_i} = h_i \tilde{\mathbf{e}}_i \quad (i = 1, 2, 3)$

Composantes d'un vecteur:

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 = \tilde{a}_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{a}_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{a}_3 \tilde{\mathbf{e}}_3, \quad (a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i, \quad \tilde{a}_i = \mathbf{a} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i, \quad i = 1, 2, 3)$$

$$\text{Gradient: } \nabla c = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_1}{h_1} \frac{\partial c}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{\tilde{\mathbf{e}}_2}{h_2} \frac{\partial c}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\tilde{\mathbf{e}}_3}{h_3} \frac{\partial c}{\partial \tilde{x}_3}$$

$$\text{Divergence: } \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} (h_2 h_3 \tilde{a}_1) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} (h_3 h_1 \tilde{a}_2) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} (h_1 h_2 \tilde{a}_3) \right]$$

Rotationnel:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_3 \tilde{a}_3)}{\partial \tilde{x}_2} - \frac{\partial (h_2 \tilde{a}_2)}{\partial \tilde{x}_3} \right] + \frac{\tilde{\mathbf{e}}_2}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial (h_1 \tilde{a}_1)}{\partial \tilde{x}_3} - \frac{\partial (h_3 \tilde{a}_3)}{\partial \tilde{x}_1} \right] + \frac{\tilde{\mathbf{e}}_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (h_2 \tilde{a}_2)}{\partial \tilde{x}_1} - \frac{\partial (h_1 \tilde{a}_1)}{\partial \tilde{x}_2} \right]$$

$$\text{Laplacien: } \nabla^2 c = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial c}{\partial \tilde{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial c}{\partial \tilde{x}_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial c}{\partial \tilde{x}_3} \right) \right]$$

Coordonnées cylindriques:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = \xi$$

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\xi = \mathbf{e}_z$$

$$h_r = 1, \quad h_\varphi = r, \quad h_\xi = 1$$

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi + a_\xi \mathbf{e}_\xi$$

$$\nabla c = \mathbf{e}_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \frac{\partial c}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\xi \frac{\partial c}{\partial \xi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_\xi}{\partial \xi}$$

$$\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{e}_r \left[\frac{1}{r} \frac{\partial a_\xi}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial \xi} \right] + \mathbf{e}_\varphi \left[\frac{\partial a_r}{\partial \xi} - \frac{\partial a_\xi}{\partial r} \right] + \mathbf{e}_\xi \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (ra_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right]$$

$$\nabla^2 c = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2}$$

Coordonnées sphériques “géographiques” (rayon - longitude - latitude):

$$x = r \cos \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \cos \theta, \quad z = r \sin \theta$$

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \varphi \cos \theta \mathbf{e}_y + \sin \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\cos \varphi \sin \theta \mathbf{e}_x + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z$$

$$h_r = 1, \quad h_\varphi = r \cos \theta, \quad h_\theta = r$$

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi + a_\theta \mathbf{e}_\theta$$

$$\nabla c = \mathbf{e}_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial c}{\partial \varphi} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta a_\theta)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{a} = & \frac{\mathbf{e}_r}{r \cos \theta} \left[\frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta a_\varphi) \right] \\ & + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \left[\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{\partial (ra_\theta)}{\partial r} \right] + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \left[\frac{\partial (ra_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right] \end{aligned}$$

$$\nabla^2 c = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right)$$

Problèmes susceptibles d'être posés à l'examen

1. Dans l'océan mondial, le processus auquel est associée la plus petite échelle de longueur est la dissipation visqueuse d'énergie cinétique turbulente. La longueur caractéristique associée est de l'ordre d'un millimètre. On considère que l'échelle microscopique maximale est de l'ordre de la distance moyenne entre les molécules d'eau. Sachant que le volume de l'océan mondial est de l'ordre de $1.4 \times 10^{18} \text{ m}^3$ et que ce dernier contient environ 5×10^{46} molécules d'eau, vérifier l'hypothèse de séparation nette des échelles de longueur microscopiques et macroscopiques.

2. On peut estimer la puissance d'une éolienne par une formule du type $k\rho^a S^b V^c$, où k , ρ , S et V désignent, respectivement, un coefficient adimensionnel dépendant de la forme des ailes, la masse volumique de l'air, la surface des ailes et la vitesse du vent. Déterminer la valeur des exposants a , b et c . Expliquer comment utiliser le résultat d'essais sur un modèle réduit placé dans une soufflerie.

3. On considère un corps solide de volume V dont la conductivité thermique λ est une constante positive dont la valeur se mesure en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$. On immerge complètement le corps étudié dans un liquide dont la température est constante — dans l'espace et le temps. Au moment de l'immersion, la température du solide étudié était homogène et inférieure à celle du liquide. Après un temps T , la température du centre de gravité du solide s'est élevée d'une quantité $\Delta\theta$. On répète cette expérience avec un autre solide qui a la même forme que le premier mais dont le volume V' et la conductivité thermique λ' sont différents de ceux qui caractérisent le premier corps. On demande d'évaluer le temps nécessaire à ce que la température du centre de gravité du second solide s'élève de $\Delta\theta$. On traitera ce problème sans faire d'hypothèse simplificatrice quant à la forme des corps étudiés. Ainsi, par exemple, on ne supposera pas qu'il s'agit de sphères ou de cubes.

4. Donner la dimension des expressions suivantes impliquant la fonction $f(s)$:

$$\frac{df}{ds}, \frac{d^2f}{ds^2}, \frac{d^k f}{ds^k}, \int_{s_1}^{s_2} f(s) ds, \int_{s_1}^{s_2} s^4 f(s) ds.$$

On notera $[f]$ et $[s]$ la dimension de f et celle de s .

5. On souhaite étudier la propagation dans la Mer du Nord de la marée semi-diurne lunaire, dont la période vaut environ 12 heures et 25 minutes. Pour ce faire, on utilise les équations de la mécanique des fluides géophysiques. Une première analyse des équations de bilan de quantité de mouvement horizontale révèle que l'accélération de Coriolis devrait faire partie des termes dominants. Celle-ci s'écrit $f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}$, où f , \mathbf{e}_z et \mathbf{u} dénotent respectivement le facteur de Coriolis ($\approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$), le vecteur unitaire vertical pointant vers le haut et la vitesse horizontale. L'accélération $\partial \mathbf{u} / \partial t$ est-elle susceptible de faire partie des termes dominants des équations de bilan de quantité de mouvement horizontale? Justifier votre réponse.

6. Dans un problème de mécanique des fluides, on est amené à considérer la quantité ψ qui est fonction du temps, t , et des trois coordonnées spatiales cartésiennes, x , y et z . La géométrie du

problème est telle qu'il est préférable d'effectuer une transformation de coordonnées. C'est ainsi que l'on est amené à exprimer la grandeur ψ comme une fonction des nouvelles variables indépendantes, qui sont définies par

$$(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = [t, x, y, z/Z(t)] .$$

On considère les expressions suivantes:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{t}}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{Z} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{z}} .$$

Parmi les 4 relations ci-dessus, lesquelles sont correctes? Justifier votre réponse!

7. On mesure souvent des grandeurs utiles à la compréhension des processus atmosphériques à l'aide d'instruments fixés à un mât attaché à un avion. On considère un avion de ce type qui se déplace selon une trajectoire rectiligne horizontale à la vitesse de 360 km/heure par rapport au sol. L'avion traverse un front dans lequel la température, qui ne dépend pas du temps, varie de 1 °C par 100 km selon l'horizontale. L'angle entre le gradient horizontal de température et la vitesse de l'avion est de 60 degrés — de sorte que l'avion enregistre des températures croissantes à mesure que le temps s'écoule. A l'instant initial, la température au point où se situe l'avion est de 15 °C. Faire un schéma indiquant les isothermes et la trajectoire de l'avion. Evaluer le taux de variation temporelle de la température mesuré par l'avion. Calculer la température enregistrée par l'avion 30 minutes après le début des mesures, sachant que le cap et la vitesse de l'avion restent inchangés durant la période concernée.

8. Expliquer pourquoi la dérivée matérielle du vecteur-position est égale à la vitesse du fluide. Expliquer pourquoi la dérivée matérielle d'une grandeur stationnaire — c'est-à-dire indépendante du temps — n'est pas nécessairement nulle.

9. L'expression

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{u}(\theta, \mathbf{r}_0) d\theta$$

permet de construire la trajectoire $\mathbf{r}(t)$ de la particule située au point \mathbf{r}_0 en $t=0$ si la vitesse du fluide, $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, est spatialement homogène. Expliquer pourquoi il en est ainsi.

10. Soient t, x et y le temps et deux coordonnées cartésiennes. La vitesse d'un fluide vaut

$$\mathbf{u} = a y \mathbf{e}_x - a(x - bt) \mathbf{e}_y$$

Déterminer la dimension des constantes a et b . Montrer que la trajectoire d'une particule fluide appartient à la famille des cycloïdes, tandis que les lignes de courant sont des cercles.

11. Les composantes de la vitesse horizontale associée à la composante de marée dont la fréquence angulaire est ω sont généralement de la forme

$$u(t, x, y) = U(x, y) \sin[\omega t + \varphi(x, y)] ,$$

$$v(t, x, y) = V(x, y) \cos[\omega t + \gamma(x, y)] ,$$

où U et V représentent les amplitudes des composantes de la vitesse, ω est la fréquence angulaire tandis que φ et γ sont les phases correspondantes. Déterminer la période de la composante de marée étudiée. La moyenne sur une période de la vitesse est évidemment nulle en chaque point. Toutefois, la trajectoire d'une particule fluide n'est généralement pas une

courbe fermée. Expliquer la raison de ce phénomène. Calculer la trajectoire d'une particule fluide qui se situe au point de coordonnées (0,0) en $t=0$, si $\varphi=0=\gamma$, $U = a + by$, et $V=\text{const.}$ Spéculer sur la possibilité pour l'écoulement considéré de transporter sur de grandes distances des particules de substances polluantes en dépit du fait que sa vitesse moyenne est nulle.

12. Pour étudier des écoulements marins, on peut travailler dans le système de coordonnées spatio-temporelles (t, x, y, z) où t désigne le temps tandis que x , y et z sont des coordonnées cartésiennes, z étant la coordonnée verticale — qui croît vers le haut. L'interface eau-air est situé à la distance $\eta(t, x, y)$ du plan de référence horizontal défini par la relation $z=0$. Le fond de la mer est une surface dont l'équation est $z = -h(x, y)$. La surface et le fond sont imperméables. Expliquer pourquoi les conditions d'imperméabilité de la surface et du fond peuvent s'exprimer sous la forme

$$[D_t(z - \eta)]_{z=\eta} = 0 \quad \text{et} \quad [D_t(z + h)]_{z=-h} = 0 ,$$

où l'opérateur différentiel D_t est la dérivée matérielle, c'est-à-dire

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} ,$$

où u , v et w désignent les composantes de la vitesse selon les axes x , y et z . Il est parfois avantageux d'introduire les nouvelles coordonnées,

$$(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = [t, x, y, (z + h)/(\eta + h)] ,$$

ainsi qu'une “vitesse verticale alternative”, qui vaut $\tilde{w} = D_t \tilde{z}$. Déterminer la signification physique de la nouvelle coordonnée verticale \tilde{z} . Vérifier l'égalité suivante:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + u \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + v \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} .$$

Montrer qu'en utilisant les nouvelles variables, les conditions d'imperméabilité se simplifient en

$$[\tilde{w}]_{\tilde{z}=0} = 0 \quad \text{et} \quad [\tilde{w}]_{\tilde{z}=1} = 0 .$$

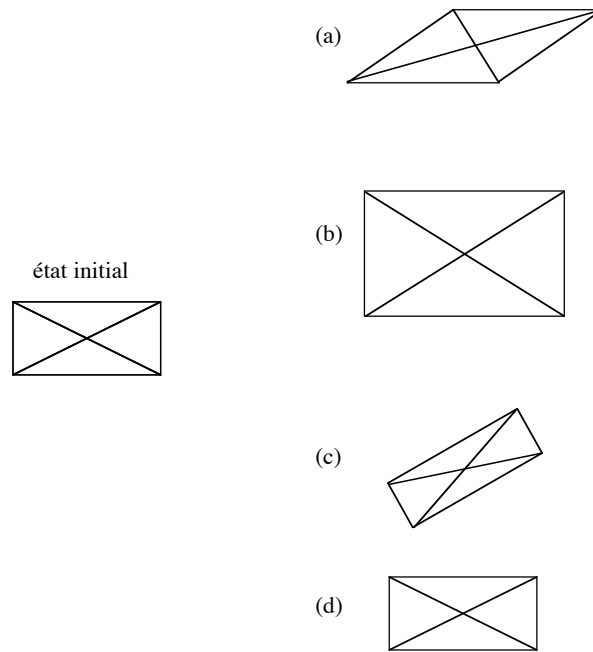
Montrer que, dans un écoulement pour lequel la “vitesse verticale alternative” est nulle à tout instant et en tout point, une particule fluide initialement située à mi-hauteur restera au cours de ses déplacements à mi-hauteur de la colonne d'eau. Généraliser ce dernier résultat!

13. On étudie un écoulement dans lequel la trajectoire de toute particule fluide est donnée par

$$\mathbf{r}(t) = r_{x,0} e^{kt} \mathbf{e}_x + r_{y,0} e^{-kt} \mathbf{e}_y ,$$

où $r_{x,0}$ et $r_{y,0}$ sont des constantes dont la valeur permet d'identifier chaque particule fluide. Donner la signification physique de $r_{x,0}$ et $r_{y,0}$. Montrer que le champ de vitesse correspondant est $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = kx\mathbf{e}_x - ky\mathbf{e}_y$. Montrer que les trajectoires sont des branches d'hyperbole. Qu'en est-il des lignes de courant?

14. On considère 4 particules fluides, qui sont situées à l'état initial aux sommets d'un rectangle. Ces particules sont transportées par un écoulement plan, de sorte que le rectangle se transforme en une des formes géométriques identifiées ci-dessous par (a), (b), (c) ou (d), selon les caractéristiques de l'écoulement considéré. Déterminer quels processus — parmi translation, rotation, dilatation, ou déformation à volume constant — sont présents dans chacun des écoulements considérés.



15. On considère un écoulement dont le quotient d'aspect est très petit — le quotient d'aspect étant le quotient de l'échelle de longueur verticale et de l'échelle de longueur horizontale. L'approximation de Boussinesq s'applique. Expliquer pourquoi, dans un tel écoulement, la vitesse verticale est sans doute beaucoup plus petite que la vitesse horizontale.

16. On peut écrire l'équation de continuité sous la forme

$$D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 ,$$

où ρ est la masse volumique du fluide et \mathbf{u} sa vitesse; D_t symbolise la dérivée matérielle. Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, l'équation de continuité est réduite à la forme approximative

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 .$$

Cette approche implique-t-elle que la dérivée matérielle de la masse volumique doive être nécessairement nulle?

17. On considère l'écoulement plan dont la vitesse est

$$\mathbf{u}(x,y) = U \mathbf{e}_x + \frac{UR^2}{(x^2 + y^2)^2} [(y^2 - x^2) \mathbf{e}_x - 2xy \mathbf{e}_y]$$

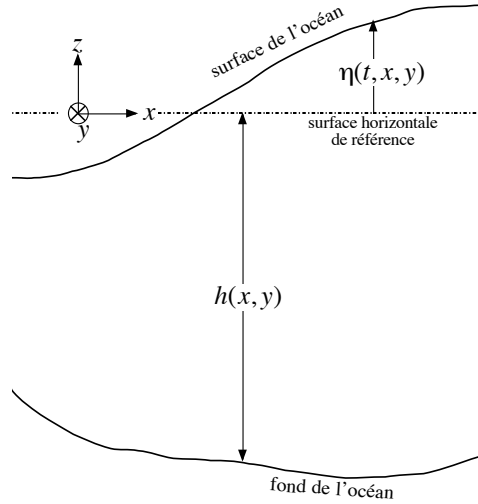
où U est une échelle de vitesse, tandis que x et y sont des coordonnées cartésiennes. Montrer que le cercle de rayon R dont le centre est situé au point $(x,y) = (0,0)$ est imperméable.

18. Si x et y sont des coordonnées horizontales, on définit généralement la profondeur $h(x,y)$ de l'océan comme la distance séparant le fond de l'océan d'une surface de référence considérée comme "horizontale" qui correspond à peu près à la position moyenne de la surface de l'océan et dont l'équation est $z=0$ — z étant une coordonnée verticale appropriée, qui croît vers le haut. L'interface océan-atmosphère est une surface libre dont l'équation est $\eta(t,x,y) - z = 0$. La hauteur d'une colonne d'eau est donc $H = h + \eta$. Montrer que les conditions d'imperméabilité de la surface et du fond de l'océan s'écrivent

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - w \right]_{z=\eta} = 0 ,$$

$$\left[u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w \right]_{z=-h} = 0 ,$$

où u , v et w représentent les composantes de la vitesses associées aux coordonnées x , y et z . On peut écrire ces relations sous la forme $[D_t(\eta - z)]_{z=\eta} = 0$ et $[D_t(h + z)]_{z=-h} = 0$, où l'opérateur D_t est la dérivée matérielle. Interpréter ceci physiquement.



19. On étudie — en utilisant les notations du problèmes (14) — un écoulement océanique pour lequel on peut négliger les variations spatio-temporelles de la masse volumique de l'eau. La moyenne sur la verticale des deux composantes horizontales de la vitesse s'écrit

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} (u, v) dz .$$

On intègre l'équation de continuité sur la hauteur d'une colonne d'eau. On utilise les conditions d'imperméabilité de la surface et du fond de l'océan. Montrer que l'on obtient finalement

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial (H\bar{u})}{\partial x} - \frac{\partial (H\bar{v})}{\partial y} .$$

Proposer une interprétation physique de cette relation.

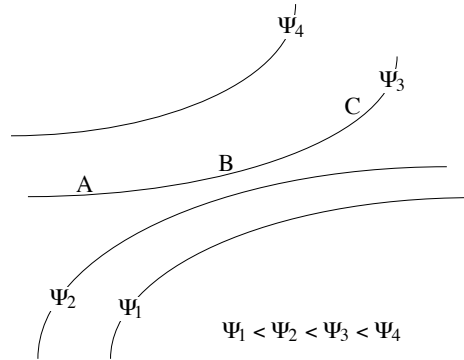
20. Montrer que la fonction de courant est constante sur la frontière d'un obstacle imperméable.

21. On considère l'écoulement décrit par la fonction de courant suivante:

$$\Psi(x, y) = \frac{y - h^-(x)}{h^+(x) - h^-(x)} \Phi ,$$

où Φ est une constante positive; les fonctions $h^+(x)$ et $h^-(x)$ satisfont l'inégalité $h^-(x) < h^+(x)$ pour tout x . Montrer que les courbes $y - h^+(x) = 0$ et $y - h^-(x) = 0$ sont imperméables. Calculer la trajectoire de la particule fluide, qui est située à l'instant $t=0$ au point de coordonnées $(x, y) = \{x_0, [h^-(x_0) + h^+(x_0)]/2\}$.

22. La figure ci-dessous illustre quelques iso-lignes de la fonction de courant associée à un écoulement plan à divergence nulle. Esquisser le vecteur vitesse aux points identifiés par les lettres A, B et C.

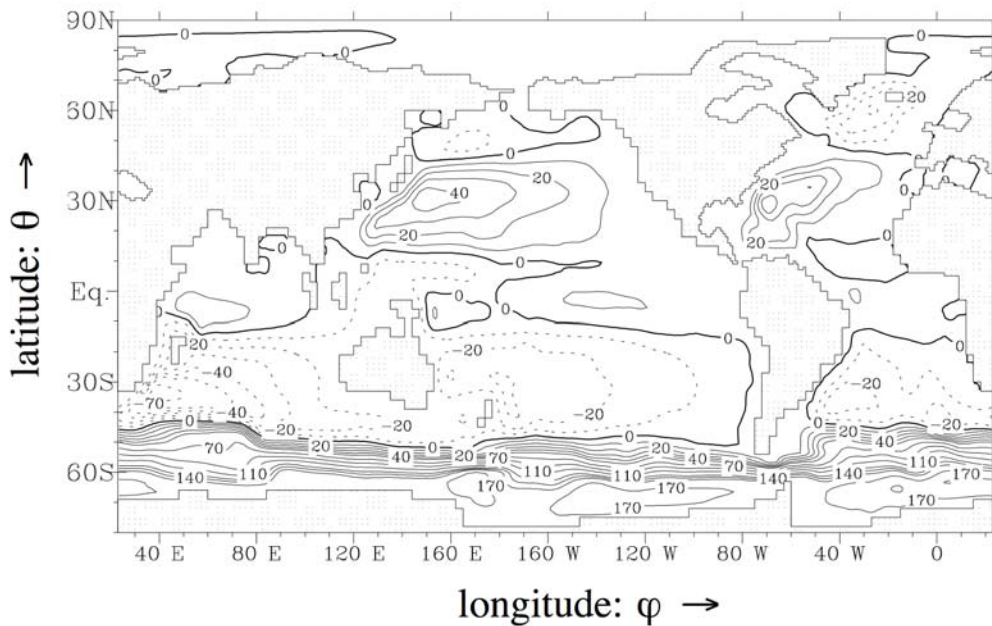


23. Montrer que le débit volumique traversant toute courbe joignant deux points d'un écoulement plan à masse volumique constante vaut la différence entre les valeurs de la fonction de courant aux points concernés. Expliquer pourquoi le débit ainsi calculé s'exprime en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ et non en $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$.

24. On considère la circulation générale de l'océan mondial, qui est, en première approximation, stationnaire. La divergence du transport barotrope — l'intégrale sur la hauteur de la colonne d'eau de la vitesse horizontale — est nulle pour un tel écoulement. La composante zonale, U_b , et la composante méridienne, V_b , sont positives si le transport correspondant est dirigé, respectivement, vers l'est et vers le nord. Les composantes de ce transport vérifient l'équation de continuité

$$\frac{\partial U_b}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \theta}(V_b \cos \theta) = 0 ,$$

où φ et θ désignent, respectivement, la longitude et la latitude.



Montrer que l'on peut représenter le transport à l'aide de la fonction de courant barotrope, $\Psi_b(\varphi, \theta)$, qui est telle que

$$(U_b, V_b) = \frac{1}{R} \left(-\frac{\partial \Psi_b}{\partial \theta}, \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \Psi_b}{\partial \varphi} \right),$$

où R est le rayon de la Terre. Dans la figure ci-dessus, qui représente des iso-lignes de la fonction de courant barotrope simulée dans l'océan mondial à l'aide du modèle numérique, avec des valeurs de Ψ_b exprimées en $10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, indiquer la direction du transport en quelques points bien choisis des grands bassins océaniques. Evaluer le flux d'eau traversant le Passage de Drake — qui sépare l'Antarctique de l'Amérique du Sud.

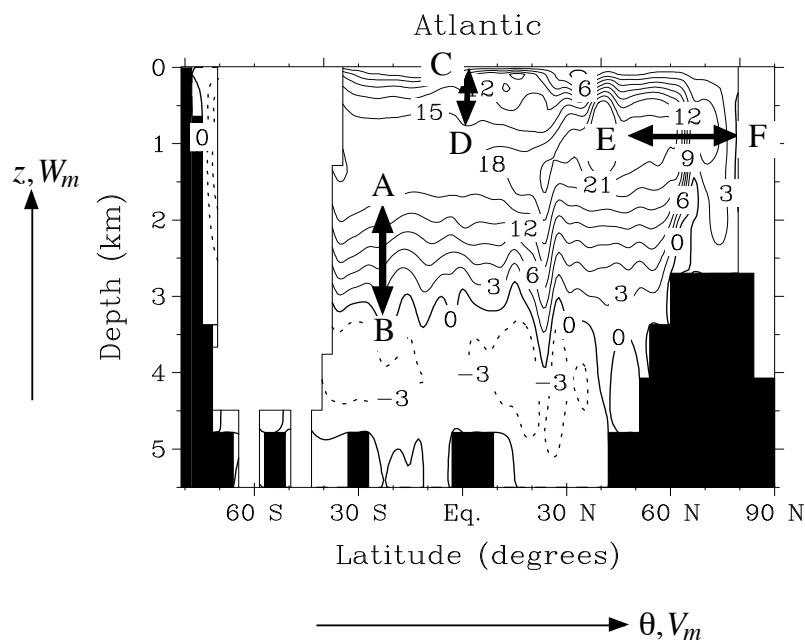
25. L'intégration dans la direction zonale — selon la longitude — de la vitesse de l'eau dans l'océan mondial conduit au transport méridien, qui est, en première approximation, stationnaire. La composante méridienne, V_m , et la composante verticale, W_m , est positive quand le transport correspondant est orienté, respectivement, vers le nord et le haut. Si z désigne la coordonnée verticale, qui croît vers le haut, l'équation de continuité satisfaite par le transport méridien est

$$\frac{1}{R} \frac{\partial V_m}{\partial \theta} + \frac{\partial W_m}{\partial z} = 0,$$

où R est le rayon de la Terre. Montrer que l'on peut représenter le transport méridien à l'aide de la fonction de courant méridienne, $\Psi_m(\theta, z)$, qui est telle que

$$(V_m, W_m) = \left(-\frac{\partial \Psi_m}{\partial z}, \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_m}{\partial \theta} \right).$$

Cette fonction de courant est généralement calculée de telle sorte qu'elle soit nulle à l'interface océan-atmosphère et au fond de l'océan. Dans la figure ci-dessous, qui représente des iso-lignes de la fonction de courant méridienne simulée dans l'Atlantique à l'aide d'un modèle numérique, avec des valeurs de Ψ_m exprimées en $10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, indiquer la direction du transport en quelques points bien choisis du domaine d'intérêt. Estimer le flux d'eau traversant les sections AB, CD et EF. Expliquer pourquoi la notion de fonction de courant méridienne perd largement de sa pertinence pour des latitudes inférieures à 40° S .



26. On considère un écoulement plan dans lequel on place une source ponctuelle de fluide. Le débit de celle-ci vaut Q . On la place au point de coordonnées $(x,y)=(x_s,y_s)$. La source engendre le champ de vitesse

$$[u_s(x,y), v_s(x,y)] = \frac{Q}{2\pi} \frac{(x-x_s, y-y_s)}{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2}.$$

Montrer que la fonction de courant permettant de représenter ce champ de vitesse est

$$\Psi(x,y) = \frac{Q}{2\pi} \arg(x-x_s, y-y_s).$$

Discuter les difficultés mathématiques — singularité et discontinuité — de cette fonction de courant.

27. On considère un écoulement à vitesse constante, U , dans une mer semi-infinie définie par $-\infty < x < \infty$ et $y > 0$, la côte étant située en $y=0$. Cet écoulement est perturbé par une usine qui pompe de l'eau au point $(-L,0)$ et rejette des eaux usées au point $(+L,0)$. Le débit pompé, P , est égal au débit rejeté. En supposant que l'écoulement peut être représenté comme un écoulement plan résultant de la somme d'un courant stationnaire parallèle à la côte de vitesse U et de champs de vitesse similaires à celui du problème (26), évaluer le débit maximum que l'usine peut prélever en évitant d'absorber des eaux usées au point de pompage. Discuter le raisonnement exposé ici à l'aune du principe dit "pollueur = payeur"...

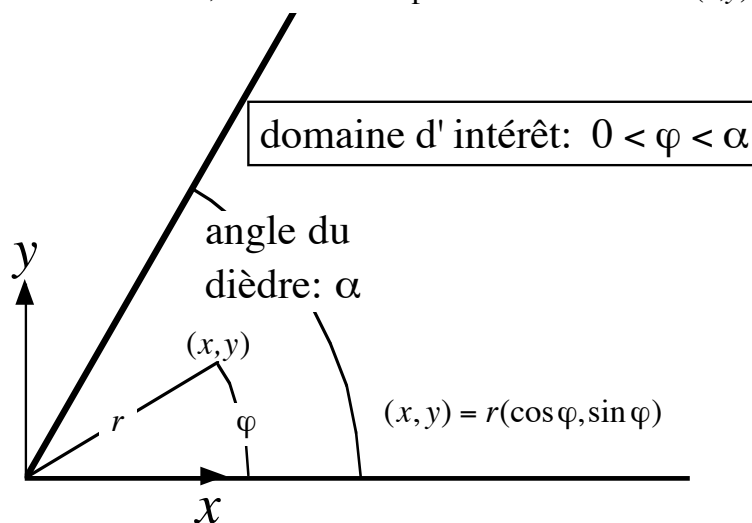
28. La fonction de courant de l'écoulement plan, indurgentiel et irrotationnel dans un dièdre (voir figure ci-dessous) imperméable d'ouverture α s'écrit en coordonnées polaires (r,φ) comme suit:

$$\Psi(r,\varphi) = Cr^{\pi/\alpha} \sin \frac{\pi\varphi}{\alpha},$$

où C est une constante. La vitesse correspondante vaut

$$\mathbf{u}(r,\varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi,$$

avec $\mathbf{e}_r = \cos\varphi \mathbf{e}_x + \sin\varphi \mathbf{e}_y$ et $\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi \mathbf{e}_x + \cos\varphi \mathbf{e}_y$. Vérifier l'imperméabilité du dièdre. Montrer que le rotationnel de la vitesse est effectivement nul. Evaluer, en fonction de l'angle α , la vitesse au sommet du dièdre, c'est-à-dire au point de coordonnées $(x,y)=(0,0)$.



29. On considère le champ de vitesse $\mathbf{u}(x,y)$ dans le domaine $x \in [-L,+L]$ et $y \in [-L,+L]$, où $L>0$. On souhaite extraire la partie non-divergente de la vitesse \mathbf{u} , que l'on exprime à l'aide de la fonction de courant $\Psi(x,y)$. On impose que cette vitesse indivergentielle ne traverse pas la frontière du domaine et on souhaite qu'elle minimise l'intégrale

$$J = \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} |\nabla \times \Psi \mathbf{e}_z - \mathbf{u}|^2 dx dy .$$

Expliquer ce que représente l'intégrale ci-dessus. Montrer que la fonction de courant doit satisfaire l'équation différentielle suivante:

$$\nabla^2 \Psi = - (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_z .$$

Interpréter physiquement ce résultat. En utilisant la méthode variationnelle exposée ci-avant, déterminer la partie indivergentielle des champs de vitesse $U\mathbf{e}_x$, $U[(x/L)\mathbf{e}_x + (y/L)\mathbf{e}_y]$, et $U[(y/L)\mathbf{e}_x - (x/L)\mathbf{e}_y]$.

30. On étudie la distribution stationnaire d'un traceur radioactif dans un écoulement stationnaire non-diffusif. La concentration $C(\mathbf{x})$ du traceur obéit à l'équation $\mathbf{u} \cdot \nabla C + \gamma C = 0$, où γ est une constante positive. Evaluer la demi-vie du traceur radioactif étudié. Montrer que la concentration du traceur est donnée par $C(\mathbf{x}) = C_0 \exp[-\gamma \tau(\mathbf{x})]$. Donner la signification physique de la constante positive C_0 et de la variable $\tau(\mathbf{x})$, sachant que cette dernière est régie par l'équation $\mathbf{u} \cdot \nabla \tau - 1 = 0$.

31. Soit un écoulement unidimensionnel dans lequel la concentration $C(t,x)$ d'un traceur passif obéit à l'équation d'advection-diffusion

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = q(t) \delta(x-0) + K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} ,$$

où U est la vitesse du fluide; $K (>0)$ est la diffusivité constante du traceur; $q(t)$ est le taux de rejet d'une source de traceur située au point $x=0$, δ désignant la fonction de Dirac. Le domaine d'intérêt est dépourvu de frontière: $-\infty < x < +\infty$. Si la concentration du traceur est nulle à l'instant initial et si $q(t) = \delta(t-0)$, montrer que la concentration vaut

$$C(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Kt}} \exp \frac{-(x-Ut)^2}{4Kt} .$$

Montrer que la solution pour une source quelconque s'écrit

$$C(t,x) = \int_0^t \frac{q(t-\theta)}{\sqrt{4\pi K\theta}} \exp \frac{-(x-U\theta)^2}{4K\theta} d\theta .$$

Que deviennent les résultats ci-dessus si la source est située au point $x = x_0$ au lieu de $x=0$? On pourrait devoir utiliser l'intégrale de Poisson, c'est-à-dire

$$\int_0^\infty e^{-a\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{4a}} \quad (a > 0) .$$

32. Soient t et \mathbf{x} le temps et le vecteur position. Le vecteur constant \mathbf{u} désigne la vitesse du fluide tandis que \mathbf{K} est le tenseur des diffusivités, qui est symétrique et défini positif. Si les composantes de \mathbf{K} sont des constantes, alors, dans un domaine d'intérêt infini, la concentration

$$C(t, \mathbf{x}) = \frac{\exp\left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{u}t) \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{u}t)}{4t}\right]}{(4\pi t)^{n/2} \sqrt{\det \mathbf{K}}}$$

est la solution du problème différentiel

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = \nabla \cdot (\mathbf{K} \cdot \nabla C) \\ [C(t, \mathbf{x})]_{t=0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{0}) \end{cases}$$

où δ est la fonction de Dirac tandis que l'entier n représente le nombre de dimensions de l'espace dans lequel le problème est posé. Si U et K sont des constantes strictement positives, utiliser les informations ci-dessus pour déterminer la fonction $\psi(x, y)$ qui est la solution de l'équation différentielle

$$U \frac{\partial \psi}{\partial x} = \delta(x - 0) \delta(y - 0) + K \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

dans le domaine infini $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$. Par ailleurs, dans le domaine semi-infini défini par les inégalités $-\infty < x < \infty, 0 < y < \infty$, on demande de déterminer la solution de l'équation

$$U \frac{\partial \psi}{\partial x} = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) + K \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

avec $y_0 > 0$, sachant que l'on impose la condition frontière suivante

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_{y=0} = 0.$$

33. Un liquide de masse volumique constante ρ est au repos dans un récipient. La pression atmosphérique p_a est constante sur l'interface liquide-atmosphère, dont l'aire est S . Sachant que le volume du liquide est V et que l'accélération de la pesanteur vaut g , établir la force que le liquide exerce sur les parois du récipient.

34. Deux observateurs, identifiés par les lettres "A" et "B", enregistrent le signal associé à une onde plane et déterminent respectivement les périodes T^A et T^B . A tout instant t , le vecteur-position des observateurs est $\mathbf{r}^A(t) = U t \mathbf{e}_x$ et $\mathbf{r}^B(t) = V t \mathbf{e}_y$, où U et V sont des vitesses constantes tandis que \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y sont des vecteurs unitaires orthogonaux. Un troisième observateur est immobile; la période du signal qu'il mesure vaut T^C . Déterminer la longueur d'onde du signal.

35. On considère un récipient cylindrique de section S dont le fond est plat et horizontal. Il contient un volume SH d'un liquide au repos dont la densité est constante. Donner la signification physique de la constante H . On perce ensuite un trou de section s dans le fond du récipient, ce qui engendre un écoulement que l'on peut considérer comme idéal. La pression dans le jet de liquide qui se développe sous le récipient est égale à la pression atmosphérique — qui est supposée constante dans le temps et l'espace. Si g dénote l'accélération de la pesanteur, montrer que le temps nécessaire à vider le récipient est approximativement égal à $[2HS^2/(gs^2)]^{1/2}$ dans l'hypothèse où $s \ll S$.

36. On considère la fonction $u(t,x)$ qui satisfait le problème différentiel suivant:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ,$$

$$[u(t,x)]_{x=0} = 0 \text{ et } [u(t,x)]_{t=0} = U ,$$

où les constantes U et V sont strictement positives. Proposer une interprétation physique de U et de V . Déterminer la valeur de $u(t,x)$ en tout point du domaine d'intérêt défini par les inégalités $0 \leq t < \infty$ et $0 \leq x \leq L$.

37. On note $\bar{\mathbf{v}}$ et $\tilde{\mathbf{v}}$ la partie moyenne et la partie fluctuante/turbulente de la vitesse d'un fluide en écoulement turbulent. Bien entendu, on a $\overline{\tilde{\mathbf{v}}} = 0$. On considère les paramétrisations suivantes:

$$\overline{\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}} = -\nu_t \nabla \mathbf{v} ,$$

$$\overline{\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}} = -\nu_t [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] ,$$

$$\overline{\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}} = -\nu_t [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] + \frac{2}{3} e \mathbf{I} ,$$

où ν_t et $e = \overline{\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}}/2$ représentent respectivement la viscosité cinématique turbulente et l'énergie cinétique turbulente; \mathbf{I} est le tenseur identité, de sorte que toutes ses composantes sont nulles, sauf celles appartenant à la diagonale principale, qui sont toutes égales à 1; le tenseur $(\nabla \mathbf{v})^T$ est le résultat de la transposition du tenseur $\nabla \mathbf{v}$. Dans quelles unités exprime-t-on ν_t et e ? Expliquer pourquoi 2 des 3 paramétrisations ci-dessus sont inacceptables.

38. On considère deux écoulements fluides, dont les paramètres sont identifiés par l'indice i ($i = 1, 2$). Le fluide i de masse volumique ρ_i et de viscosité dynamique μ_i s'écoule dans une conduite de section circulaire de rayon R_i . Le débit massique — qui s'exprime en kg s^{-1} — vaut Q_i . On a:

$$(\rho_1, \mu_1, R_1, Q_1) = 10 (\rho_2, \mu_2, R_2, Q_2) .$$

L'écoulement identifié par l'indice $i=1$ est turbulent. L'autre l'est-il aussi? Justifier

39. On considère une rivière qui connaît un écoulement turbulent. Si g , h et C_D symbolisent respectivement l'accélération de la pesanteur, la hauteur de la colonne d'eau, qui est supposée constante, et un coefficient — adimensionnel — de traînée approprié, expliquer pourquoi u , la moyenne sur la verticale de la vitesse de l'eau, peut obéir approximativement à l'équation $gh \sin \alpha = C_D |u| u$, où α représente l'angle mesurant l'inclinaison du lit de la rivière par rapport à l'horizontale. Montrer qu'il est possible d'estimer le débit de la rivière à partir d'une mesure de la hauteur d'eau.

40. Dans le domaine $0 \leq \xi \leq 1$, la fonction $\psi(\xi)$ est la solution du problème différentiel suivant:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \xi \frac{d\psi}{d\xi} - \psi = 0 \\ \psi(0) = 1 , \quad \psi(1) = 2 \end{cases} .$$

Déterminer le terme dominant de la solution asymptotique de ce problème pour $\varepsilon \rightarrow \infty$.

41. Une couche de liquide d'épaisseur constante h descend en régime stationnaire sous l'influence de la pesanteur sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. La masse volumique du liquide est supposée constante. L'angle α est défini de telle sorte qu'il serait nul si le plan était horizontal. A l'interface liquide-atmosphère, la pression atmosphérique est supposée constante et la tension tangentielle est négligeable. Montrer que la vitesse moyenne du liquide vaut $gh^2 \sin \alpha / (3\nu)$, où les constantes positives g et ν désignent l'accélération de la pesanteur et la viscosité cinématique du liquide. Etablir la relation entre le débit descendant la pente et la hauteur de la couche de liquide

42. Montrer que la surface d'un liquide de masse volumique constante placé dans un récipient cylindrique à fond plat de rayon R en rotation à vitesse angulaire constante ω autour de son axe de symétrie est un paraboloïde de révolution — une propriété qui est exploitée pour construire des télescopes à miroir liquide. Montrer que le volume de liquide présent dans le récipient doit être supérieur à $\pi\omega^2 R^4 / (4g)$ pour que la couche de liquide s'étende jusqu'au centre du récipient.

43. On se place dans l'océan. Donner l'ordre de grandeur, ou le range des ordres de grandeur, de la viscosité moléculaire et turbulente ainsi que de la diffusivité moléculaire et turbulente d'un traceur.

44. On considère un écoulement pour lequel l'approximation de Boussinesq, l'équilibre géostrophique et l'équilibre hydrostatique s'appliquent. Le facteur de Coriolis est supposé constant. Montrer que, dans cet écoulement, la variation verticale de la vitesse horizontale est due à la variation horizontale de la masse volumique.

45. On considère un écoulement marin stationnaire à masse volumique constante pour lequel l'équilibre géostrophique et l'équilibre hydrostatique s'appliquent. Le facteur de Coriolis est supposé constant. Le fond et la surface de la mer ne sont pas horizontaux. La pression à la surface de la mer est égale à la pression atmosphérique, qui est une constante. Montrer que la vitesse horizontale ne dépend pas de la coordonnée verticale. Montrer que la vitesse verticale est nulle. Montrer que la vitesse horizontale est parallèle aux iso-courbes de l'élévation de la surface et aux isobathes — c'est-à-dire les iso-courbes de la profondeur.

46. On étudie un écoulement marin qui est tel que la position d'une bouée est donnée à l'instant t par le vecteur horizontal

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}\sin(dt) + \mathbf{e}_z \times \mathbf{c}\cos(dt)$$

où \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} sont des vecteurs constants; \mathbf{e}_z est le vecteur unitaire vertical, qui pointe vers le haut; d est une constante scalaire. Montrer le mouvement de la bouée est susceptible d'être provoqué par des oscillations d'inertie en présence d'un courant géostrophique constant. Dans ce cas, donner l'interprétation physique de \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} et d .

47. Les équations les plus simples qui permettent de représenter avec un certain réalisme les marées et tempêtes sur le plateau continental nord-ouest européen (Mer du Nord, Mer d'Irlande, etc.) sont les équations des eaux peu profondes linéarisées:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \nabla \cdot (h\mathbf{u}) ,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -g \nabla \eta + \frac{\mathbf{t}^s - \mathbf{t}^f}{\rho h},$$

où les constantes positives f , g et ρ désignent le facteur de Coriolis, l'accélération de la pesanteur et la masse volumique de l'eau; \mathbf{e}_z est le vecteur unitaire vertical pointant vers le haut. Si t et \mathbf{x} représentent le temps et le vecteur position, les fonctions du temps et de la position $\eta(t, \mathbf{x})$ et $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ désignent respectivement l'élévation de la surface de la mer — par rapport à un niveau de référence horizontal — et la vitesse horizontale. Le vecteur horizontal $\mathbf{t}^s(t, \mathbf{x})$ est la tension que le vent applique à la surface de la mer, tandis que la tension de fond, \mathbf{t}^f , est paramétrisée par l'expression $\mathbf{t}^f = C_D |\mathbf{u}| \mathbf{u}$, où le coefficient de traînée C_D est une constante positive. La valeur approchée de la profondeur de la mer est $h(\mathbf{x})$. Une partie de la frontière du domaine d'intérêt, la côte européenne, est imperméable. Sur le reste de la frontière, on impose l'élévation — qui est une fonction du temps et de la position. On demande de montrer que l'élévation et le vecteur vitesse tendent à se comporter de façon indépendante des conditions initiales à mesure que le temps augmente. Il est utile de considérer 2 solutions, $[\eta^1(t, \mathbf{x}), \mathbf{u}^1(t, \mathbf{x})]$ et $[\eta^2(t, \mathbf{x}), \mathbf{u}^2(t, \mathbf{x})]$, qui satisfont les mêmes conditions aux limites mais des conditions initiales différentes; on montrera que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left[g(\eta^2 - \eta^1)^2 + h |\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1|^2 \right] d\mathbf{x} \leq 0,$$

où Ω représente le domaine d'intérêt. On pourra aussi invoquer le théorème suivant: si $\mu(\xi) \geq 0$ et $d\mu/d\xi > 0$, alors $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot [\mu(|\mathbf{b}|)\mathbf{b} - \mu(|\mathbf{a}|)\mathbf{a}] > 0$ si et seulement si $\mathbf{b} \neq \mathbf{a}$ et $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot [\mu(|\mathbf{b}|)\mathbf{b} - \mu(|\mathbf{a}|)\mathbf{a}] = 0$ si et seulement si $\mathbf{b} = \mathbf{a}$. Expliquer l'intérêt de la propriété de convergence obtenue ci-dessus pour la simulation numérique des marées et tempêtes sur le plateau continental nord-ouest européen.

48. Dans le domaine $-\infty < x < \infty$, on considère les équations linéarisées des eaux peu profondes adaptées à un problème à une dimension:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - fv &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu &= 0, \end{aligned}$$

où g , h et f sont des constantes positives. Donner la signification de ces constantes. Montrer que les équations ci-dessus admettent la propagation à la vitesse $\pm \sqrt{gh}$ d'une discontinuité de l'élévation η . Evaluer la discontinuité de la vitesse u associée à la discontinuité d'élévation. Montrer que la vitesse v reste continue.

49. On considère un canal à fond plat et surface libre. La largeur du canal vaut $l(x)$, où x est une coordonnée liée à l'axe de symétrie du canal. Dans le canal se trouve un liquide à masse volumique constante dont la vitesse longitudinale, u , ne dépend que de la coordonnée x . La hauteur d'eau vaut $H(x)$. Les effets de diffusivité moléculaire sont négligeables. Montrer que les équations de bilan de masse et de quantité de mouvement horizontale peuvent s'écrire

$$\frac{d}{dx}(lHu) = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u^2}{2} + gH \right) = 0 .$$

Etablir les relations suivantes:

$$\frac{1}{H} \frac{dH}{dx} = \frac{Fr^2}{1 - Fr^2} \frac{1}{l} \frac{dl}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{-1}{1 - Fr^2} \frac{1}{l} \frac{dl}{dx} ,$$

où Fr est le nombre de Froude, c'est-à-dire

$$Fr = \frac{|u|}{\sqrt{gH}} .$$

Existe-t-il, dans le cadre de l'écoulement considéré ici, une analogie entre le nombre de Froude et le nombre de Mach? Discuter de l'impact d'un rétrécissement du canal sur la vitesse du fluide.

50. On étudie un lac dont la longueur est tellement supérieure à la largeur qu'il peut être modélisé dans le cadre d'approximations uni-dimensionnelles. On suppose que la masse volumique de l'eau, ρ , est une constante. On fait alors l'hypothèse que les équations des eaux peu profondes suivantes suffisent à représenter approximativement la dynamique du lac:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 , \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau \cos(\omega t)}{\rho h} , \end{aligned}$$

où t représente le temps tandis que x est la coordonnée spatiale qui est telle que $0 \leq x \leq L$, L étant la longueur du lac; les constantes h , g et τ représentent respectivement la profondeur non-perturbée du lac, l'accélération gravitationnelle et l'amplitude de la tension éolienne, qui varie dans le temps avec une fréquence angulaire ω ; finalement, $\eta(t, x)$ et $u(t, x)$ désignent l'élévation de la surface du lac et la vitesse de l'eau. Comment imposer l'imperméabilité des extrémités du domaine d'intérêt? Quelles sont les valeurs de la fréquence angulaire ω qui sont susceptibles de conduire au phénomène de résonance? Pour répondre à cette dernière question, il faudra avoir recours à la série de Fourier suivante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \sin(k_n x) = 1$$

avec $\mu_n = 4/(k_n L)$ et $k_n = (2n - 1)\pi / L$.

51. On considère la houle comme une superposition d'ondes planes linéaires. Montrer que la relation de dispersion relative à la houle dans un océan infiniment profond de densité constante est $\omega^2 = g|\mathbf{k}|$, où ω , g et \mathbf{k} désignent respectivement la fréquence angulaire, l'accélération de la pesanteur et le vecteur-nombre d'onde horizontal. On montrera aussi que les composantes de la vitesse et la pression réduite décroissent exponentiellement à mesure que l'on s'éloigne de la surface de l'océan.
