(non)-établis, (in)-stationnaires

Ecoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants.

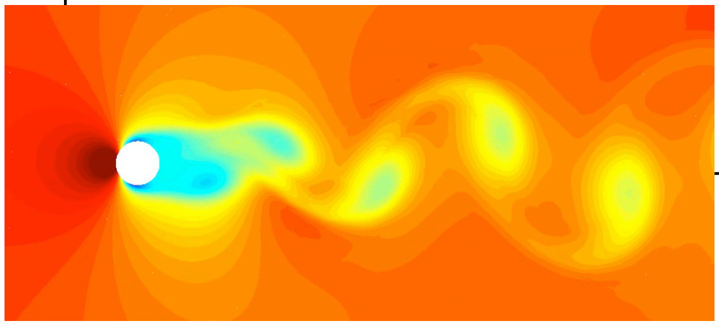
Les équations de continuité et de quantité de mouvement ne font pas intervenir la température : on peut résoudre la dynamique de l'écoulement sans tenir compte des aspects thermiques !

Etape 1

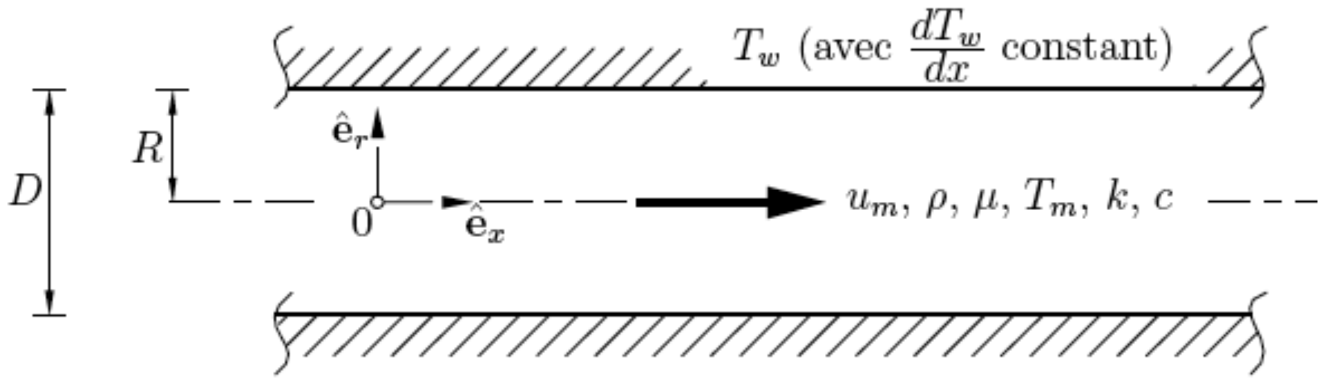
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0, \\
\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g},
\end{aligned}
$$

$$
\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k \boldsymbol{\nabla}^2 T,
$$

Etape 2



Une fois la dynamique de l'écoulement connue, on peut ensuite résoudre le problème thermique…

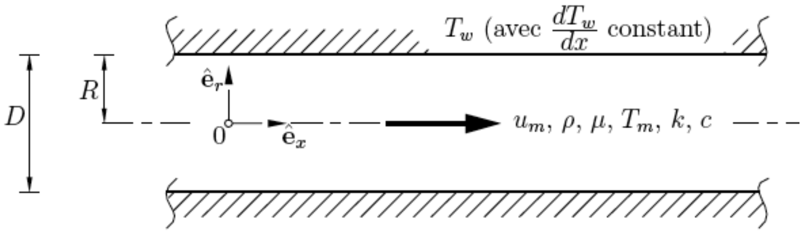


$$\frac{\partial}{\partial x}(T - T_w) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_w}{dx}$$

Transfert de chaleur établi

L'écoulement est établi lorsque le profil de la différence de températures du fluide et de la paroi reste constante le long de l'axe de la coonduite !

Cela suppose que l'écoulement est établi !

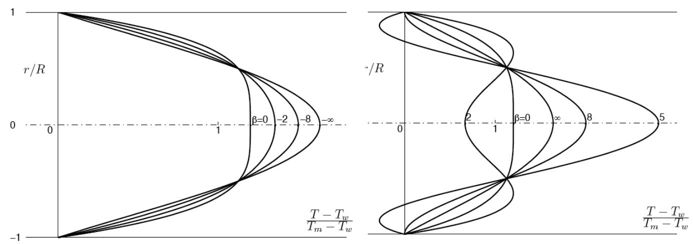


T_w constante

Si T_w constante…

$$\rho\, c\, \frac{dT_w}{dx}\, 2\, u_m \left(\cancel{1} - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) = k\, \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}(T - T_w)\right) + 16\, \mu \frac{{u_m}^2}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Deux cas particuliers



T_w linéaire

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$

T_w constante

Si T_w constante…

$$\rho\, c\, \frac{dT_w}{dx}\, 2\, u_m \cancel{\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)} = k\, \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{d}{dr}(T - T_w)\right) + 16\, \mu \frac{{u_m}^2}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right) - \frac{1}{8}\,\frac{\rho\, c}{k}\,\frac{dT_w}{dx}\, u_m\, R^2 \left(3 - 4\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$

T_w linéaire

Un nombre adimensionnel qui mesure le rapport entre deux effets !

$$\beta = \rho\, c\, \frac{dT_w}{dx}\, \frac{R^2}{\mu\, u_m}$$

$$T - T_w \;=\; \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[\boxed{\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)} - \frac{1}{8}\,\beta\, \boxed{\left(3 - 4\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)}\right]$$

Effets de dissipation visqueuse
Transformation d'énergie

Effets de convection
Transport de l'énergie

Une grande famille !

Effets de conduction
Diffusion de l'énergie

$$\boxed{\rho c(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})T} = \boxed{2\mu(\mathbf{d}:\mathbf{d})} + r + \boxed{k\boldsymbol{\nabla}^2 T}$$

$$\mathcal{O}(\rho c U \Delta T/L) \qquad \mathcal{O}(\mu U^2/L^2) \qquad \mathcal{O}(k\Delta T/L^2)$$

Effets de convection
Transport de l'énergie

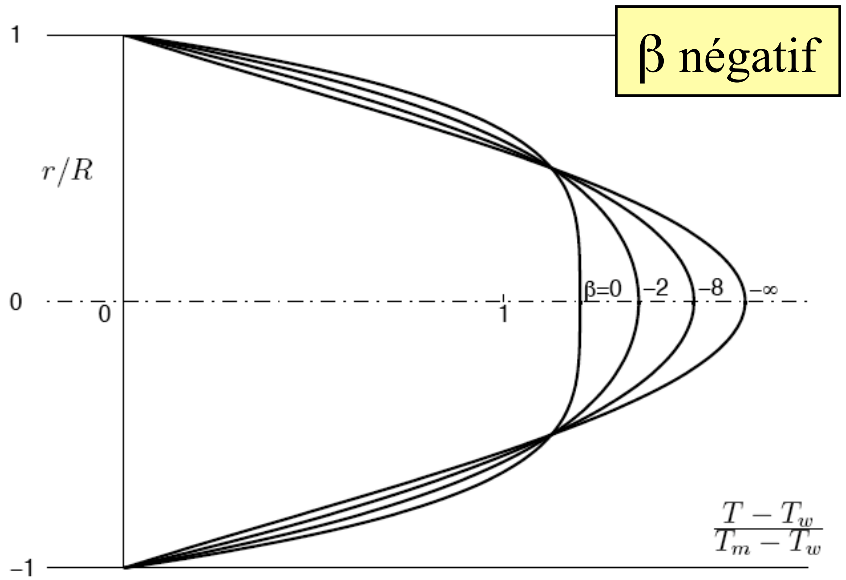
Effets de dissipation visqueuse
Transformation d'énergie

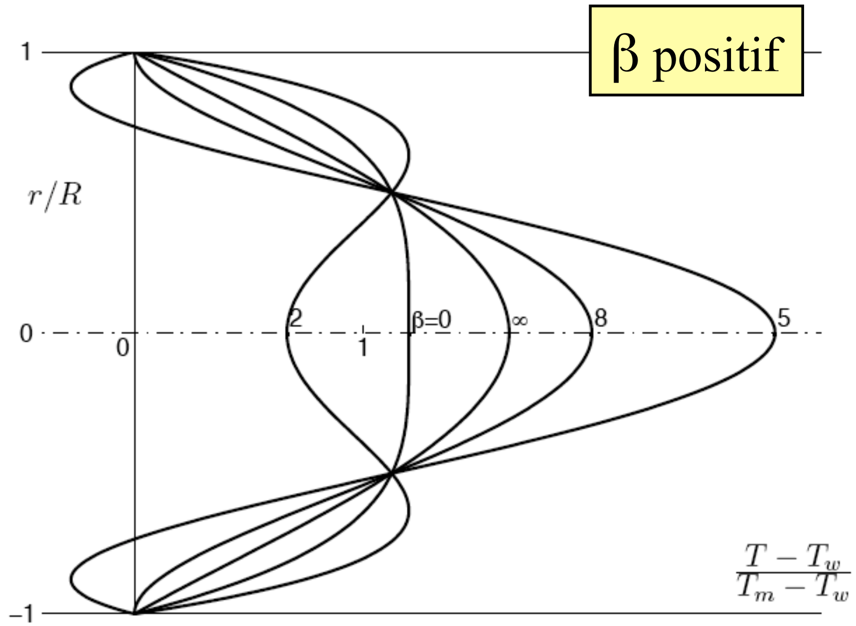
$$Pe = \frac{\color{red}{\blacksquare}}{\color{green}{\blacksquare}} \qquad Pr\ Ec = \frac{\color{blue}{\blacksquare}}{\color{green}{\blacksquare}} \qquad \beta = \frac{Re}{Ec} = \frac{\color{red}{\blacksquare}}{\color{blue}{\blacksquare}}$$

$$Ec = \frac{\text{Energie cinétique}}{\text{Energie interne}} = \frac{\rho U^2}{\rho c\Delta T} = \frac{U^2}{c\Delta T}$$

A mi-rayon,
la température
est indépendante
de la valeur
de β !

$$\frac{T - T_w}{T_m - T_w} = \frac{9}{8} \qquad \text{en} \qquad \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$





Température moyenne

$$u_m \, \pi R^2 \, (T_m - T_w) = 2\pi \, R^2 \, \frac{\mu \, {u_m}^2}{k} \, 2 \, u_m \left[\underbrace{\int_0^1 (1-\eta^2)\,(1-\eta^4)\,\eta\,d\eta}_{=\frac{10}{48}} - \frac{\beta}{8} \underbrace{\int_0^1 (1-\eta^2)\,(3-4\eta^2+\eta^4)\,\eta\,d\eta}_{=\frac{22}{48}} \right]$$

$$T_m - T_w = \frac{\mu \, {u_m}^2}{k} \left[\frac{5}{6} - \frac{11}{48}\,\beta \right]$$

Cup mixing temperature

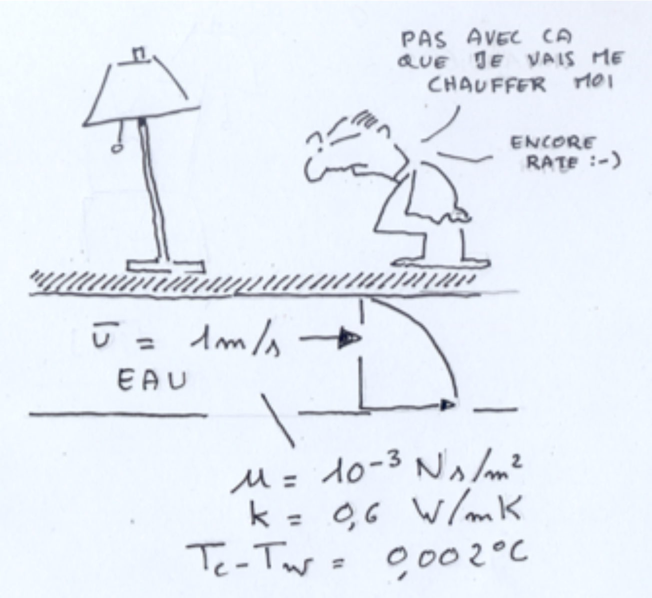
Flux de chaleur à la paroi

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[\boxed{\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^4\right)} - \frac{1}{8}\beta\,\boxed{\left(3-4\left(\frac{r}{R}\right)^2+\left(\frac{r}{R}\right)^4\right)}\right]$$

$$q_w = -k\left[\frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[-\left(\frac{4r^3}{R^4}\right)\Big|_{r=R} - \frac{1}{8}\beta\left(-4\left(\frac{2r}{R^2}\right)\Big|_{r=R} + \left(\frac{4r^3}{R^4}\right)\Big|_{r=R}\right)\right]\right]$$

$$q_w = -k\left[\frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[-\frac{4}{R} - \frac{1}{8}\beta\left(-\frac{8}{R}+\frac{4}{R}\right)\right]\right]$$

$$q_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{2R}\left(8 - \beta\right)$$



$$T - T_w = \frac{\mu \, {u_m}^2}{k} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right)$$

$$q_w = -k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} = 4 \, \frac{\mu \, {u_m}^2}{R} = 4 \, k \, \frac{(T_c - T_w)}{R}$$

C'est la chaleur générée par dissipation visqueuse qui s'échappe par la paroi du tuyau !

Flux de chaleur à la paroi

T_w constante

Nombre de Nusselt

$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

caractérise une condition d'interface !

Born: 25 Nov 1882 in Nurnberg, Germany

Died: 1 Sep 1957 in Munchen, Germany

Flux de chaleur à la paroi

Flux de chaleur diffusé dans l'écoulement

$$q_w = -k \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R} = 4\,\frac{\mu\, {u_m}^2}{R}$$

Estimation du flux de chaleur à la paroi par rapport aux effets de diffusion !

$$T_m - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\,\frac{5}{6}$$

L'écart de température caractéristique est pris avec la température moyenne !

$$Nu = 4\,\frac{\mu\, {u_m}^2}{R}\,\frac{k}{\mu\, {u_m}^2}\,\frac{6}{5}\,\frac{2R}{k} = \frac{48}{5} = 9.6$$

T_w constante
Nombre de Nusselt

$$q_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{2R} \left(8 - \beta \right)$$

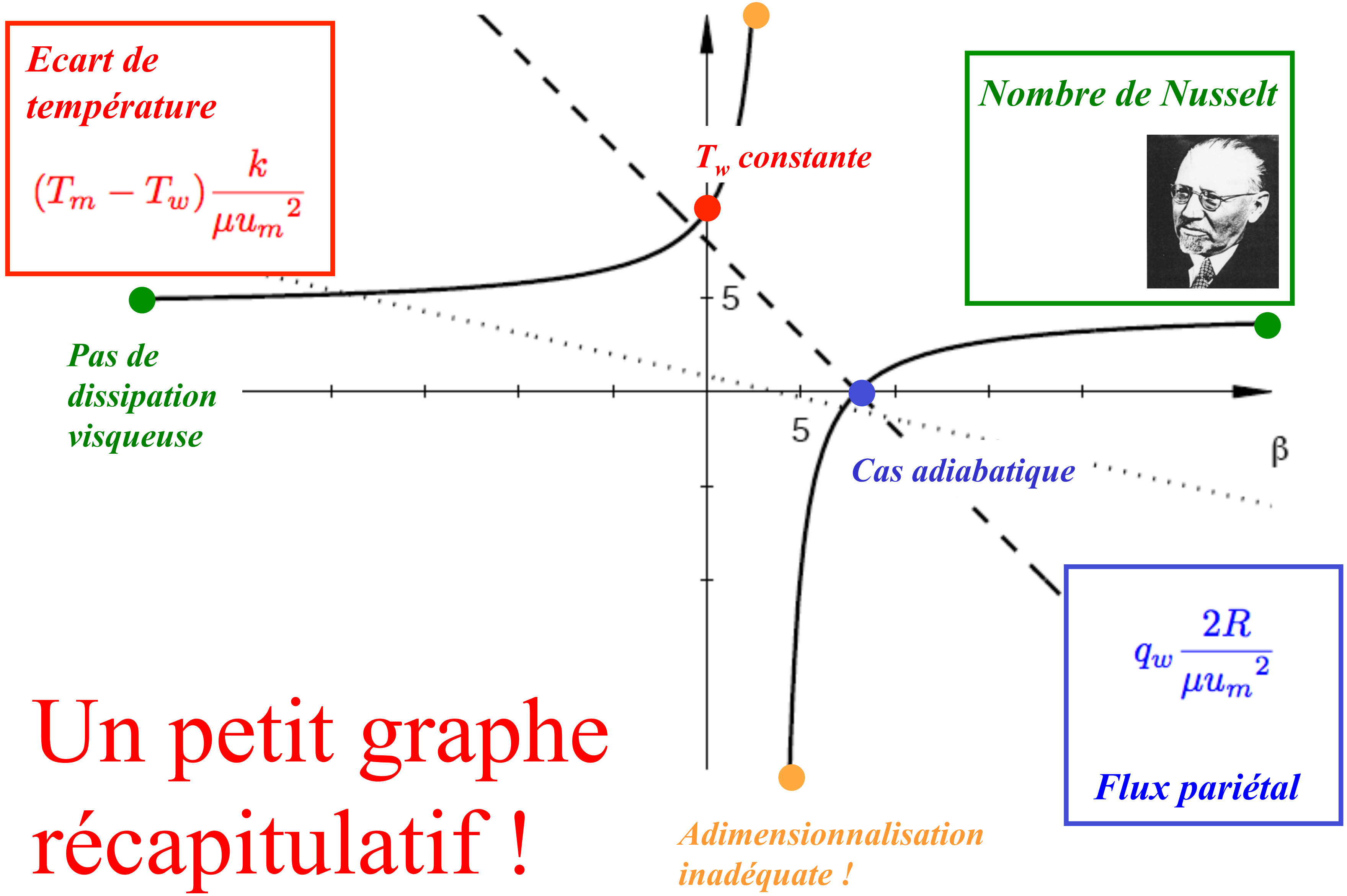
Estimation du flux de chaleur à la paroi par rapport aux effets de diffusion !

$$T_m - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k} \left[\frac{5}{6} - \frac{11}{48} \beta \right]$$

L'écart de température caractéristique est pris avec la température moyenne !

$$Nu = \frac{\left(8 - \beta \right)}{\left(\frac{5}{6} - \frac{11}{48} \beta \right)}$$

T_w linéaire
Nombre de Nusselt



Ecart de température
$(T_m - T_w)\frac{k}{\mu {u_m}^2}$
Nombre de Nusselt
T_w constante
5
5
β
Pas de dissipation visqueuse
Cas adiabatique
$q_w \frac{2R}{\mu {u_m}^2}$
Flux pariétal
Adimensionnalisation inadéquate !
Un petit graphe récapitulatif !

Nombre de Biot

$$Bi = \frac{q_w}{k\Delta T/L}$$

caractérise une condition d'interface !

Born: 21 April 1774, Paris, France

Died: 3 Feb 1862, Paris, France

Flux de chaleur à la paroi

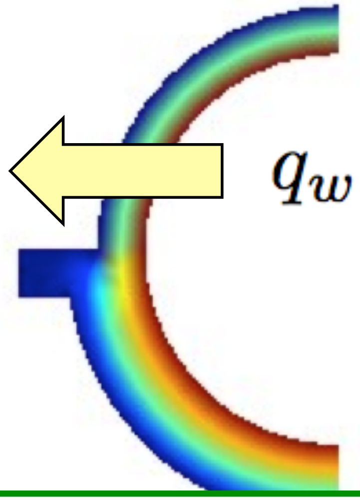
Flux de chaleur diffusé dans le solide

Le Nusselt et le Biot de l'ex-tuyau en plomb de ma salle de bain :-)

$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

Ecoulement de l'air
dans la salle de bain

Flux conductif de l'air !



Ecoulement de l'eau dans le tuyau !

Flux conductif de l'eau chaude

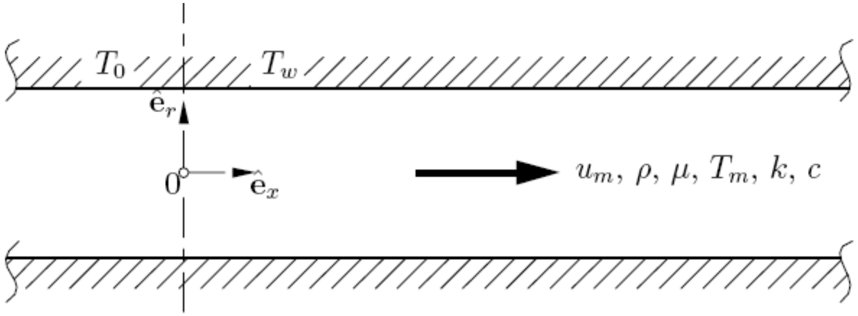
$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

$$Bi = \frac{q_w}{k\Delta T/L}$$

Conduction thermique dans
le tuyau : tension thermiques (thermoélasticité !)

Flux conductif dans le plomb

Transfert non-établi dans un écoulement établi…

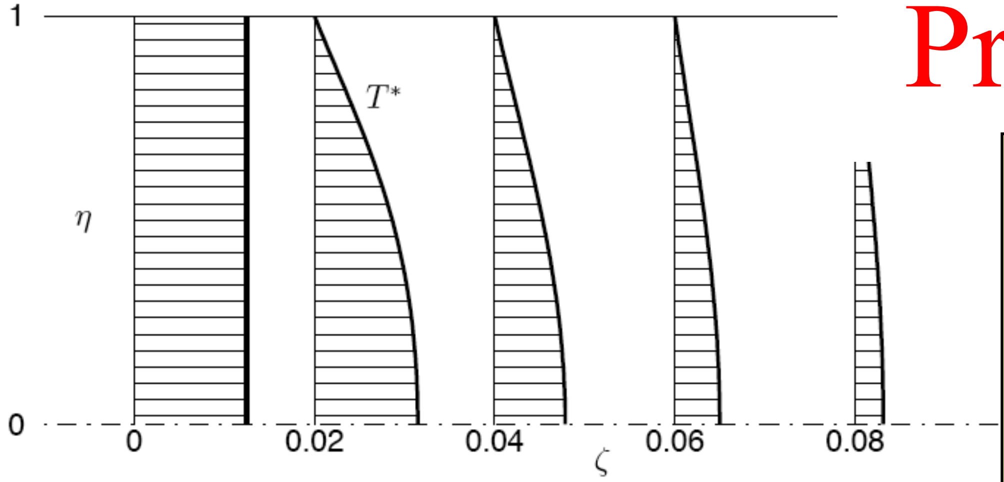


$$\rho\, c\, u\, \frac{\partial T}{\partial x} = k\, \frac{1}{r}\, \frac{\partial}{\partial r}\left(r\, \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Transfert thermique stationnaire dans un écoulement établi d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans dissipation visqueuse et diffusion axiale

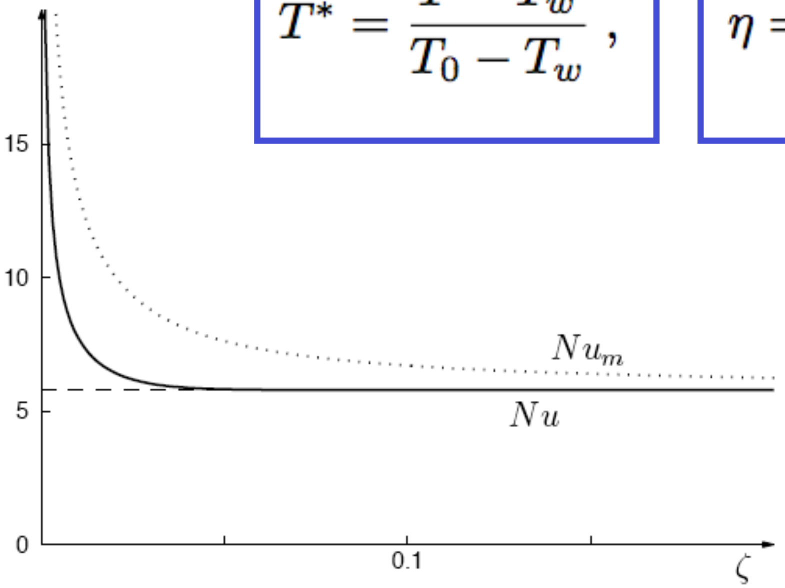
Ecoulement de Hagen-Poiseuille : problème de Poiseuille (1885)
Ecoulement bouchon : problème de Grätz (1883)

Problème de Grätz



Transfert thermique stationnaire
dans un écoulement établi
d'un fluide visqueux newtonien
à paramètres constants,
sans dissipation visqueuse
et sans diffusion axiale

Ecoulement bouchon



$$T^* = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w} \,,$$

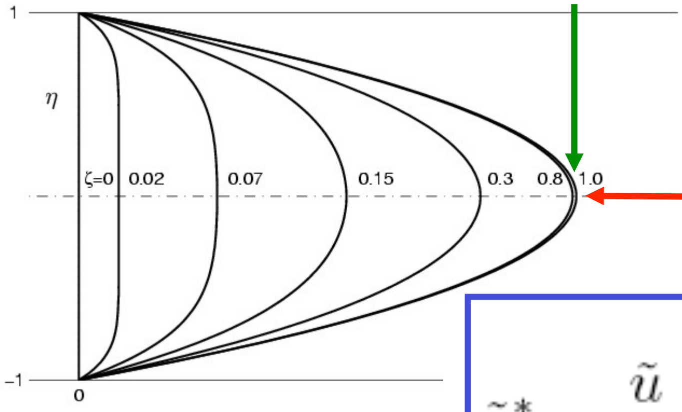
$$\eta = \frac{r}{R} \,,$$

$$\zeta = \frac{\alpha \, x}{u_m R^2} = \frac{\alpha}{u_m R} \frac{x}{R} = \frac{1}{Pe} \frac{x}{R} \,,$$

La coordonnée horizontale est relié à la vitesse par le temps de diffusion caractéristique !

Beaucoup d'algèbre inutile !
Seul, le choix de l'adimensionnalisation est vraiment utile à retenir !

$$\zeta_{c,0.95} = \frac{\nu\, t_{c,95}}{R^2} \approx 0.536$$



$$\zeta_{c,0.99} = \frac{\nu\, t_{c,99}}{R^2} \approx 0.814$$

$$\tilde{u}^* = \frac{\tilde{u}}{u_c} \,,$$

$$\eta = \frac{r}{R} \,,$$

$$\zeta = \frac{\nu\, t}{R^2} \,,$$

Adimensionalisation du temps sur base de la viscosité qui est l'unique donnée contenant une unité de temps !

En ζ=1, on a un écoulement de régime

$$u(r,t) \;=\; \underbrace{u_c\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)}_{u(r,t\to\infty)} - \tilde{u}(r,t)$$

Même approche pour le démarrage d'un écoulement !

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}^*}{\partial \zeta} = \dfrac{1}{\eta}\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta \dfrac{\partial \tilde{u}^*}{\partial \eta}\right) \\ \tilde{u}^*(\eta,0) = 1-\eta^2 \\ \tilde{u}^*(1,\zeta) = 0 \end{cases}$$

(i)

$$\tilde{u}^*(\eta,\zeta) = f(\eta)g(\zeta)$$

$$f\frac{dg}{d\zeta} = \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{df}{d\eta}\right)g$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{g}\frac{dg}{d\zeta} = \frac{1}{\eta f}\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{df}{d\eta}\right) = -\lambda^2$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dg}{d\zeta} + \lambda^2 g = 0 \qquad g(\zeta) = Ae^{-\lambda^2\zeta}$$

$$\eta\frac{d^2f}{d\eta^2} + \frac{df}{d\eta} + \lambda^2\eta f = 0 \qquad f(\eta) = BJ_0(\lambda\eta) + \cancel{CY_0(\lambda\eta)}$$

Non bornée à l'origine

Solutions obtenues par la technique de séparation de variables

(ii)

$$\tilde{u}^*(1,\zeta) = 0$$

$$\downarrow$$

$$J_0(\lambda_n) = 0$$

Condition initiale

(iii)

$$\tilde{u}^*(\eta,0) = (1-\eta^2)$$

$$\downarrow$$

$$(1-\eta^2) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, J_0(\lambda_n\,\eta)$$

$$8 = C_n\,\lambda_n^3\, J_1(\lambda_n)$$

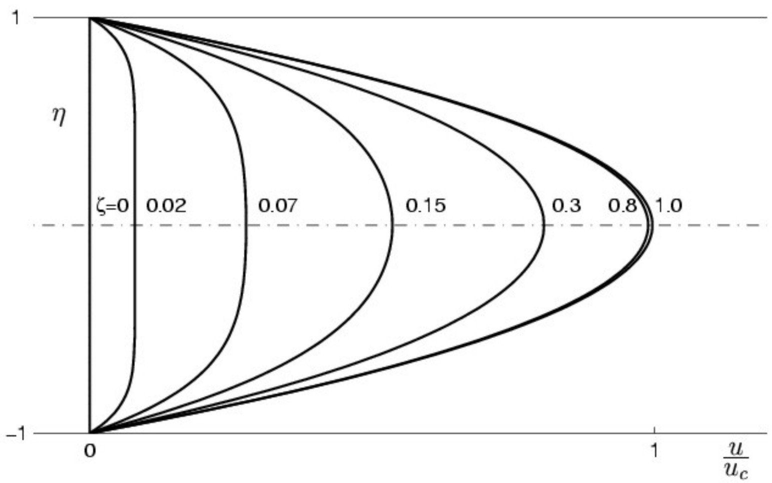
Condition limite à la paroi

Résolution analytique :-(

$$\tilde{u}^*(\eta,\zeta) = 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_n\,\eta)}{\lambda_n^3\,J_1(\lambda_n)}\,e^{-\lambda_n^2\,\zeta}$$

Temps d’établissement

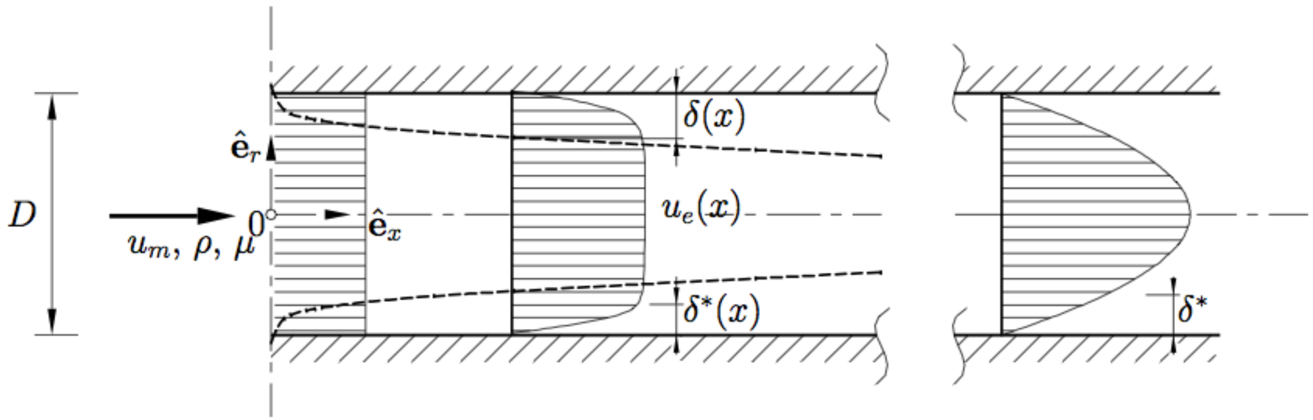
$$\frac{u}{u_c}(0, \zeta > \zeta_c) \approx 1 - \frac{8}{\lambda_1^3 J_1(\lambda_1)} e^{-\lambda_1^2 \zeta} = 1 - 1.108\, e^{-5.783\, \zeta}$$



Temps d’établissement nécessaire afin que la vitesse au centre de la conduite vaille un pourcentage critique de la valeur du profil de Poiseuille

$$\zeta_c \approx \frac{1}{\lambda_1^2} = 0.173 \qquad\qquad \zeta_{c,0.99} = \frac{\nu\, t_{c,99}}{R^2} \approx 0.814$$

Longueur d'établissement…
Analogie spatio-temporelle



Pas de solution analytique : il est possible de trouver une solution approchée par la théorie des couches limites pour le cas axisymétrique…

Ou d'effectuer une petite analogie :-)

Longueur d'établissement nécessaire afin que la vitesse au centre de la conduite vaille un pourcentage critique de la valeur du profil de Poiseuille

$$\frac{x_c}{u_m}\,\frac{\nu}{R^2} \approx t_c\,\frac{\nu}{R^2} = \zeta_c\ ,$$

$$4\,\frac{x_c}{D}\,\frac{\nu}{u_m\,D} \approx \zeta_c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x_c}{D} \approx \frac{\zeta_c}{4}\,Re_D \approx 0.2\,Re_D$$