



Université catholique de Louvain
Ecole Polytechnique de Louvain

MECANIQUE DES FLUIDES ET TRANSFERTS I

V. Legat, G. Winckelmans

Notes pour le cours MECA1321
Année académique 2013-2014 (version 5.7 14-2-2013)

*Ce document est une oeuvre originale protégée par le droit d'auteur.
Copyright V. Legat, G. Winckelmans, février 2011*

Ce texte est toujours une version provisoire. Malgré tout le soin apporté à sa rédaction, il est possible que quelques erreurs soient toujours présentes dans le texte. Tout commentaire, critique ou suggestion de votre part, est évidemment le bienvenu. Il vous est possible de m'envoyer vos commentaires directement par courrier électronique à l'adresse suivante : vincent.legat@uclouvain.be

Les éventuels errata du texte (ainsi que les nouvelles versions successives) seront disponibles sur le site Web du cours.

La section sur la convection naturelle a été rédigée par Quentin Bouvy sur base du cours et des transparents 08-09 Les titulaires du cours lui sont très reconnaissants pour ce travail fait avec beaucoup de soin. Toutefois, il est possible que quelques petites inexactitudes soient encore présentes et cette partie devra encore être largement retravaillée.

Les sections sur le transfert de masse et le transfert de chaleur ne correspondent pas totalement à l'exposé du cours et nécessiteront aussi une certaine indulgence de la part des étudiants. Nous espérons vous fournir une version mise à jour au fur à mesure de la remise à jour des notes.

La version 2010-11 a bénéficié d'une relecture attentive des étudiants suivants: Allan Barrea, Vincent Bertrand, Thibaud Husson, Michaël Malotaux, Urbain Vaes et Nicolas Van Der Noot. Les titulaires en profitent donc pour exprimer ici leur éternelle reconnaissance : le texte est maintenant un peu plus lisible et compréhensible, du moins nous l'espérons.

Avant-propos

Les phénomènes de transfert interviennent dans un grand nombre de domaines d'application de l'ingénieur. Il est donc essentiel d'en introduire la modélisation mathématique. Il s'agit du transfert de quantité de mouvement (écoulements visqueux), du transfert d'énergie (conduction thermique, convection et radiation) ainsi que du transfert de masse. En général, le milieu dans lequel les phénomènes de transfert sont décrits est supposé être continu. Il s'agit de *l'hypothèse de milieux continus*. En négligeant presque complètement une interprétation au niveau moléculaire des phénomènes de transferts, cette démarche permet de répondre à la plupart des problèmes pratiques posés à l'ingénieur. Afin d'avoir une compréhension complète des phénomènes étudiés, il est évidemment opportun d'avoir une compréhension aux deux échelles.

Pourquoi effectue-t-on l'hypothèse des milieux continus au lieu d'effectuer un calcul de dynamique moléculaire ? Pour un système avec un petit nombre d'éléments, nous pouvons effectuer des prédictions en utilisant les lois de la dynamique classique. Mais, cela n'est plus possible pour un système avec un très grand nombre d'éléments... A titre d'exemple, il suffit d'observer qu'un litre d'air contient approximativement 10^{23} molécules, tandis qu'un ordinateur fait actuellement 10^{10} opérations par seconde. En d'autres mots, il faut 10^{13} secondes ou approximativement 100000 années juste pour référencer chaque molécule ! Il est donc totalement impossible de prédire le comportement de l'air dans la plupart des situations usuelles par la dynamique moléculaire. C'est pourquoi, nous utilisons la mécanique des milieux continus.

L'hypothèse fondamentale de la mécanique des milieux continus est que le comportement de la plupart des gaz, solides et liquides (qui ne sont pas continus !) est virtuellement exactement le même si on supposait qu'ils étaient un matériau parfaitement continu. L'observation expérimentale supporte cette hypothèse, du moins pour l'air, l'eau, les métaux... Les quantités physiques telles que la masse et la quantité de mouvement associées avec les molécules contenues dans un volume donné peuvent être vues comme étant réparties uniformément sur le volume au lieu d'être concentrées sur chaque molécule.

La densité obtenue comme une moyenne...

A titre d'illustration, nous allons expliquer et décrire l'hypothèse de mécanique de milieux continus dans un monde uni-dimensionnel. Le système de coordonnées spatiales se réduit donc simplement à l'axe \mathbf{e}_x . Dans ce monde uni-dimensionnel, nous avons des molécules. Supposons donc que nous souhaitons mesurer la densité d'un matériau à un point x et à un instant t . Dans cette optique, nous considérons un intervalle de longueur L centré en

x et nous mesurons la quantité de masse $\mathcal{M}_L(t)$ présente dans cet intervalle. La densité en ce point x et à un instant t est alors simplement définie par :

$$\rho(L, x, t) = \frac{\mathcal{M}_L(t)}{L}.$$

Evidemment, le résultat obtenu est différent pour chaque longueur L d'intervalle et pour chaque position x et instant t . En d'autres mots, pour une position donnée et un instant donné, la densité est une fonction de la longueur L . Expérimentalement, on observe en général un comportement semblable à celui illustré sur la Figure 1.

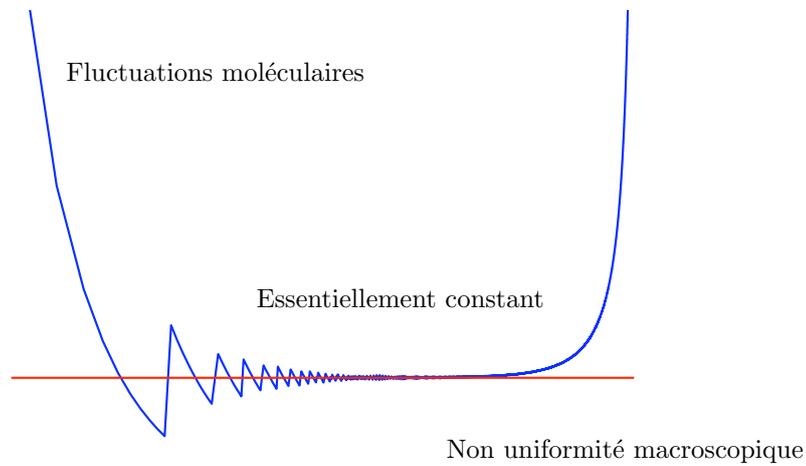


Figure 1: Allure schématique de la moyenne de la densité $\rho(L, x, t)$ en fonction de la longueur de l'intervalle de référence L à une position donnée x et à un instant fixé t .

On peut alors imaginer de définir la densité du milieu continu en x et t comme la valeur de la moyenne de $\rho(L, x, t)$ dans la zone centrale de la Figure 1 et de prolonger cette valeur constante pour les tailles d'intervalles tendant vers zéro. En d'autres mots, on supprime la partie gauche du graphe en extrapolant la valeur constante de la zone centrale, dans la partie où on observe normalement les fluctuations moléculaires. Notons qu'à une dimension, la densité aura les dimensions de masse par longueur. Dans le cas tridimensionnel, nous aurons évidemment des unités de masse par volume. D'une certaine manière, il y a une sorte de principe d'incertitude ici. Pour calculer la densité, nous effectuons une moyenne sur une certaine longueur L : ce qui introduit une certaine incertitude sur la valeur fournie... Pour réduire cette incertitude, il faudrait diminuer la

longueur L . Par contre, si nous diminuons trop cette longueur, nous allons avoir une incertitude due aux fluctuations moléculaires. Donc, plus on souhaite réduire l'erreur due au processus de moyenne, plus on introduit une incertitude due aux fluctuations moléculaires.

En mécanique de milieux continus, un *point matériel* est donc physiquement un volume élémentaire suffisamment grand afin de lisser toutes les fluctuations moléculaires et suffisamment petit afin d'être négligeable par rapport aux variations macroscopiques. La validité de l'hypothèse de mécanique des milieux continus est directement liée à la séparation des échelles entre les fluctuations moléculaires et les variations macroscopiques. En général, on observe une séparation des échelles d'un facteur 10^{15} dans les milieux solides, liquides et gazeux pour les applications usuelles de l'ingénieur.

Cette procédure de moyenne peut être effectuée pour toutes les quantités physiques que l'on souhaite conserver. A chaque point de l'espace et du temps, on pourra ainsi assigner une densité de masse $\rho(x, t)$, une densité de quantité de mouvement $p(x, t)$ ou une densité d'énergie interne massique $U(x, t)$. Si nous supposons que les fluctuations aléatoires de la position et de la masse des molécules ne sont pas corrélées avec les fluctuations aléatoires de vitesses de celles-ci, on peut écrire simplement que :

$$p(x, t) = \rho(x, t) v(x, t). \quad (1)$$

En d'autres mots, nous allons prendre l'équation (1) comme la manière d'obtenir un champ moyen de vitesses pour le milieu continu. La vitesse du milieu continu est donc définie comme le rapport de la quantité de mouvement et de la densité par le processus que nous venons de décrire.

L'équation de continuité...

De manière générale en physique, il existe un principe universel que la matière ne peut être ni créée, ni détruite. Dans la mécanique des milieux continus, ce principe permet l'obtention de *l'équation de continuité* : cette équation s'applique à l'évolution de n'importe que volume matériel puisqu'il ne fait intervenir que la vitesse et la densité du matériau.

Pour obtenir la forme locale du principe de conservation, nous allons considérer un petit intervalle du milieu continu et y appliquer le principe de conservation de la masse. La tranche de matériau ainsi considérée ne doit toutefois pas vraiment être trop petite afin de pouvoir négliger toutes les fluctuations. Considérons donc un intervalle fixe quelconque $[a, b]$ du milieu continu tel qu'illustré sur la Figure 2.

La masse présente sur l'intervalle est simplement l'intégrale de la densité $\rho(x, t)$. Comme il n'y a ni création, ni destruction de masse sur l'intervalle, la masse totale

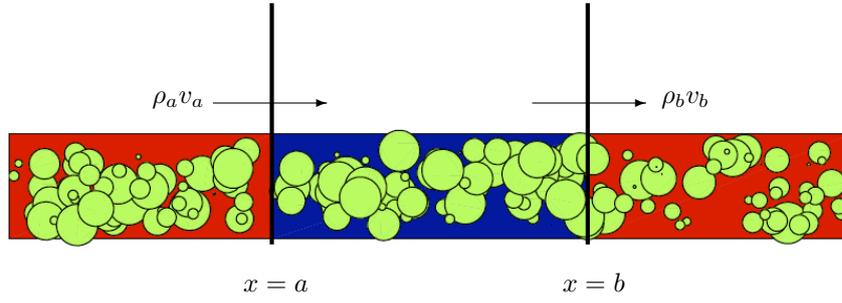


Figure 2: Un intervalle quelconque du milieu continu pour y appliquer le principe de conservation de la masse.

qui y est présente ne peut changer que par la matière qui entre ou qui sort par les deux extrémités en $x = a$ et $x = b$. Si le milieu se déplace à une vitesse $v(x, t)$, le flux massique $\rho(x, t) v(x, t)$ est la mesure du transport de la masse vers la droite en un point donné. On peut donc écrire la conservation de la masse sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx &= \rho(a, t)v(a, t) - \rho(b, t)v(b, t) && \forall a, b \\ \int_a^b \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx &= -[\rho v]_a^b && \forall a, b \\ \int_a^b \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx &= - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x, t)v(x, t)) dx && \forall a, b \\ \int_a^b \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x, t)v(x, t)) dx &= 0 && \forall a, b \\ &\downarrow \text{Si } \rho \text{ et } v \text{ sont continues,} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) &= 0 && (2) \end{aligned}$$

Il est essentiel ici d'observer que l'on obtient l'équation de continuité du principe global de conservation de la masse en utilisant le théorème suivant : si l'intégrale d'une fonction continue sur tout intervalle est nulle, alors cette fonction doit s'annuler sur tout l'intervalle. Le passage de la forme globale du principe de conservation à une forme locale n'est donc possible que grâce à l'hypothèse des milieux continus.

L'équation (2) est la *forme conservative de l'équation de continuité*. C'est l'expression que l'on obtient naturellement en appliquant le principe de conservation de la masse à un intervalle (ou à un volume) de contrôle. Il est aisé d'obtenir ce qu'on appelle la *forme non-conservative de l'équation de continuité* en développant la dérivée spatiale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) &= 0 \\ \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x}}_{\frac{D\rho}{Dt}} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

où la notation D/Dt représente la dérivée matérielle. Cette seconde forme peut s'obtenir directement en appliquant non plus le principe de conservation à un intervalle fixe, mais un intervalle matériel dont les frontières suivent le mouvement du milieu continu. Ce petit exercice est laissé au soin du lecteur.

On peut aisément interpréter cette seconde équation comme suit : le changement de densité d'un point matériel est donc proportionnel à l'opposé du gradient de vitesse. Considérons une vitesse v positive et donc un mouvement de la gauche vers la droite. Lorsque $\partial v/\partial x < 0$, les points matériels en $x = b$ sont plus lents que ceux en $x = a$ et donc les particules se retrouvent plus serrées entre elles et doivent s'agglutiner dans un plus petit espace : la densité doit logiquement augmenter.

Références

- G.K. BATCHELOR *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press 1967 (reprinted paperback 1994).
- F. M. WHITE *Viscous fluid flow" second edition, Series in Mechanical Engineering*, McGraw-Hill, Inc., 1991.
- P. A. THOMPSON *Compressible-fluid dynamics, advanced engineering series*, Maple Press, 1984.
- H. LAMB *Hydrodynamics*, sixth edition, Cambridge University Press 1932, Dover Publications (paperback).
- L. ROSENHEAD *Laminar boundary layers*, Oxford University Press 1963, Dover Publications (paperback).
- P. G. DRAZIN AND W. H. REID *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press 1985.
- M. VAN DYKE *An album of fluid motion*, The Parabolic Press, 1982.
- A. BEJAN *Heat transfer*, John Wiley, Inc., 1993.

- R.B. BIRD, W.E. STEWART., E.N. LIGHFOOT *Transport phenomena*, Wiley int.ed., 1960.
- H. SCHLICHTING *Boundary-layer theory*, Mc Graw-Hill, NY, 1986.
- L.D. LANDAU AND E.M. LIFSCHITZ *Fluid mechanics*, Course of Theoretical Physics vol. 6, Pergamon Press, London, 1959.
- L. PRANDTL AND O.G. TIETJENS *Fundamentals of hydro- and aero-mechanics*, Dover publ., NY, 1957.
- J. HAPPEL AND H. BRENNER *Low Reynolds number hydrodynamics*, Noordhoff int. publ., Leyden, 1973.
- D.J. TRITTON *Physical fluid dynamics*, Van Nostrand Reinhold, UK, 1985.
- R. SIEGEL AND J. HOWELL *Thermal radiation heat transfer*, 2nd ed., McGraw-Hill, NY, 1981.
- A.J. ROBERTS, *A one-dimensional introduction to continuum mechanics*, World Scientific, London, 1994.

Table des matières

1	Les fluides dans la mécanique des milieux continus	1
1.1	Lois de conservation	1
1.1.1	Formes globales des lois de conservation pour les volumes matériels	2
1.1.2	Formes locales des lois de conservation	5
1.1.3	Formes globales des lois de conservation pour les volumes de contrôle	7
1.1.4	Concept de puissance des efforts internes	10
1.1.5	Concept d'énergie potentielle	11
1.1.6	Concepts de pression, d'extra-tensions et d'enthalpie	13
1.2	Lois de comportement	14
1.2.1	Concept d'entropie et de température absolue	15
1.2.2	Modèle du fluide visqueux newtonien	17
1.2.3	Modèle du gaz idéal	23
1.2.4	Écoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien	24
1.3	Conditions aux limites	25
2	Écoulements incompressibles établis	29
2.1	Écoulements de Hagen-Poiseuille et de Couette	29
2.2	Écoulements instationnaires	38
2.2.1	Démarrage brusque de l'écoulement dans une conduite	38
2.2.2	Écoulement cyclique avec gradient de pression oscillant	42

2.2.3	Démarrage brusque d'une plaque	45
2.2.4	Plaque oscillante	48
2.3	Zone d'entrée et longueur d'établissement	48
3	Transfert de chaleur	53
3.1	Transfert de chaleur dans les solides	54
3.1.1	Conduction : loi de Fourier	54
3.1.2	Convection : loi de Newton	57
3.1.3	Notion de résistance thermique	61
3.1.4	Exemple de solution analytique de l'équation de Laplace	65
3.2	Transfert thermique en écoulement établi	68
3.2.1	Transfert thermique établi avec température de paroi constante	69
3.2.2	Transfert thermique établi avec température de paroi linéaire	71
3.2.3	Entrée thermique: le problème de Grätz	75
3.2.4	Nombre de Nusselt moyen	80
4	Ecoulements rampants	83
4.1	Écoulement rampant autour d'un cylindre de section circulaire	84
4.2	Écoulement rampant autour d'une sphère	86
4.3	Théorie de la lubrification	89
5	Convection naturelle	99
5.1	Une étape préliminaire : la convection forcée...	100
5.2	Nombre de Grashof	103
5.3	Une solution approchée pour le problème de la convection naturelle	105
6	Couches limites laminaires	109
6.1	Introduction	109

6.2	Etablissement des équations de la couche limite laminaire	111
6.2.1	Approche physique	111
6.2.2	Approche mathématique	114
6.3	Solution pour le cas avec u_e constant (Blasius)	117
6.4	Epaisseurs de la couche limite	121
6.5	Approche intégrale pour le cas général	123
6.6	Couches limites thermiques	127
6.6.1	Cas $Pr = 1$ et u_e constant	128
6.6.2	Cas Pr général, dissipation négligeable, u_e et T_w constants	130
6.7	Couches limites en écoulement compressible	134
6.7.1	Cas $Pr = 1$ et u_e constant	135
6.8	Approche intégrale pour le transfert de chaleur	136
7	Transfert de masse	141
7.1	Equations de continuité d'un mélange	141
7.1.1	Concepts de concentration, fraction et flux massiques	141
7.1.2	Concepts de concentration, fraction et flux molaires	143
7.2	Loi de Fick	144
7.2.1	Modèle du mélange binaire visqueux	147
7.2.2	Approximations usuelles	151
7.2.3	Analogie dans les phénomènes de transport	152
7.3	Diffusion dans un gaz stagnant	153
8	Ecoulements turbulents	159
8.1	Transition vers la turbulence	159
8.2	Caractéristiques générales de la turbulence	160
8.3	Approche statistique de Reynolds	161

8.4	Equations moyennées de Reynolds	163
8.5	Modèles de fermeture de type “viscosité effective de turbulence”	165
8.6	Écoulements turbulents en conduite ou en canal	168
8.6.1	Généralités pour les écoulements turbulents établis en conduite ou en canal	168
8.6.2	Modélisation de la viscosité effective de turbulence pour la zone proche de la paroi	172
8.6.3	Profil universel de vitesse pour la zone proche de la paroi: conduite ou canal avec paroi hydrauliquement lisse	173
8.6.4	Profil universel de vitesse pour toute la zone turbulente	187
8.6.5	Profil de vitesse simplifié en exposant pour toute la zone turbulente	190
8.6.6	Formule générale de Prandtl pour les pertes de charge en conduite hydrauliquement lisse	194
8.6.7	Conduites hydrauliquement lisses et conduites hydrauliquement rugueuses	195
8.6.8	Formule générale des pertes de charge en conduite hydrauliquement rugueuse	201
8.6.9	Formule générale des pertes de charge en conduite	201
8.7	Couches limites turbulentes	207
8.7.1	Profils universel de vitesse	207
8.7.2	Profil de vitesse simplifié en exposant pour toute la zone turbulente	216
8.7.3	Formules générales du coefficient de frottement pour la couche limite hydrauliquement lisse	218
8.7.4	Formule générale du coefficient de frottement pour la couche limite hydrauliquement rugueuse	221
8.8	Profils de température et transfert de chaleur	225
8.8.1	Couche limite avec $Pr = 1$	225
8.8.2	Couche limite hydrauliquement lisse et avec dissipation négligeable: cas Pr général	228
8.8.3	Couche limite hydrauliquement rugueuse et avec dissipation négligeable: cas Pr général	231

8.8.4	Conduite hydrauliquement lisse et avec dissipation négligeable: cas Pr général	232
8.8.5	Conduite hydrauliquement rugueuse et avec dissipation négligeable: cas Pr général	233
9	Analyse dimensionnelle	235
9.1	Principe d'invariance dimensionnelle	237
9.2	Théorème de Vaschy-Buckingham	238
9.3	Adimensionalisation des équations du modèle du fluide visqueux newtonien	240
A	Equations de Navier-Stokes dans divers systèmes d'axes	249
B	Fonction de courant	253

*Even the mountains flowed before the Lord.
(from the song of Deborah after her victory over the Philistines, Judges 5:5)*

Chapitre 1

Les fluides dans la mécanique des milieux continus

La mécanique des milieux continus est une discipline scientifique où l'on souhaite construire un modèle pour prédire l'évolution d'un milieu (ici, le fluide considéré). Ce modèle est formé d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles et de conditions aux limites. Les équations d'un modèle continu sont d'une part les équations de conservation qui s'appliquent à tous les milieux, et d'autre part les équations de comportement (ou de constitution) qui sont spécifiques au comportement particulier du matériau considéré. Les conditions aux limites sont, en général, classées en conditions initiales et en conditions aux frontières.

1.1 Lois de conservation

Les lois de conservation ont une forme globale universelle schématisée sur la figure (1.1). Le contenu $\mathcal{C}(t)$ d'un système considéré évolue en fonction de divers apports externes $\mathcal{A}_1(t)$, $\mathcal{A}_2(t)$... en accord avec une équation différentielle de conservation

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt}(t) = \mathcal{A}_1(t) + \mathcal{A}_2(t) + \dots \quad (1.1)$$

Il est essentiel de correctement définir le système, en identifiant clairement ce qui est dans le système et ce qui est à l'extérieur du système. Il est aussi important de noter que l'expression des lois de conservation est toujours relative à un certain observateur (galiléen ou quelconque). Il convient donc également d'identifier pour quelle classe d'observateurs une loi de conservation est valable.

Les lois de conservation mènent ensuite, sous certaines conditions de continuité, à des

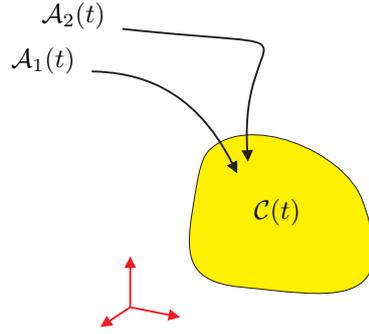


Figure 1.1: Forme globale universelle des lois de conservation.

formes locales, qui sont des équations algébriques ou des équations aux dérivées partielles équivalentes. Plus précisément, le fait qu'une loi de conservation soit satisfaite pour une certaine classe de systèmes (par exemple, tous les volumes matériels ou tous les volumes de contrôle) est équivalent à ce que sa forme locale soit satisfaite en tout point à tout instant.

Rappelons que la physique d'un milieu s'exprime en postulant, sous forme de principes, les formes globales des lois de conservation dont on déduit ensuite les formes locales. En présence de surfaces de discontinuité (comme les ondes de choc), les formes locales ne peuvent plus être établies dans la discontinuité. Il est, dès lors, nécessaire de revenir aux formes globales et d'établir les relations de saut adéquates.

1.1.1 Formes globales des lois de conservation pour les volumes matériels

Un volume matériel $V(t)$ est défini comme un ensemble de points matériels en mouvement. Ces points se déplacent à la vitesse macroscopique définie par :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_i(x_j, t)\mathbf{e}_i \quad (1.2)$$

Cette vitesse est définie par rapport à un repère $(0, \mathbf{e}_i)$ préalablement défini. Il s'agit ici d'une représentation eulérienne des vitesses puisque les composantes sont exprimées en termes des coordonnées actuelles et du temps. En général, on écrit simplement \mathbf{v} ou v_i en omettant la dépendance par rapport à x_j et à t . Evidemment, si le contexte l'exige, on peut introduire une représentation lagrangienne du même champ de vitesse et utiliser des symboles distincts.

Afin d'écrire les lois de conservation globales pour un volume matériel, il convient d'abord de définir les grandeurs physiques nécessaires associées à un volume matériel $V(t)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \int_{V(t)} \rho dV, && \text{(masse),} \\
\mathcal{P}(t) &= \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV, && \text{(quantité de mouvement),} \\
\mathcal{N}(t) &= \int_{V(t)} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dV, && \text{(moment de la quantité de mouvement),} \\
\mathcal{U}(t) &= \int_{V(t)} \rho U dV, && \text{(énergie interne),} \\
\mathcal{K}(t) &= \int_{V(t)} \rho \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} dV, && \text{(énergie cinétique),} \\
\mathcal{F}_d(t) &= \int_{V(t)} \mathbf{f} dV = \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} dV, && \text{(forces à distance),} \\
\mathcal{F}_c(t) &= \int_{\partial V(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) dS, && \text{(forces de contact),} \\
\mathcal{M}_d(t) &= \int_{V(t)} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} dV, && \text{(moment des forces à distance),} \\
\mathcal{M}_c(t) &= \int_{\partial V(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{n}) dS, && \text{(moment des forces de contact),} \\
\mathcal{P}_d(t) &= \int_{V(t)} \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g} dV, && \text{(puissance des forces à distance),} \\
\mathcal{P}_c(t) &= \int_{\partial V(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}(\mathbf{n}) dS, && \text{(puissance des forces de contact),} \\
\mathcal{Q}_d(t) &= \int_{V(t)} r dV, && \text{(puissance calorifique fournie à distance),} \\
\mathcal{Q}_c(t) &= \int_{\partial V(t)} q(\mathbf{n}) dS, && \text{(puissance calorifique fournie par conduction),}
\end{aligned}$$

(1.3)

où $\partial V(t)$ représente la frontière du volume matériel $V(t)$. Les éléments de volume ou de surface dans $V(t)$ ou sur $\partial V(t)$ sont donnés par dV et dS respectivement. La normale

unitaire sortante de $\partial V(t)$ est notée \mathbf{n} . Les autres symboles désignent les fonctions de champ usuelles :

- ρ , la masse volumique,
- \mathbf{v} , la vitesse,
- U , l'énergie interne massique,
- $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$, la densité des forces de distance,
- \mathbf{g} , la densité des forces de masse,
- $\mathbf{t}(\mathbf{n})$, la densité des forces de contact exercées sur la frontière,
- r , la densité de puissance calorifique fournie à distance,
- $q(\mathbf{n})$, le flux de puissance calorifique fourni par conduction.

Les lois de conservation globales pour un volume matériel représentées de manière schématique sur la figure 1.2 sont données par :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{M}}{dt} &= 0, & \forall V(t), \\
 \frac{d\mathcal{P}}{dt}(t) &= \mathcal{F}_d(t) + \mathcal{F}_c(t), & \forall V(t), \\
 & & \forall \text{ repère inertiel}, \\
 \frac{d\mathcal{N}}{dt}(t) &= \mathcal{M}_d(t) + \mathcal{M}_c(t), & \forall V(t), \\
 & & \forall \text{ repère inertiel}, \\
 \frac{d(\mathcal{K} + \mathcal{U})}{dt}(t) &= \mathcal{P}_d(t) + \mathcal{P}_c(t) \\
 & \quad + \mathcal{Q}_d(t) + \mathcal{Q}_c(t), & \forall V(t), \\
 & & \forall \text{ repère inertiel},
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

A l'exception de la conservation de la masse, ces lois ne s'appliquent que pour un repère inertiel. Il est possible de démontrer que, lorsque l'ensemble des lois de conservation est

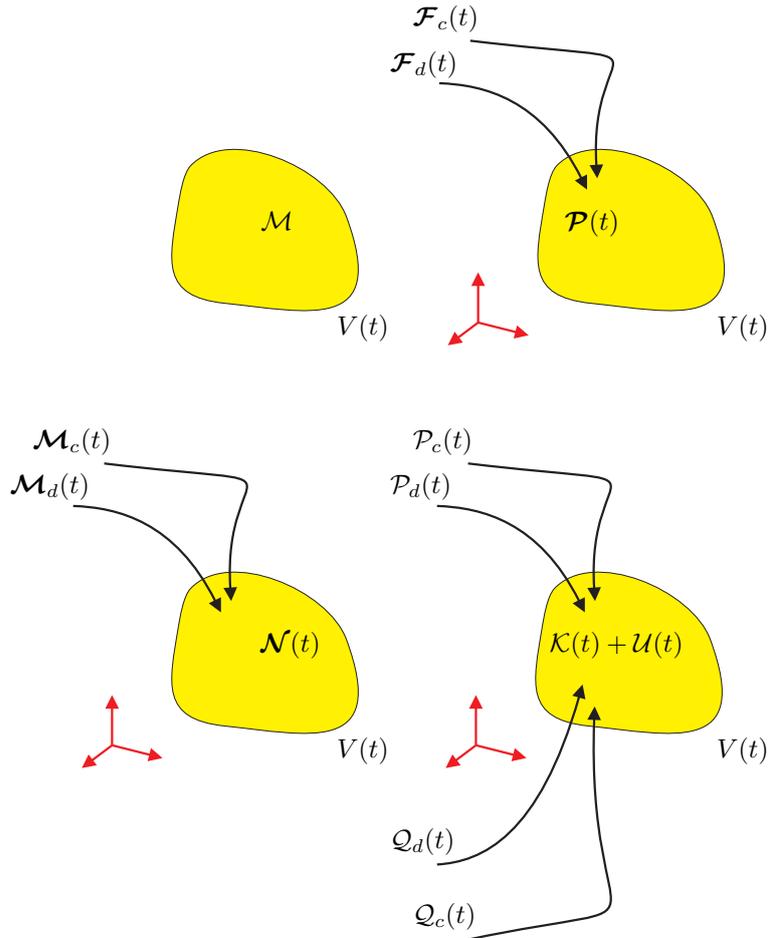


Figure 1.2: Lois de conservation pour un volume matériel.

satisfait par rapport à un certain repère inertiel, elles le sont également pour tout autre repère inertiel (et même pour tout repère dans le cas de la conservation de la masse).

1.1.2 Formes locales des lois de conservation

Les formes locales des lois de conservation s'établissent à partir de l'ensemble des formes globales à l'aide des théorèmes de Reynolds et de Green. Les formes locales peuvent être classées en relations algébriques et en relations différentielles.

Les relations algébriques font apparaître le tenseur de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et le vecteur flux de chaleur \mathbf{q} et leurs relations avec $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ et $q(\mathbf{n})$. En utilisant respectivement la conservation de la quantité de mouvement, du moment de la quantité de mouvement et de l'énergie, on obtient pour tout repère :

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}(\mathbf{n}) &= \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n}, \\
\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T, \\
q(\mathbf{n}) &= -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}.
\end{aligned}
\tag{1.5}$$

Afin d'écrire les relations différentielles locales de conservation, il est utile d'introduire maintenant quelques notations : la dérivée matérielle D/Dt et le tenseur des taux ou vitesses de déformation \mathbf{d} .

La dérivée matérielle est définie par

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla.
\tag{1.6}$$

Elle représente la variation d'un champ par rapport au temps lorsqu'on accompagne le mouvement du point matériel qui se trouve à l'endroit où le champ est mesuré.

Le tenseur des taux de déformation est défini par

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v}).
\tag{1.7}$$

Physiquement, il est possible d'interpréter les composantes de ce tenseur comme suit :

- Les composantes diagonales de ce tenseur s'interprètent en termes d'allongements relatifs par unité de temps de segments matériels élémentaires parallèles aux axes du repère à l'instant t . Ainsi, d_{11} est l'allongement relatif par unité de temps d'un segment parallèle à \mathbf{e}_1 en t .
- Les composantes non-diagonales représentent le rapprochement (ou l'éloignement) angulaire par unité de temps de deux segments matériels élémentaires. Ainsi, $2d_{12}$ est la variation angulaire par unité de temps de deux segments matériels élémentaires précisément parallèles à \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 à l'instant t . Un rapprochement ou un éloignement angulaire correspond respectivement à une variation positive ou négative.
- La trace du tenseur des vitesses de déformation (d_{ii}) correspond à un accroissement relatif par unité de temps d'un volume matériel élémentaire en t .

En utilisant les notations de la dérivée matérielle et du tenseur des taux de déformation, les relations différentielles qui expriment localement les lois de conservation (la conservation locale de la masse, la conservation locale de la quantité de mouvement et la conservation locale de l'énergie interne, respectivement) s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\
\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \\
\rho \frac{DU}{Dt} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q},
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Ces relations ont une autre forme dite *conservative*. Cette forme conservative est fort utilisée en mécanique des fluides et s'obtient facilement en tenant compte de la conservation de la masse :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\
\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) &= \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \\
\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} U) &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Rappelons que la loi locale de conservation de la quantité de mouvement, qu'elle soit exprimée en termes de dérivées matérielles ou sous forme conservative, ne s'applique que dans un repère inertiel.

1.1.3 Formes globales des lois de conservation pour les volumes de contrôle

Les lois de conservation peuvent également s'écrire, de manière totalement équivalente, pour un volume de contrôle V^c fixe dans le repère considéré. Dans ce cas, il faut désormais inclure des apports convectifs dus au transport de matière au travers la frontière du volume de contrôle.

Les lois de conservation globales pour un volume de contrôle représentées de manière schématique sur la figure 1.3, sont données par :

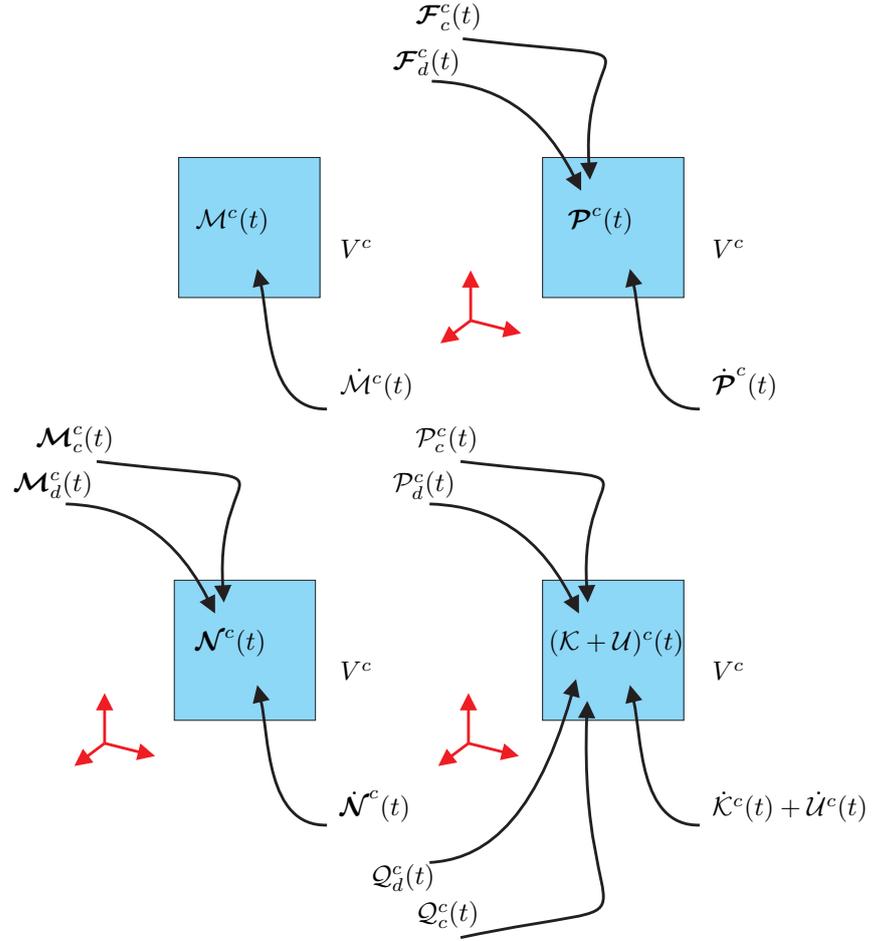


Figure 1.3: Lois de conservation pour un volume de contrôle.

$$\frac{d\mathcal{M}^c}{dt}(t) = \dot{\mathcal{M}}^c(t), \quad \forall V^c,$$

$$\frac{d\mathcal{P}^c}{dt}(t) = \dot{\mathcal{P}}^c(t) + \mathcal{F}_d^c(t) + \mathcal{F}_c^c(t), \quad \forall V^c, \\ \forall \text{ repère inertiel},$$

$$\frac{d\mathcal{N}^c}{dt}(t) = \dot{\mathcal{N}}^c(t) + \mathcal{M}_d^c(t) + \mathcal{M}_c^c(t), \quad \forall V^c, \\ \forall \text{ repère inertiel}, \quad (1.10)$$

$$\frac{d(\mathcal{K}^c + \mathcal{U}^c)}{dt}(t) = \dot{\mathcal{K}}^c(t) + \dot{\mathcal{U}}^c(t) \\ + \mathcal{P}_d^c(t) + \mathcal{P}_c^c(t) \\ + \mathcal{Q}_d^c(t) + \mathcal{Q}_c^c(t), \quad \forall V^c, \\ \forall \text{ repère inertiel},$$

Les grandeurs \mathcal{M}^c , \mathcal{P}^c ... sont définies exactement par des expressions similaires à (1.3), mais dont le domaine d'intégration n'est plus le volume matériel (ou sa frontière), mais le volume de contrôle (ou sa frontière). Il ne reste donc plus qu'à définir les apports convectifs par les expressions :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{M}}^c(t) &= \int_{\partial V^c} -\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \\
\dot{\mathcal{P}}^c(t) &= \int_{\partial V^c} -\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \\
\dot{\mathcal{N}}^c(t) &= \int_{\partial V^c} -(\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \\
\dot{\mathcal{K}}^c(t) &= \int_{\partial V^c} -\rho \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \\
\dot{\mathcal{U}}^c(t) &= \int_{\partial V^c} -\rho U(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Il est aisé d'établir les lois de conservation pour un volume de contrôle, à partir de celles sur un volume matériel. Il suffit de considérer un volume matériel $V(t)$ occupant précisément le domaine V^c à l'instant t (mais pas nécessairement aux autres temps). On peut alors écrire au temps t pour un champ f quelconque

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{V(t)=V^c \text{ ent}} \rho f dV &= \int_{V^c} \rho \frac{Df}{Dt} dV \\
&= \int_{V^c} \left[\rho \frac{\partial f}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla f \right] dV \\
&= \int_{V^c} \left[\rho \frac{\partial f}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla f + f \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) \right] dV \\
&= \int_{V^c} \left[\frac{\partial (\rho f)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} f) \right] dV \\
&= \frac{d}{dt} \int_{V^c} \rho f dV + \int_{\partial V^c} \rho f (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS.
\end{aligned}$$

On voit donc bien apparaître l'apport convectif. Il est également possible d'obtenir les formes globales pour un volume de contrôle en partant des lois de conservation locales sous forme conservative (ou vice-versa).

1.1.4 Concept de puissance des efforts internes

La formalisation des lois de conservation en termes de systèmes et d'apports externes permet d'obtenir d'autres formulations ou variantes des lois de conservations. Il est ainsi possible d'obtenir des variantes de l'équation d'énergie. En particulier, à partir des formes globales de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie totale, il est possible d'établir des lois de conservation de l'énergie cinétique (ou théorème de l'énergie cinétique) et de l'énergie interne.

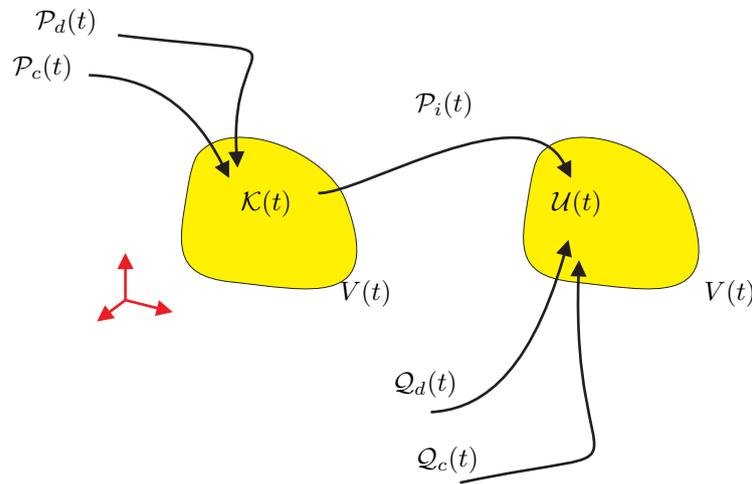


Figure 1.4: Lois de conservation de l'énergie cinétique et interne pour un volume matériel.

Ces relations qui sont représentées schématiquement sur la figure 1.4 s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{K}}{dt}(t) &= \mathcal{P}_d(t) + \mathcal{P}_c(t) - \mathcal{P}_i(t), & \forall V(t), \\
 & & \forall \text{ repère inertiel}, \\
 \frac{d\mathcal{U}}{dt}(t) &= \mathcal{Q}_d(t) + \mathcal{Q}_c(t) + \mathcal{P}_i(t), & \forall V(t),
 \end{aligned}
 \tag{1.12}$$

où $\mathcal{P}_i(t)$ désigne la puissance de efforts internes et est donné par :

$$\mathcal{P}_i(t) = \int_{V(t)} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV. \quad (1.13)$$

La conservation de l'énergie interne s'applique dans un repère quelconque et donne directement la forme locale (1.8.3). On peut donc dire qu'étant donné un volume matériel $V(t)$, celui-ci reçoit par unité de temps un apport externe d'énergie cinétique $\mathcal{P}_d(t) + \mathcal{P}_c(t)$ et un apport externe d'énergie interne $\mathcal{Q}_d(t) + \mathcal{Q}_c(t)$. En outre, il y a une transformation d'énergie cinétique en énergie interne (ou vice-versa) proportionnel à $\mathcal{P}_i(t)$. La forme locale de la conservation de l'énergie cinétique s'obtient directement et est

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}. \quad (1.14)$$

On peut faire exactement le même raisonnement pour un volume de contrôle et écrire les lois correspondantes.

1.1.5 Concept d'énergie potentielle

Lorsque dans le repère inertiel considéré, les forces à distances dérivent d'un potentiel $W(\mathbf{x})$, il est possible de faire apparaître le concept d'énergie potentielle que l'on définit par :

$$\mathcal{W}(t) = \int_{V(t)} \rho W dV. \quad (1.15)$$

Puisque $\mathbf{g} = -\boldsymbol{\nabla}W$, l'utilisation du théorème de Reynolds permet de déduire immédiatement la loi de conservation de l'énergie potentielle

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho W dV &= \int_{V(t)} \rho \frac{DW}{Dt} dV \\
&= \int_{V(t)} \left[\rho \frac{\partial W}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla W \right] dV \\
&= \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \nabla W dV \\
&= - \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} dV .
\end{aligned}$$

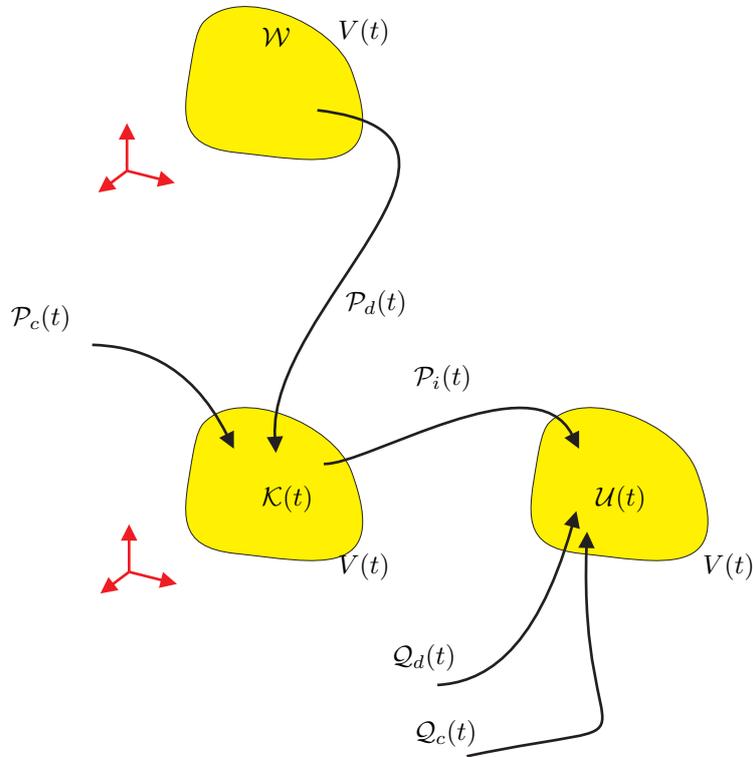


Figure 1.5: Lois de conservation de l'énergie potentielle, cinétique et interne pour un volume matériel.

Dans le cas où les forces à distance dépendent d'un potentiel, les apports et les transformations d'énergie peuvent être maintenant représentés par le diagramme de la figure 1.5. On distingue l'énergie interne, cinétique et potentielle, et on peut écrire les relations globales et locales de conservation de l'énergie potentielle et de la somme de l'énergie potentielle et cinétique.

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{W}}{dt}(t) &= -\mathcal{P}_d(t), & \forall V(t), \\
& & \forall \text{ repère inertiel}, \\
\frac{d(\mathcal{W} + \mathcal{K})}{dt}(t) &= \mathcal{P}_c(t) - \mathcal{P}_i(t), & \forall V(t), \\
& & \forall \text{ repère inertiel},
\end{aligned}
\tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}
\rho \frac{DW}{Dt} &= -\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}, \\
\rho \frac{D}{Dt} \left(W + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}.
\end{aligned}
\tag{1.17}$$

1.1.6 Concepts de pression, d'extra-tensions et d'enthalpie

En mécanique des fluides, la pression thermodynamique p joue un rôle central. C'est pourquoi on décompose le tenseur des contraintes comme suit

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau}, \tag{1.18}$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est le tenseur des extra-contraintes et $\boldsymbol{\delta}$ le tenseur identité. Dans le cas d'un fluide visqueux newtonien, ce tenseur des extra-contraintes sera uniquement formé des termes visqueux. Puisque le volume massique est $v = 1/\rho$, on définit également l'enthalpie massique H par :

$$H = U + \frac{p}{\rho}. \tag{1.19}$$

L'enthalpie d'un volume matériel est alors

$$\mathcal{H}(t) = \int_{V(t)} \rho H dV. \tag{1.20}$$

Il est dès lors possible d'utiliser H , p et $\boldsymbol{\tau}$ plutôt que U et $\boldsymbol{\sigma}$ dans l'écriture de la forme

locale de l'équation de la conservation de l'énergie. Tout d'abord observons que

$$\begin{aligned}\rho \frac{DH}{Dt} &= \rho \left(\frac{DU}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \right) \\ &= \rho \frac{DU}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}.\end{aligned}$$

En utilisant la conservation de l'énergie interne, on développe ensuite

$$\begin{aligned}\rho \frac{DH}{Dt} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}, \\ &= -p \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}, \\ &= \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \underbrace{\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} \right)}_{=0}.\end{aligned}$$

et on obtient finalement une expression locale de la conservation de l'enthalpie. Il est également possible d'écrire le théorème de l'énergie cinétique en termes de pression et d'extra-tensions et d'en déduire finalement une expression locale de la conservation de l'enthalpie massique totale $H + W + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}$.

$$\begin{aligned}\rho \frac{DH}{Dt} &= \frac{Dp}{Dt} + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} \\ \rho \frac{D}{Dt} \left(W + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) &= \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} p - \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} \quad (1.21) \\ \rho \frac{D}{Dt} \left(H + W + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) &= \frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q},\end{aligned}$$

1.2 Lois de comportement

Les lois de conservation forment un ensemble d'équations aux dérivées partielles qui doivent être complétées par des équations de constitution ou de comportement qui caractérisent le fluide considéré. L'ensemble des équations de conservation et de comportement formera alors le modèle mathématique permettant la prédiction de l'évolution du milieu.

Toutefois, la définition des équations de constitution doit obéir à certaines règles. En particulier, les équations de constitution doivent être écrites de manière à satisfaire le second principe de la thermodynamique.

1.2.1 Concept d'entropie et de température absolue

Si on désigne l'entropie massique par S et la température absolue par T , les potentiels thermodynamiques classiques, c'est-à-dire l'énergie libre massique de Helmholtz F et l'enthalpie libre massique (ou enthalpie libre de Gibbs massique) G sont définis par les expressions usuelles :

$$\begin{aligned} F &= U - TS, \\ G &= H - TS. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Et donc pour un volume matériel, on écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t) &= \int_{V(t)} \rho S dV, \\ \mathcal{F}(t) &= \int_{V(t)} \rho F dV, \\ \mathcal{G}(t) &= \int_{V(t)} \rho G dV. \end{aligned} \tag{1.23}$$

On peut donner une interprétation physique aux grandeurs $\mathcal{F}(t)$ et $\mathcal{G}(t)$ par des diagrammes de type loi de conservation. Mais ceux-ci ne peuvent s'établir que sous des hypothèses restrictives (transformations isobares et/ou isothermes) qui n'ont d'intérêt réel que dans les milieux à plusieurs constituants (milieux réactifs) ou à plusieurs phases.

Par contre, les concepts d'entropie et de température absolue permettent d'énoncer le second principe de la thermodynamique. Celui-ci est d'une nature fondamentalement différente des lois de conservation. Il exprime que pour tout volume matériel, l'accroissement d'entropie par unité de temps est au moins égal à l'apport externe d'entropie par unité de temps. La différence $\xi(t)$ est donc nécessairement positive et compte pour la production irréversible d'entropie par le système. Une relation d'égalité est évidemment associée aux transformations réversibles.

Pour un volume matériel, on obtient sur la figure 1.6 un diagramme du même type

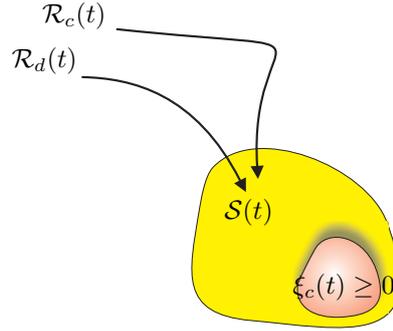


Figure 1.6: Second principe de la thermodynamique.

que pour les lois de conservation. Le second principe peut donc s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\frac{dS}{dt} \geq \mathcal{R}_d(t) + \mathcal{R}_c(t), \quad \forall V(t),} \quad (1.24)$$

où les apports externes d'entropie sont définis par

$$\mathcal{R}_d(t) = \int_{V(t)} \frac{r}{T} dV, \quad (\text{apport externe radiatif d'entropie par unité de temps}), \quad (1.25)$$

$$\mathcal{R}_c(t) = \int_{\partial V(t)} \frac{q(\mathbf{n})}{T} dS, \quad (\text{apport externe conductif d'entropie par unité de temps}).$$

Un traitement classique par usage des théorèmes de Reynolds et de Green permet d'exprimer le second principe sous une forme locale :

$$\rho \frac{DS}{Dt} \geq \frac{r}{T} - \frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\mathbf{q}}{T^2} \cdot \nabla T, \quad (1.26)$$

et d'obtenir en combinant (1.26) avec l'équation de conservation de l'énergie, l'inégalité

de Clausius-Duhem, soit en termes de U et $\boldsymbol{\sigma}$ ou en termes de H , $\boldsymbol{\tau}$ et p

$$\begin{aligned}\rho T \frac{DS}{Dt} - \rho \frac{DU}{Dt} &\geq -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T, \\ \rho T \frac{DS}{Dt} - \rho \frac{DH}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} &\geq -\boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T.\end{aligned}\tag{1.27}$$

L'inégalité de Clausius-Duhem doit être satisfaite en tout point et en tout instant. Une égalité correspond au caractère localement réversible de la transformation. Plus précisément, la formulation dite rationnelle du second principe impose que l'inégalité de Clausius-Duhem soit identiquement satisfaite pour une histoire arbitraire des variables thermodynamiques du point matériel considéré. Une telle histoire est appelée processus thermodynamique.

En toute rigueur, on notera que la formulation précédente du second principe n'est valable que pour les transformations dites proches de l'équilibre thermodynamique. Dans ce cas, on accepte l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local, ce qui permet de définir, en fonction des coordonnées et du temps, l'entropie massique comme une mesure du désordre énergétique local, et la température absolue d'une manière telle que deux corps à l'équilibre et en contact échangent immédiatement de la chaleur du corps le plus chaud vers le corps le plus froid. Par contre, lorsque les transformations sont fortement irréversibles, une formulation différentielle (et plus complexe...) du second principe est nécessaire. Cette question qui ne fait pas l'unanimité dans la communauté scientifique déborde largement le cadre de ce cours.

1.2.2 Modèle du fluide visqueux newtonien

Décomposons le tenseur des taux des déformations en une partie sphérique \mathbf{d}^s et une partie déviatoire \mathbf{d}^d de la manière suivante

$$\mathbf{d} = \underbrace{(\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d}) \frac{\boldsymbol{\delta}}{3}}_{\mathbf{d}^s} + \underbrace{(\mathbf{d} - (\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d}) \frac{\boldsymbol{\delta}}{3})}_{\mathbf{d}^d},\tag{1.28}$$

où $\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d}$ est la trace du tenseur des taux des déformation et peut aussi être notée $tr(\mathbf{d})$ ou d_{mm} .

Les équations de constitution du fluide visqueux newtonien peuvent être alors écrites comme suit

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= -p\boldsymbol{\delta} + 3\hat{\kappa}(p, T)\mathbf{d}^s + 2\hat{\mu}(p, T)\mathbf{d}^d, \\
\mathbf{q} &= -\hat{k}(p, T)\boldsymbol{\nabla}T, \\
\rho &= \hat{\rho}(p, T), \\
H &= \hat{H}(p, T), \\
S &= \hat{S}(p, T).
\end{aligned}
\tag{1.29}$$

où $\kappa = \hat{\kappa}(p, T)$ et $\mu = \hat{\mu}(p, T)$ sont respectivement les coefficients de viscosité de volume et de cisaillement, tandis que $k = \hat{k}(p, T)$ est le coefficient de conduction (ou conductibilité) thermique du fluide. Les variables thermodynamiques sont donc la pression, la température, le tenseur des taux de déformation et le gradient de température. Dans la pratique, on définit également la viscosité cinématique d'un fluide $\nu = \mu/\rho$, tandis que μ est appelé viscosité dynamique.

En conclusion, on voit que l'ensemble des 17 équations formé par les formes locales des lois de conservation et les équations de comportement forment un modèle cohérent où le nombre d'équations et d'inconnues s'équilibrent. En particulier, on constate que l'introduction de p comme variable additionnelle correspond à une équation de constitution pour la masse volumique.

conservation locale de la masse	ρ	1
conservation locale de la quantité de mouvement	\mathbf{v}	3
conservation locale de l'énergie	T	1
constitution pour les contraintes	$\boldsymbol{\sigma}$	6
constitution pour le flux calorifique	\mathbf{q}	3
constitution pour la masse volumique	p	1
constitution pour l'enthalpie	H	1
constitution pour l'entropie	S	1

Pour satisfaire identiquement l'inégalité de Clausius-Duhem pour tout processus thermodynamique, on peut montrer que les conditions nécessaires et suffisantes suivantes doivent prévaloir :

$$\boxed{
\begin{aligned}
TdS &= dH - \frac{dp}{\rho} = dU - \frac{pd\rho}{\rho^2}, \\
k &\geq 0, \\
\kappa &\geq 0, \\
\mu &\geq 0.
\end{aligned}
} \tag{1.30}$$

La relation différentielle $\rho T dS = \rho dH - dp$ peut être détaillée sous la forme

$$\left\{ \begin{aligned}
T \frac{\partial \hat{S}}{\partial p}(p, T) &= \frac{\partial \hat{H}}{\partial p}(p, T) - \frac{1}{\hat{\rho}(p, T)}, \\
T \frac{\partial \hat{S}}{\partial T}(p, T) &= \frac{\partial \hat{H}}{\partial T}(p, T).
\end{aligned} \right. \tag{1.31}$$

On voit donc que la différentielle dS doit être une différentielle exacte, les variables indépendantes étant la pression et la température.

Ceci montre comment le second principe de la thermodynamique intervient dans les modèles de mécanique des milieux continus. Même si l'entropie massique ne joue aucun rôle dans le système d'équations à résoudre, le modèle doit être tel que son existence soit assurée. En d'autres mots, on doit pouvoir intégrer la différentielle dS donnée par (1.30.1) dans le diagramme (p, T) de manière indépendante du chemin d'intégration. Ceci implique classiquement le respect de la condition suivante :

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial \hat{H}}{\partial p} - \frac{1}{\hat{\rho} T} \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial \hat{H}}{\partial T} \right) \tag{1.32}$$

Cette condition contraint les possibilités de définition des équations d'état pour H et ρ . Afin d'illustrer ceci, définissons tout d'abord la chaleur spécifique à pression constante c_p , le coefficient de diffusivité thermique α , les coefficients de dilatation thermique β , de

compressibilité γ par

$$\begin{aligned}
 c_p &= \hat{c}_p(p, T) = \frac{\partial \hat{H}}{\partial T}, \\
 \alpha &= \hat{\alpha}(p, T) = \frac{\hat{k}}{\hat{\rho} \hat{c}_p}, \\
 \beta &= \hat{\beta}(p, T) = -\frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial T}, \\
 \gamma &= \hat{\gamma}(p, T) = \frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial p}.
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

On peut alors montrer que la contrainte précédente peut s'écrire de manière équivalente comme une condition liant la chaleur spécifique à pression constante et la dérivée partielle de l'enthalpie par rapport à la pression

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial \hat{H}}{\partial p} - \frac{1}{\hat{\rho} T} \right) &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial \hat{H}}{\partial T} \right) \\
 -\frac{1}{T^2} \frac{\partial \hat{H}}{\partial p} + \frac{1}{T} \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial p \partial T} + \frac{1}{\rho T^2} + \frac{1}{\rho^2 T} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial T} &= \frac{1}{T} \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial p \partial T}, \\
 -\frac{\partial \hat{H}}{\partial p} + \frac{1}{\rho} + \frac{T}{\rho^2} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial T} &= 0.
 \end{aligned}$$

On obtient donc la relation

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial p} = \frac{1}{\rho} (1 - T\beta). \tag{1.34}$$

Interprétation physique du fluide visqueux newtonien

Afin de bien comprendre le sens physique des équations de constitution du fluide visqueux newtonien, il faut, d'une part, observer que les contraintes se composent d'un terme isotrope de pression et de deux termes visqueux. Ces derniers sont chacun le produit d'un coefficient de viscosité par un facteur proportionnel à la vitesse de déformation (la trace ou le déviateur du tenseur des vitesses de déformation) qui mesure soit la vitesse de dilatation (ou compression), soit la vitesse de cisaillement. Ainsi, les contraintes visqueuses

disparaissent non pas en l'absence de déformation (par retour de la matière à l'état initial), mais quand la déformation cesse d'évoluer. Ceci marque la différence fondamentale entre les fluides visqueux où les contraintes sont proportionnelles à la vitesse de déformation et les solides élastiques où les contraintes sont proportionnelles aux déformations elles-mêmes. Il est aussi important de préciser qu'un grand nombre de matériaux ne sont pas correctement caractérisés, ni par un modèle de fluide newtonien, ni par un modèle de solide élastique. On recourt alors à des modèles de fluides non-newtoniens ou des modèles viscoélastiques qui incluent des effets de mémoire dans l'équation de comportement. Ce qui n'est pas le cas du modèle newtonien où toute l'histoire passée du point matériel considéré se résume à la valeur actuelle de pression et de température.

Afin de quantifier les taux de déformation subie par un matériau, on définit le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ par la relation

$$\dot{\gamma}^2 = 2\mathbf{d}^d : \mathbf{d}^d. \quad (1.35)$$

Il s'agit donc d'une norme du déviateur du tenseur des taux de déformation.

D'autre part, il faut observer que l'équation de constitution du flux de chaleur est gouvernée par la loi de Fourier. Ceci modélise le fait que dans un matériau isotrope, comme les fluides classiques, la chaleur va du chaud au froid et est directement opposée au gradient de température. Enfin, les équations d'état de H , S et ρ font partie de la thermodynamique classique et illustrent le fait que l'état du fluide visqueux newtonien à un endroit et à un instant donnés est caractérisé par la pression et la température locales.

Finalement, il est intéressant d'écrire l'inégalité de Clausius-Duhem pour un fluide visqueux newtonien

$$\left[\kappa(\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d})^2 + 2\mu\mathbf{d}^d : \mathbf{d}^d + \frac{k}{T}\boldsymbol{\nabla}T \cdot \boldsymbol{\nabla}T \right] \geq 0, \quad (1.36)$$

Cette relation montre que toutes les irréversibilités thermodynamiques proviennent des effets visqueux (proportionnels à la viscosité du fluide) et des transferts de chaleur par conduction (proportionnels au coefficient de conduction du fluide).

Formulation en pression, vitesse et température

Le système formé par les 5 équations de conservation et les 12 équations de constitution est fermé puisqu'il comporte autant d'équations que d'inconnues. On rappelle que les forces à distance et les apports radiatifs sont externes et sont donc des données du problème au même titre que les forces de contacts et les apports de chaleur par conduction. Le système peut être considérablement simplifié si l'on injecte les équations de constitution dans les lois de conservation, sans plus se préoccuper de l'entropie, et en gardant la pression, les vitesses et la température comme inconnues de base. C'est ce qu'on désigne par formulation pression-vitesse-température du problème.

Après calculs, les équations de masse, de mouvement et d'énergie prennent la forme :

$$\begin{aligned}\gamma \frac{Dp}{Dt} - \beta \frac{DT}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla p + \nabla(\kappa \boldsymbol{\delta} : \mathbf{d}) + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{d}^d) + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c_p \frac{DT}{Dt} - \beta T \frac{Dp}{Dt} &= \kappa (\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d})^2 + 2\mu (\mathbf{d}^d : \mathbf{d}^d) + r + \nabla \cdot (k \nabla T),\end{aligned}\tag{1.37}$$

où, pour des raisons de commodité et de clarté, les expressions \mathbf{d} et \mathbf{d}^d ainsi que l'opérateur de la dérivée matérielle n'ont pas été détaillés en termes de vitesses. De plus, les coefficients β , γ , ρ , κ , μ , c_p et k doivent être compris comme des fonctions données de la pression et de la température. On obtient donc bien 5 équations à 5 inconnues.

De nombreuses simplifications peuvent être introduites dans le système ci-dessus. Avant de les présenter, il convient d'observer que tout fluide réel est toujours tant soit peu compressible, tant soit peu visqueux et qu'il conduit toujours tant soit peu la chaleur. Les simplifications usuelles doivent donc être considérées comme des approximations dont la validité effective relève de l'analyse dimensionnelle.

Les simplifications les plus courantes sont :

- fluide incompressible : $\gamma = 0$,
- fluide indilatable : $\beta = 0$,
- écoulement incompressible : $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$,
- écoulement incompressible et irrotationnel : $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$,
- transformations adiabatiques : $q = r = 0$.

Dans la pratique, l'expression *fluide incompressible* désigne souvent un modèle de fluide incompressible et indilatable, tandis que l'expression *écoulement incompressible* désigne un problème où le champ de vitesse est à divergence nulle.

L'utilisation adéquate de ces approximations ou simplifications est un des aspects les plus importants de la modélisation mathématique d'un écoulement réel. On notera ainsi que l'écoulement particulier d'un fluide réel connu pour être compressible peut parfois être parfaitement représenté par un modèle d'écoulement incompressible, si le champ de vitesse de cet écoulement est à divergence nulle.

1.2.3 Modèle du gaz idéal

Dans le cadre du modèle du fluide visqueux newtonien, une équation d'état possible pour la masse volumique est celle du gaz idéal (aussi appelé gaz parfait):

$$\hat{\rho}(p, T) = \frac{p}{RT}, \quad (1.38)$$

où $R = \mathcal{R}/m$ est la constante du gaz idéal considéré.

Dans ce cas, la condition (1.34) devient

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial p} = \frac{1}{\rho} \left(1 - \underbrace{\frac{p}{\rho RT}}_{=1} \right) = 0, \quad (1.39)$$

ce qui implique que l'enthalpie massique et la chaleur massique à pression constante ne dépendent que de la température. Il est ensuite facile de montrer qu'il en est de même pour l'énergie interne massique et la chaleur spécifique à volume constant.

Typiquement, on obtient de cette manière les propriétés suivantes pour un gaz idéal :

$$\begin{aligned} dU &= \hat{c}_v(T) dT, \\ dH &= \hat{c}_p(T) dT, \\ R &= \hat{c}_p(T) - \hat{c}_v(T). \end{aligned} \quad (1.40)$$

où la chaleur spécifique à volume constant est définie par :

$$c_v = \hat{c}_v(T) = \frac{\partial \hat{U}}{\partial T}. \quad (1.41)$$

1.2.4 Écoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien

Lorsqu'on introduit l'hypothèse d'incompressibilité et d'indilatabilité, on obtient le modèle de l'écoulement incompressible du fluide visqueux newtonien.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} &= -p\boldsymbol{\delta} + 2\hat{\mu}(p, T)\mathbf{d}, \\
 \mathbf{q} &= -\hat{k}(p, T)\nabla T, \\
 U &= \hat{U}(T), \\
 S &= \hat{S}(T).
 \end{aligned}
 \tag{1.42}$$

Pour satisfaire identiquement l'inégalité de Clausius-Duhem pour tout processus thermodynamique, on peut, à nouveau, montrer que les conditions nécessaires et suffisantes suivantes doivent prévaloir :

$$\begin{aligned}
 \rho T dS &= \rho dH - dp, \\
 k &\geq 0, \\
 \mu &\geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.43}$$

En particulier, l'utilisation de (1.34) devient

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial p} = \frac{1}{\rho},
 \tag{1.44}$$

ce qui implique bien que l'énergie interne ne peut dépendre que de la température. N'ayant plus d'intérêt ici à distinguer chaleur spécifique à volume ou à pression constante, nous définirons simplement la chaleur spécifique c comme étant

$$c = \hat{c}(T) = \frac{\partial \hat{U}}{\partial T} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial T},
 \tag{1.45}$$

dans le cas d'un modèle d'écoulement incompressible.

Formulation en pression, vitesse et température

Le système formé par les équations de conservation et les équations de constitution peut, à nouveau, être considérablement simplifié si l'on injecte les équations de constitution dans les lois de conservation.

Après calculs, les équations de la formulation pression-vitesse-température du problème prennent la forme :

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\
 \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{d}) + \rho \mathbf{g}, \\
 \rho c \frac{DT}{Dt} &= 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + \nabla \cdot (k \nabla T),
 \end{aligned} \tag{1.46}$$

1.3 Conditions aux limites

Dans le formalisme de la mécanique des milieux continus, le problème à résoudre porte le plus souvent sur la prédiction de l'évolution des champs inconnus dans un volume matériel ou un volume de contrôle. Dans la mécanique des fluides classique, les champs inconnus sont, en général, la pression, les vitesses et la température, tandis que le domaine d'étude est généralement un volume de contrôle, puisque les fluides sont susceptibles de subir d'énormes déformations. Il est donc préférable de s'attacher à l'étude d'un volume fixe de l'espace pour un observateur déterminé.

Pour définir correctement un problème, il faut spécifier le modèle (par exemple, le modèle de fluide visqueux newtonien en formulation pression-vitesse-température), mais également préciser complètement l'action de l'extérieur sur le système. Cette action comprend des effets à distance, ainsi que les conditions initiales et aux frontières.

Les effets à distance se limitent aux forces de masse (\mathbf{g}) et à la puissance radiative volumique (r) qui sont donc bien des données du problème.

Les conditions initiales et les conditions frontières peuvent prendre des formes extrêmement différentes et il est très difficile d'en donner une description systématique. Toutefois, il faut observer que la matière ne s'arrête pas aux frontières du domaine considéré et que son évolution ne commence pas au temps initial. Comme il est impossible d'étendre sans limite le domaine d'analyse et de reculer arbitrairement le temps initial où démarre l'analyse, on devra donc effectuer un compromis. En pratique, on choisit donc des frontières telles que certaines informations puissent y être considérées comme approximativement correctes. Mais il ne s'agit que d'un modèle de la réalité : on doit donc toujours garder à l'esprit, et en particulier pour les problèmes thermiques, le fait que ces conditions ne sont qu'une approximation de la réalité.

Conditions initiales

Pour un fluide visqueux newtonien quelconque, les conditions initiales consistent à spécifier les champs de pression, de vitesse et de température au temps initial.

Lorsqu'on suppose que l'écoulement est incompressible, il ne faut plus imposer que les vitesses et la température. Ce fait est lié à la nature mathématique des équations aux dérivées partielles associées à ce problème. De manière purement intuitive, ceci peut être expliqué par le fait que le terme d'évolution temporelle disparaît dans l'équation de conservation de la masse qui est associée au champ de pression. Dans le cas incompressible, la pression s'adapte instantanément à l'écoulement à chaque instant, sans le retard dû à la propagation des ondes acoustiques.

Conditions aux frontières

En restant dans le cas d'un fluide visqueux newtonien, trois ou quatre conditions mécaniques et une condition thermique doivent être spécifiées le long de toutes les frontières. Le long des parois, le fluide est supposé coller et on impose donc que la vitesse du fluide soit égale à la vitesse de la paroi solide. Il faut y ajouter une condition thermique, en prescrivant soit la température à la paroi, soit le flux de chaleur sortant à travers celle-ci. Le long d'une section d'entrée, il est usuel d'imposer la pression, le profil de vitesse et la température. Par contre, le long des sections de sortie du domaine, on impose généralement des conditions moins strictes de façon à éviter la génération de zones minces de transition indésirables. On impose seulement la composante normale de la force de contact, en exigeant que les composantes tangentielles de la vitesse (ou les composantes tangentielles de la force de contact) soient nulles. On agit de même pour la condition thermique en imposant un flux de chaleur nul.

Il est essentiel d'observer que les conditions aux frontières changent complètement lorsque l'une des simplifications classiques (écoulement incompressible, écoulement incompressible et irrotationnel, transformations adiabatiques) est introduite. A titre d'exemple, mentionnons seulement les points suivants :

- Pour un écoulement incompressible et irrotationnel ou écoulement de fluide parfait, seule une condition sur la composante normale de la vitesse peut être appliquée le long d'une paroi. Le fluide glisse sur les parois.
- Il ne faut pas imposer la pression aux sections d'entrée, dans le cas incompressible.
- Il n'y a pas de conditions thermiques à spécifier sur les parois et les sections de sortie, dans le cas d'un écoulement en transformations adiabatiques (sans échange de chaleur).

Conditions d'interface

Dans de très nombreux problèmes, des interfaces de forme inconnue entre deux fluides (ou entre un fluide et un solide) doivent être considérées. On parle alors de problème à frontière libre. En général, on impose à l'interface la continuité des vitesses, des forces de contact, de la température et du flux de chaleur. A nouveau, les simplifications classiques modifient les conditions d'interface qu'il faut appliquer.

D'autre part, des phénomènes physiques supplémentaires importants peuvent être en jeu. Par exemple, la présence d'effets capillaires modifie les conditions de forces de contact à l'interface de deux fluides, tandis que la chaleur latente de fusion ou d'évaporation doit être prise en compte pour des problèmes de changement de phase solide-liquide ou liquide-gaz.

Chapitre 2

Écoulements incompressibles établis

Un écoulement établi est un écoulement dont le profil transversal de vitesse est le même quelle que soit la section (transversale à l'écoulement) où on mesure ce profil. “Établi” signifie donc “complètement développé” (“fully developed”). Les écoulements établis ne peuvent donc se rencontrer qu'en écoulement avec section de passage invariable le long de l'écoulement: écoulement entre deux plaques planes séparées par une distance invariable, écoulement en conduite cylindrique de section circulaire invariable, écoulement en conduite cylindrique de section non circulaire (e.g., carré, rectangle, etc.) invariable. Pour la suite, la direction de l'écoulement est la direction x .

A noter que le profil de vitesse pour un écoulement à section invariable n'est pas nécessairement établi: par exemple, si on connecte une très longue conduite de section invariable à la base d'un réservoir rempli d'un fluide, et qu'on laisse le fluide s'écouler par l'autre bout de la conduite, il faudra compter une distance non-négligeable à partir de la sortie du réservoir pour que l'écoulement s'“établisse” (i.e., se développe complètement). Nous y reviendrons plus loin.

En résumé: avoir une section invariable est une condition nécessaire mais non suffisante pour assurer un écoulement établi.

2.1 Écoulements de Hagen-Poiseuille et de Couette

Écoulements plans

Considérons l'écoulement bidimensionnel et établi entre deux plaques planes, fixes, et séparées par une distance $d = 2h$ (Poiseuille, 1840, d'où le nom d'écoulement de Poiseuille). Le système de coordonnées est centré entre les plaques, avec x la direction de l'écoulement et y la direction perpendiculaire à l'écoulement, voir Fig. 2.1. Comme l'écoulement est établi, on a, par définition, que $u = u(y)$ et donc que $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. La continuité implique donc

que $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$. L'intégration de cette équation implique que $v = v(x)$ au plus. Comme on a que $v = 0$ à la paroi, on en conclut, finalement, que $v = 0$ partout.

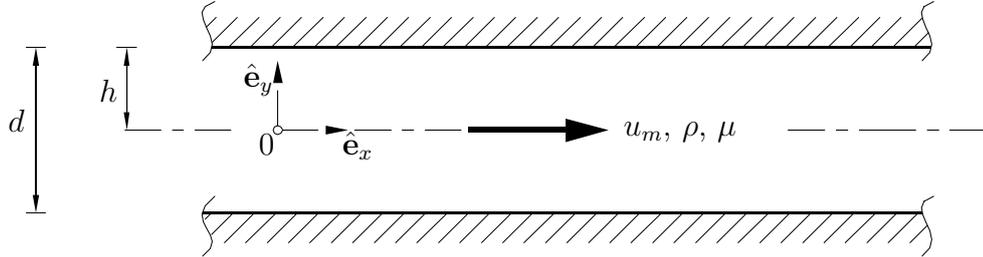


Figure 2.1: Écoulement établi entre deux plaques.

On considère ensuite les équations de quantité de mouvement. Comme $v = 0$, l'équation en y donne: $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$. La pression ne dépend donc que de x . De l'équation en x , on obtient:

$$0 = -\frac{dP}{dx} + \nu \frac{d^2 u}{dy^2}. \quad (2.1)$$

Donc, pour de tels écoulements, les termes non-linéaires de convection s'annulent exactement, et ce indépendamment du nombre de Reynolds. En particulier, le nombre de Reynolds ne doit pas nécessairement être petit.

Comme $P = P(x)$ et $u = u(y)$, on a:

$$\frac{dP}{dx} = \nu \frac{d^2 u}{dy^2} = C \quad (2.2)$$

où C est une constante. Cette constante est négative car la pression diminue en x en raison des pertes de charge. Le profil de vitesse est donc finalement obtenu par intégration:

$$u(y) = \left(\frac{dP}{dx}\right) \frac{1}{\nu} \left(\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2\right). \quad (2.3)$$

Avec la condition que $u(-h) = u(h) = 0$, on obtient:

$$u(y) = \left(-\frac{dP}{dx}\right) \frac{h^2}{2\nu} \left(1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right) = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{h^2}{2\mu} \left(1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right). \quad (2.4)$$

Le profil de vitesse est donc parabolique, comme illustré sur la Fig. 2.2. La vitesse maximale est la vitesse au centre:

$$u_c = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{h^2}{2\mu}. \quad (2.5)$$

Le débit volumique (par unité de profondeur) est aussi facilement obtenu:

$$Q = 2 \int_0^h u(y) dy = \frac{2}{3} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{h^3}{\mu} = \frac{4}{3} h u_c . \quad (2.6)$$

La vitesse de débit est définie comme étant le débit volumique (par unité de profondeur) divisé par la section de passage:

$$u_m = \frac{Q}{2h} = \frac{2}{3} u_c . \quad (2.7)$$

On a donc aussi, pour le profil de vitesse:

$$u(y) = \frac{3}{2} u_m \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right) . \quad (2.8)$$

La vitesse maximale est égale à 3/2 de la vitesse de débit.

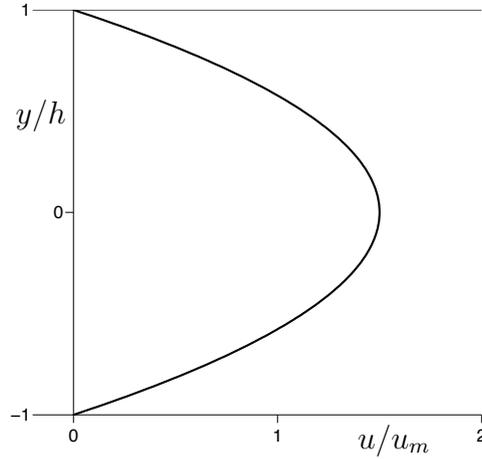


Figure 2.2: Profil de vitesse pour l'écoulement de Poiseuille entre deux plaques.

La contrainte de frottement à la paroi est:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=-h} = -\mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=h} = \left(-\frac{dp}{dx} \right) h = \frac{2\mu u_c}{h} = \frac{3\mu u_m}{h} . \quad (2.9)$$

Le coefficient adimensionnel de frottement, C_f , est défini comme étant la contrainte de frottement divisée par la pression dynamique (basée sur la vitesse de référence, u_m):

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho u_m^2 / 2} . \quad (2.10)$$

On obtient donc:

$$C_f = \frac{6\mu}{\rho h u_m} = \frac{6\nu}{h u_m} = \frac{12}{Re_d} \quad (2.11)$$

avec $Re_d = u_m d / \nu$ le nombre de Reynolds de l'écoulement (avec la normalisation classique qui utilise comme vitesse de référence la vitesse de débit, et comme longueur de référence la distance entre les plaques, $d = 2h$).

On utilise aussi souvent le coefficient de perte de charge, λ , défini par:

$$\left(-\frac{dp}{dx}\right) = \frac{\rho u_m^2}{2} \frac{\lambda}{d}. \quad (2.12)$$

En comparant C_f et λ , on obtient immédiatement que

$$\lambda = 2 C_f. \quad (2.13)$$

Donc, pour les pertes de charge, on a:

$$\lambda = \frac{24}{Re_d}. \quad (2.14)$$

Un autre type d'écoulement est l'écoulement de Couette: $u(-h) = 0$ et $u(h) = U$, sans gradient de pression. On a alors:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0. \quad (2.15)$$

Le profil de vitesse est obtenu par intégration, voir Fig. 2.3:

$$u(y) = \frac{U}{2} \left(1 + \frac{y}{h}\right). \quad (2.16)$$

Finalement, une combinaison linéaire des deux écoulements ci-dessus correspond au cas Poiseuille-Couette combinés: $u(-h) = 0$ et $u(h) = U$, avec gradient de pression. Le profil de vitesse est aussi obtenu par combinaison linéaire:

$$u(y) = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{h^2}{2\mu} \left(1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right) + \frac{U}{2} \left(1 + \frac{y}{h}\right). \quad (2.17)$$

A noter que l'approche par combinaison linéaire est rendue possible par le fait que les termes non-linéaires de convection s'annulent exactement. Les profils de vitesse d'écoulements de type Poiseuille-Couette sont donnés à la Fig. 2.4, en fonction du paramètre adimensionnel $\beta = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{h^2}{2\mu U}$. Le cas Couette pur correspond à $\beta = 0$. Pour les écoulements avec pertes de charge ($\beta > 0$), la vitesse $u(y)$ est toujours supérieure à celle de l'écoulement de Couette. Il n'en va pas de même pour les écoulements avec "gains" de charge ($\beta < 0$): la vitesse $u(y)$ est alors toujours inférieure à celle de l'écoulement de Couette. En fait, pour $\beta < -1/4$, on a même des vitesses négatives.

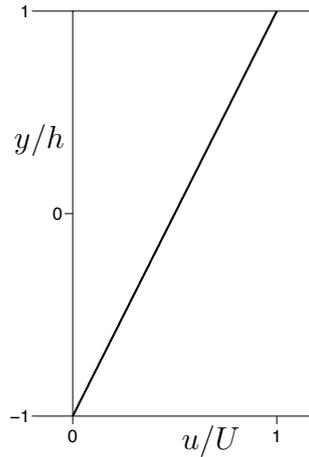


Figure 2.3: Profil de vitesse pour l'écoulement de Couette entre deux plaques.

Écoulements axisymétriques

Considérons ensuite l'écoulement axisymétrique en conduite cylindrique de section circulaire de diamètre $D = 2R$ (Hagen 1839 et Poiseuille, 1840, d'où le nom d'écoulement de Hagen-Poiseuille). Le système de coordonnées est centré, avec x la direction de l'écoulement et r la direction radiale, voir Fig. 2.5. Comme l'écoulement est établi, on a, par définition, que $u = u(r)$ et donc que $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. La continuité implique donc que $\frac{\partial}{\partial r}(r v) = 0$. L'intégration de cette équation implique que $r v = f(x)$ au plus. Comme on a que $v = 0$ à la paroi $r = R$, on obtient $f(x) = 0$. On conclut donc, finalement, que $v = 0$ partout.

On considère ensuite les équations de quantité de mouvement. Comme $v = 0$, l'équation en r donne: $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$. La pression ne dépend donc que de x . De l'équation en x , on obtient:

$$0 = -\frac{dP}{dx} + \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right). \quad (2.18)$$

De nouveau, les termes non-linéaires de convection s'annulent exactement pour de tels écoulements. Le profil de vitesse est obtenu par intégration:

$$u(r) = \left(\frac{dP}{dx} \right) \frac{1}{\nu} \left(\frac{r^2}{4} + C_1 \log r + C_2 \right). \quad (2.19)$$

Avec les conditions impliquant que $u(R) = 0$ et que la solution ne soit pas singulière en $r = 0$, on obtient:

$$u(r) = \left(-\frac{dP}{dx} \right) \frac{R^2}{4\nu} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{h^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right). \quad (2.20)$$

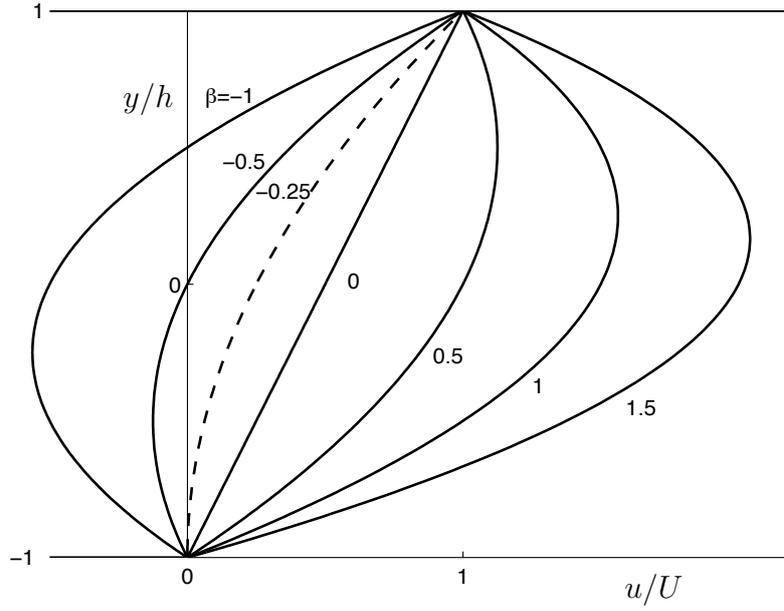


Figure 2.4: Profils de vitesse pour les écoulements de Poiseuille-Couette entre deux plaques.

Le profil de vitesse est donc de nouveau parabolique. La vitesse maximale est au centre:

$$u_c = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{R^2}{4\mu} . \quad (2.21)$$

Le débit est obtenu par intégration du profil de vitesse, avec $dA = dr r d\theta$:

$$Q = \int_A u(r) dA = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R u(r) r dr = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{\pi R^4}{8\mu} = \frac{\pi R^2 u_c}{2} . \quad (2.22)$$

La vitesse de débit est donc:

$$u_m = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{u_c}{2} , \quad (2.23)$$

et on a aussi:

$$u(r) = 2 u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) . \quad (2.24)$$

La vitesse maximale est donc égale à deux fois la vitesse de débit.

La contrainte de frottement à la paroi est:

$$\tau_w = -\mu \left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R} = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{R}{2} = \frac{2\mu u_c}{R} = \frac{4\mu u_m}{R} , \quad (2.25)$$

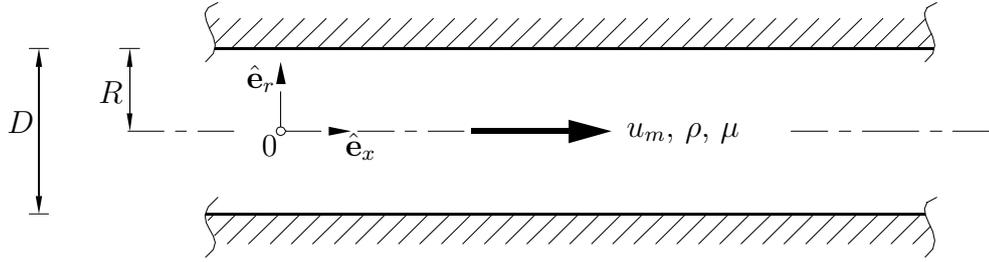


Figure 2.5: Ecoulement établi en conduite circulaire.

ce qui donne, pour le coefficient de frottement:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho u_m^2 / 2} = \frac{8\mu}{\rho R u_m} = \frac{8\nu}{R u_m} = \frac{16}{Re_D} \quad (2.26)$$

avec $Re_D = u_m D / \nu$ le nombre de Reynolds de l'écoulement qui est ici basé sur la vitesse de débit et sur le diamètre de la conduite. Le coefficient de perte de charge est ici défini par:

$$\left(-\frac{dp}{dx} \right) = \frac{\rho u_m^2}{2} \frac{\lambda}{D}. \quad (2.27)$$

En comparant C_f et λ , on obtient immédiatement que

$$\lambda = 4 C_f. \quad (2.28)$$

Finalement, pour les pertes de charge en conduites circulaires, on a:

$$\lambda = \frac{64}{Re_D}. \quad (2.29)$$

A noter que le cas des écoulements entre deux cylindres concentriques de diamètres D_i ("inner diameter") et D ("outer diameter") est aussi facilement obtenu: il suffit de déterminer les constantes d'intégration du profil de vitesse, C_1 et C_2 , afin de satisfaire les conditions aux limites: $u(R_i) = u(R) = 0$. Il s'agit là encore d'écoulements de type Hagen-Poiseuille, voir Fig. 2.7.

Finalement, on peut même considérer le cas où il y a une vitesse relative de translation entre les deux cylindres: soit Couette (sans gradient de pression), voir Fig. 2.8, soit même Hagen-Poiseuille et Couette combinés (avec gradient de pression).

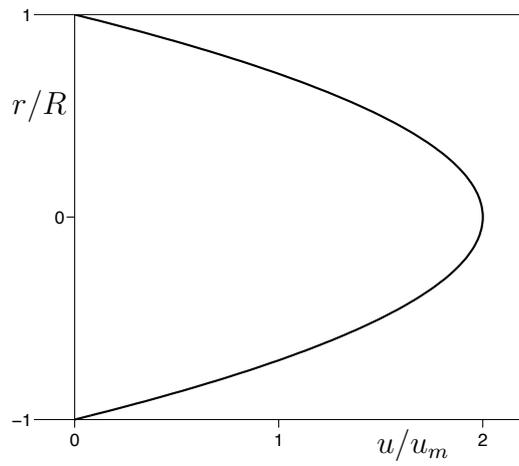


Figure 2.6: Profil de vitesse pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille en conduite circulaire.

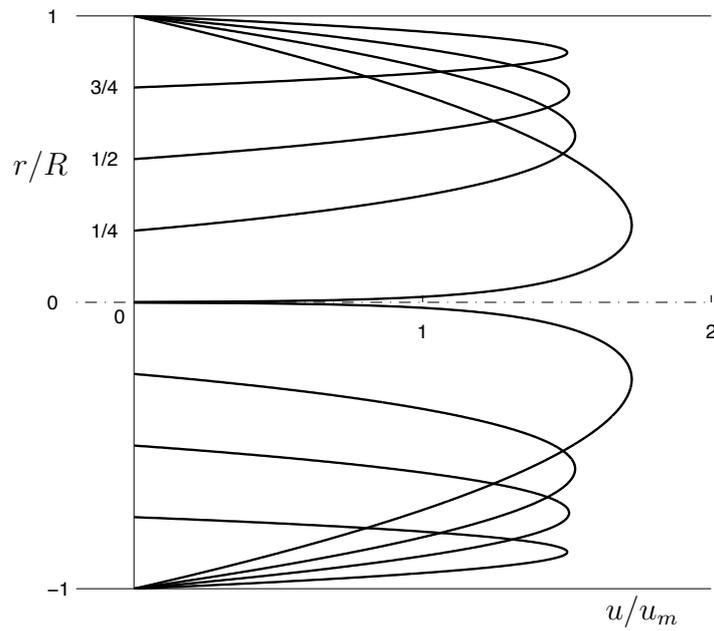


Figure 2.7: Profils de vitesse pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille en conduite circulaire avec cylindre interne. Cas $D_i/D = 0, 1/4, 1/2$ et $3/4$.

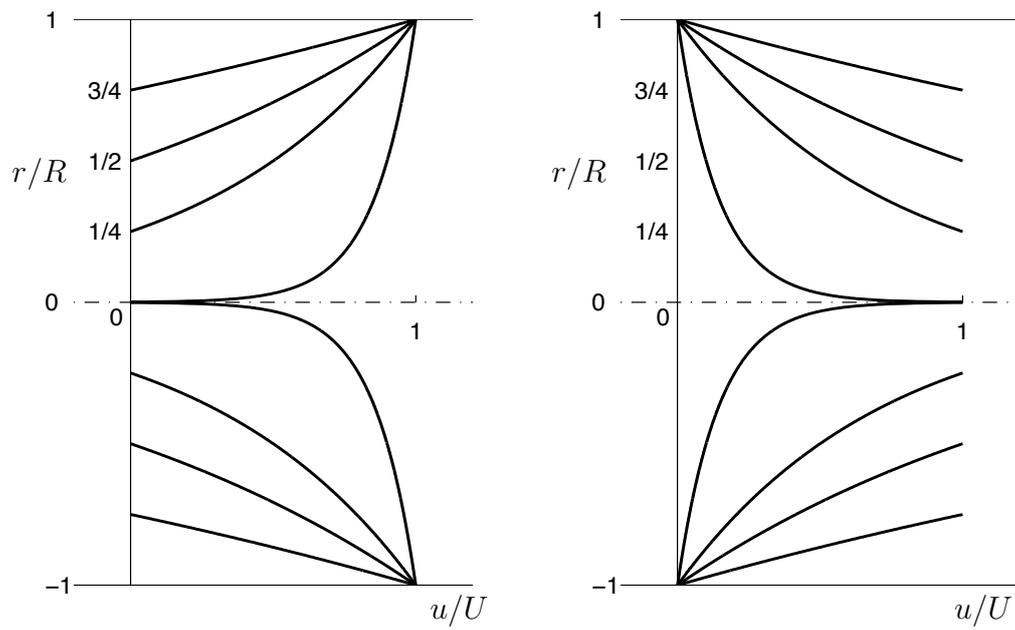


Figure 2.8: Profils de vitesse pour l'écoulement de Couette en conduite circulaire avec cylindre interne. Cas $D_i/D = 0, 1/4, 1/2$ et $3/4$. Gauche: cas avec cylindre intérieur fixe et cylindre extérieur mobile. Droite: cas avec cylindre intérieur mobile et cylindre extérieur fixe.

2.2 Ecoulements instationnaires

2.2.1 Démarrage brusque de l'écoulement dans une conduite

Pour un écoulement établi mais instationnaire en conduite, on a avec $u = u(r, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{dP}{dx} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (2.30)$$

Considérons tout d'abord le problème du démarrage brusque de l'écoulement dans une conduite: pour $t < 0$, il n'y a pas de gradient de pression imposé à la conduite, et donc pas d'écoulement $u(r, t < 0) = 0$. Pour $t > 0$, un gradient de pression constant est imposé à la conduite. Un écoulement "démarré" donc au sein de celle-ci en $t = 0_+$, tout en respectant la condition de non-glissement à la paroi: $u(R, t) = 0$. Clairement, il s'agit d'un problème aux conditions initiale et limite bien posé. On sait que, pour $t \rightarrow \infty$, l'écoulement tendra vers l'écoulement de Poiseuille, $u = u(r) = u_c \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$ avec $u_c = 2 u_m = - \left(\frac{dP}{dx} \right) \frac{R^2}{4\nu}$, écoulement qui satisfait l'équation,

$$0 = -\frac{dP}{dx} + \nu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right), \quad (2.31)$$

ainsi que la condition limite de non-glissement à la paroi. Par soustraction des équations ci-dessus, on obtient l'équation pour la fonction "différence entre $u(r, t \rightarrow \infty)$ et $u(r, t)$ ". Appelons cette fonction $\tilde{u}(r, t)$. On a donc que $\tilde{u}(r, t)$ satisfait

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right), \quad (2.32)$$

avec, comme condition initiale, $\tilde{u}(r, 0) = u_c \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$ et, comme condition limite, $\tilde{u}(R, t) = 0$. Comme dans le problème de l'entrée thermique (Grätz), on travaille en variables adimensionnelles en définissant:

$$\tilde{u}^* = \frac{\tilde{u}}{u_c}, \quad \eta = \frac{r}{R}, \quad \zeta = \frac{\nu t}{R^2}, \quad (2.33)$$

ce qui donne

$$\frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial \zeta} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial \eta} \right), \quad (2.34)$$

avec $\tilde{u}^*(\eta, 0) = (1 - \eta^2)$ et $\tilde{u}^*(1, \zeta) = 0$. Le problème est clairement séparable: $\tilde{u}^* = f(\eta) g(\zeta)$, ce qui donne:

$$f \frac{dg}{d\zeta} = \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{df}{d\eta} \right) g, \quad (2.35)$$

et donc:

$$\frac{1}{g} \frac{dg}{d\zeta} = \frac{1}{\eta f} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{df}{d\eta} \right) = -\lambda^2, \quad (2.36)$$

ou encore:

$$\frac{dg}{d\zeta} + \lambda^2 g = 0, \quad (2.37)$$

$$\eta \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{df}{d\eta} + \lambda^2 \eta f = 0. \quad (2.38)$$

La fonction g est donc de la forme $g = C e^{-\lambda^2 \zeta}$, et la solution du problème est construite comme:

$$\tilde{u}^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(\eta) e^{-\lambda_n^2 \zeta} \quad (2.39)$$

avec

$$\eta^2 \frac{d^2 f_n}{d\eta^2} + \eta \frac{df_n}{d\eta} + \lambda_n^2 \eta^2 f_n = 0, \quad (2.40)$$

l'équation de Bessel d'ordre 0 dont les solutions sont $J_0(\lambda_n \eta)$ et $Y_0(\lambda_n \eta)$. Cette dernière étant non bornée à l'origine est donc à rejeter. La solution du problème s'exprime donc sous la forme:

$$\tilde{u}^*(\eta, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n \eta) e^{-\lambda_n^2 \zeta}. \quad (2.41)$$

L'imposition de la condition à la limite, $\tilde{u}^*(1, \zeta) = 0$, implique que les λ_n (i.e., les valeurs propres) sont les zéros successifs de la fonction de Bessel J_0 . L'imposition de la condition initiale, $\tilde{u}^*(\eta, 0) = (1 - \eta^2)$ demande que

$$(1 - \eta^2) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n \eta), \quad (2.42)$$

ce qui, par l'orthogonalité des fonctions de Bessel, permet de déterminer les C_n . En multipliant Eq. (2.42) par $\eta J_0(\lambda_m \eta)$ et en intégrant, on obtient donc:

$$\int_0^1 \eta (1 - \eta^2) J_0(\lambda_m \eta) d\eta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^1 \eta J_0(\lambda_m \eta) J_0(\lambda_n \eta) d\eta = C_m \frac{1}{2} (J_1(\lambda_m))^2. \quad (2.43)$$

Comme $\int s J_0(s) ds = s J_1(s)$, et que $\int s^3 J_0(s) ds = s^3 J_1(s) + 2s^2 J_0(s) - 4 \int s J_0(s) ds$, on obtient finalement que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \eta (1 - \eta^2) J_0(\lambda_m \eta) d\eta &= \\ \frac{1}{\lambda_m} [\eta (1 - \eta^2) J_1(\lambda_m \eta)]_0^1 &- \frac{2}{\lambda_m^2} [\eta^2 J_0(\lambda_m \eta)]_0^1 + \frac{4}{\lambda_m^3} [\eta J_1(\lambda_m \eta)]_0^1 \\ &= \frac{4}{\lambda_m^3} J_1(\lambda_m). \end{aligned} \quad (2.44)$$

On a donc, pour le coefficient C_m :

$$C_m = \frac{8}{\lambda_m^3 J_1(\lambda_m)}. \quad (2.45)$$

Finalement, la solution est:

$$\tilde{u}^*(\eta, \zeta) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \eta)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \zeta}, \quad (2.46)$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_c} &= (1 - \eta^2) - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \eta)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \zeta}, \\ &= \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\lambda_n \frac{r}{R}\right)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{\nu t}{R^2}\right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

L'établissement du profil de vitesse est donné à la Fig. 2.9.

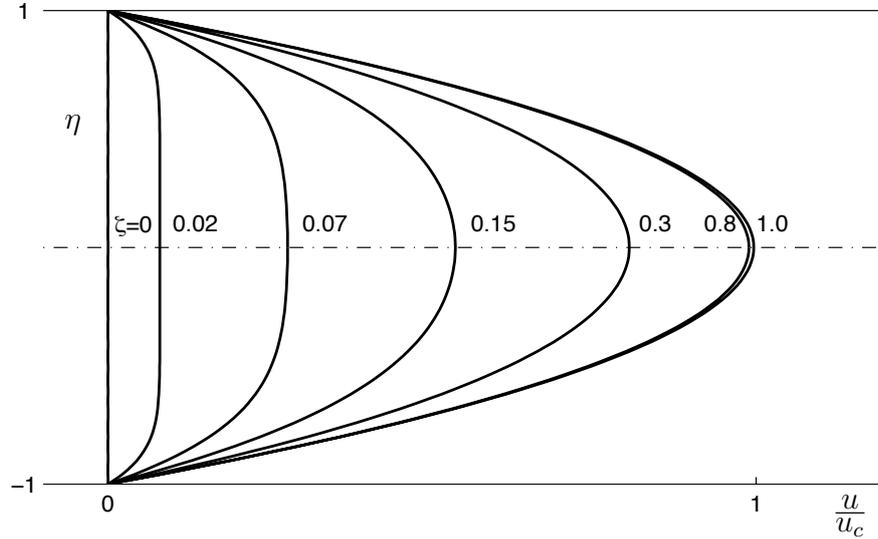


Figure 2.9: Démarrage brusque d'un écoulement de Poiseuille en conduite circulaire: développement du profil de vitesse.

Combien de temps faut-il pour établir un tel écoulement? Le temps caractéristique d'établissement est essentiellement déterminé par le terme exponentiel qui décroît le moins rapidement: $e^{-\lambda_1^2 \zeta}$. On a donc, comme estimation du temps caractéristique de développement (pour passer de 1 à e^{-1} dans le facteur exponentiel dominant),

$$\zeta_c \approx \frac{1}{\lambda_1^2} = 0.173. \quad (2.48)$$

Plus précisément, examinons la vitesse au centre de la conduite:

$$\frac{u}{u_c}(0, \zeta) = 1 - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \zeta}. \quad (2.49)$$

Pour $\zeta > \zeta_c$, cela donne

$$\frac{u}{u_c}(0, \zeta > \zeta_c) \approx 1 - \frac{8}{\lambda_1^3 J_1(\lambda_1)} e^{-\lambda_1^2 \zeta} = 1 - 1.108 e^{-5.783 \zeta} . \quad (2.50)$$

Par exemple, le temps de développement tel que la vitesse au centre de la conduite soit égale à 99% de la vitesse maximum, est

$$\zeta_{c,0.99} = \frac{\nu t_{c,99}}{R^2} \approx 0.814 , \quad (2.51)$$

estimation qui est effectivement confirmée par la Fig. 2.9. Celui tel que la vitesse soit égale à 95% de la vitesse maximum est

$$\zeta_{c,0.95} = \frac{\nu t_{c,95}}{R^2} \approx 0.536 . \quad (2.52)$$

Il y a manifestement un certain parallèle entre l'écoulement établi et instationnaire correspondant à un démarrage brusque en conduite, et celui de la zone d'entrée pour l'établissement d'un écoulement stationnaire en conduite. En effet, on constate que, pour chaque problème, il y a développement (temporel ou spatial, selon le cas) d'une couche limite qui émane de la paroi, diffuse, et éventuellement occupe toute la section de la conduite pour former ainsi l'écoulement de Poiseuille. Il y a cependant aussi des différences notables. Dans le cas du développement spatial, le profil de vitesse passe de l'écoulement bouchon, $u(r) = u_m$, à l'écoulement de Poiseuille, $u(r) = 2 u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$. Dans le cas du développement temporel, il passe de $u(r) = 0$ à Poiseuille. Dans le cas spatial, la vitesse au centre passe donc de $u_c = u_m$ à $u_c = 2 u_m$, tandis que, dans le cas temporel, elle passe de $u_c = 0$ à $u_c = 2 u_m$. Quoi qu'il en soit, l'analogie espace-temps est évidente, même si elle est imparfaite. En "remplaçant" t_c par x_c/u_m dans le résultat ci-dessus, on obtient une estimation de la longueur de développement pour le cas spatial:

$$\frac{x_c}{u_m} \frac{\nu}{R^2} \approx t_c \frac{\nu}{R^2} = \zeta_c , \quad (2.53)$$

et donc

$$4 \frac{x_c}{D} \frac{\nu}{u_m D} \approx \zeta_c \quad \iff \quad \frac{x_c}{D} \approx \frac{\zeta_c}{4} Re_D \approx 0.2 Re_D . \quad (2.54)$$

Bien sûr, puisque l'analogie n'est pas parfaite, on ne peut pas utiliser de chiffre précis. On a ici proposé 0.20 comme estimation acceptable. De toute façon, cela dépend aussi de la valeur de x_c : est-ce $x_{c,0.95}$, où plutôt $x_{c,0.99}$?... Quoi qu'il en soit, on a établi ici un résultat encore plus précis que celui obtenu par l'analyse dimensionnelle: i.e., que la fonction $f(Re_D)$ pour la longueur d'établissement d'un écoulement laminaire en conduite est simplement de la forme $C Re_D$, et que le coefficient de proportionalité, C , est proche de 0.2 .

Notons, en passant, que la longueur d'établissement d'un écoulement de Poiseuille peut être considérable. Par exemple, pour établir un écoulement à $Re_D = 1000$, il faudra compter environ 200 diamètres! Tout ceci, bien sûr, n'est valable que pour les écoulements laminaires. Pour les écoulements turbulents, la loi de variation sera différente.

2.2.2 Ecoulement cyclique avec gradient de pression oscillant

Considérons ensuite le cas où le gradient de pression imposé est oscillant:

$$-\frac{dP}{dx} = -\frac{dP}{dx}\Big|_0 \cos(\omega t) = -\frac{dP}{dx}\Big|_0 e^{i\omega t} \quad (2.55)$$

avec ω la fréquence circulaire d'excitation (en radians par seconde) et $-\frac{dP}{dx}\Big|_0 > 0$ l'amplitude du gradient de pression imposé. Il est bien entendu que l'on considère uniquement la partie réelle de $e^{i\omega t}$.

La vitesse de référence est, naturellement, la vitesse maximale de l'écoulement de Poiseuille, $u_c = -\frac{dP}{dx}\Big|_0 \frac{R^2}{4\nu}$. Eq. (2.30) devient donc:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{4\nu}{R^2} u_c e^{i\omega t} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (2.56)$$

Les variables adimensionnelles à utiliser sont:

$$u^* = \frac{u}{u_c}, \quad \eta = \frac{r}{R}, \quad \omega^* = \frac{\omega R^2}{\nu}, \quad \zeta = \frac{t\nu}{R^2}. \quad (2.57)$$

A noter que $\omega t = \omega^* \zeta$. On cherche donc une solution de la forme

$$u^* = f(\eta) e^{i\omega t} = f(\eta) e^{i\omega^* \zeta}. \quad (2.58)$$

On obtient alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= u_c f i \omega e^{i\omega t} = \frac{\nu}{R^2} u_c f i \omega^* e^{i\omega^* \zeta}, \\ \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= \frac{\nu}{R^2} u_c \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{df}{d\eta} \right) e^{i\omega^* \zeta}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

ce qui mène à l'équation différentielle non-homogène suivante:

$$\eta^2 \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \eta \frac{df}{d\eta} - i \omega^* f \eta^2 = -4 \eta^2. \quad (2.60)$$

Une solution particulière de l'équation non-homogène est

$$f_p(\eta) = \frac{4}{i \omega^*}. \quad (2.61)$$

L'équation homogène est l'équation de Bessel d'ordre 0 dont la solution (régulière) est

$$f_h(\eta) = C J_0 \left(\sqrt{-i \omega^*} \eta \right). \quad (2.62)$$

La solution générale de l'équation non-homogène est donc:

$$f(\eta) = \frac{4}{i \omega^*} + C J_0 \left(\sqrt{-i \omega^*} \eta \right). \quad (2.63)$$

L'imposition de la condition limite de vitesse nulle à la paroi, $f(1) = 0$, fournit la constante C . Finalement, la solution est

$$f(\eta) = \frac{4}{i\omega^*} \left(1 - \frac{J_0(\sqrt{-i\omega^*}\eta)}{J_0(\sqrt{-i\omega^*})} \right). \quad (2.64)$$

Comme $-i = e^{i3\pi/2}$, on a que $\sqrt{-i} = e^{i3\pi/4}$. La solution finale s'écrit:

$$\frac{u}{u_c} = \Re \left\{ \frac{4}{i\omega^*} \left(1 - \frac{J_0(e^{i3\pi/4}\sqrt{\omega^*}\eta)}{J_0(e^{i3\pi/4}\sqrt{\omega^*})} \right) e^{i\omega^*\zeta} \right\}. \quad (2.65)$$

La fonction complexe $J_0(e^{i3\pi/4}s)$ avec s réel ≥ 0 a un nom en mathématique: sa partie réelle s'appelle la fonction $Ber(s)$ (avec $Ber(0) = 1$), et sa partie imaginaire s'appelle la fonction $Bei(s)$ (avec $Bei(0) = 0$):

$$J_0(e^{i3\pi/4}s) = Ber(s) + iBei(s). \quad (2.66)$$

On a donc, comme solution:

$$\frac{u}{u_c} = \Re \left\{ \frac{4}{i\omega^*} \left(1 - \frac{Ber(\sqrt{\omega^*}\eta) + iBei(\sqrt{\omega^*}\eta)}{Ber(\sqrt{\omega^*}) + iBei(\sqrt{\omega^*})} \right) e^{i\omega^*\zeta} \right\}. \quad (2.67)$$

Cette solution est générale et valable pour toutes les fréquences d'excitation. Les cas de forçages lent et rapide sont des cas particuliers intéressants.

En forçage lent, on considère que $\sqrt{\omega^*}\eta$ est petit. Comme on a que $0 \leq \eta \leq 1$, une condition suffisante est que $\sqrt{\omega^*}$ soit petit. La série de Taylor est alors:

$$J_0(e^{i3\pi/4}s) = Ber(s) + iBei(s) = 1 + i\frac{s^2}{4} - \frac{s^4}{64} + \dots, \quad (2.68)$$

et on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{J_0(e^{i3\pi/4}\sqrt{\omega^*}\eta)}{J_0(e^{i3\pi/4}\sqrt{\omega^*})} &= \frac{1 + i\frac{\omega^*\eta^2}{4} - \frac{\omega^{*2}\eta^4}{64} + \dots}{1 + i\frac{\omega^*}{4} - \frac{\omega^{*2}}{64} + \dots} \\ &= 1 - i\frac{\omega^*}{4}(1 - \eta^2) + \frac{\omega^{*2}}{64}(\eta^4 - 4\eta^2 + 3) + \mathcal{O}(\omega^{*2}). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Cela donne finalement:

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_c} &= \Re \left\{ \left((1 - \eta^2) - i\frac{\omega^*}{16}(\eta^4 - 4\eta^2 + 3) \right) e^{i\omega^*\zeta} \right\} \\ &= (1 - \eta^2) \cos(\omega^*\zeta) + \frac{\omega^*}{16}(\eta^4 - 4\eta^2 + 3) \sin(\omega^*\zeta) + \mathcal{O}(\omega^{*2}). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Cette formule est uniformément valable (i.e., valable pour tous les η) tant que ω^* reste faible. On constate donc, qu'à faible ω^* , l'écoulement est essentiellement un écoulement

de Poiseuille en phase avec le gradient de pression imposé. Ceci est tout à fait logique: le gradient de pression de forçage variant lentement, l'écoulement à le temps de "suivre" sa variation et d'être en équilibre quasi-statique avec celui-ci. Le terme additionnel, proportionnel à ω^* et donc d'autant plus petit que ω^* est faible, est un terme de déphasage de $\pi/2$ (i.e., de 90 deg). En début de cycle ($\omega^* \zeta = 0$), le profil de vitesse est le profil de Poiseuille correspondant au gradient de pression, voir Fig. 2.10. En quart de cycle ($\omega^* \zeta = \pi/2$), le profil de vitesse n'est pas nul bien que le gradient de pression le soit, voir Fig. 2.10. On a donc un retard entre le profil de vitesse et le gradient de pression. En milieu de cycle ($\omega^* \zeta = \pi$), le profil de vitesse est, de nouveau, le profil de Poiseuille en phase avec le gradient de pression. On a donc "récupéré" le retard. Par exemple, au centre de la conduite, on a que

$$\frac{u(0)}{u_c} = \cos(\omega^* \zeta) + \frac{3\omega^*}{16} \sin(\omega^* \zeta) + \mathcal{O}(\omega^{*2}) , \quad (2.71)$$

et on constate bien que cette vitesse ne suit pas parfaitement la variation du gradient de pression.

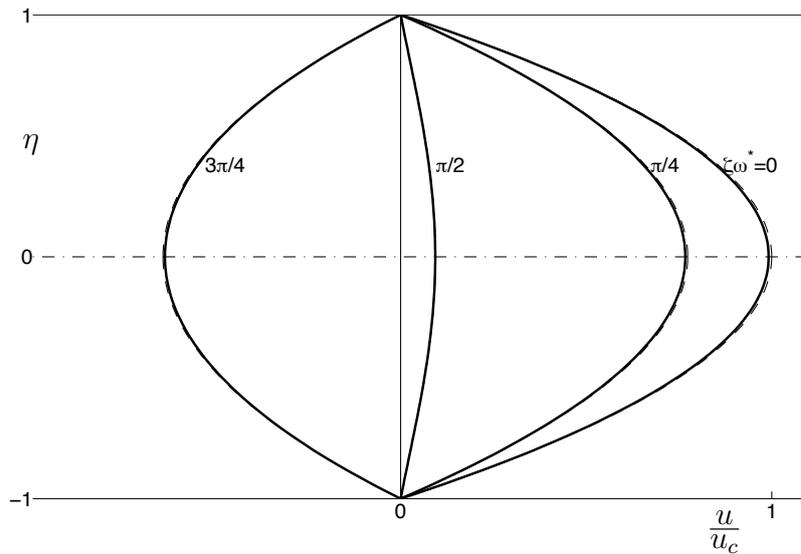


Figure 2.10: Ecoulement cyclique en conduite circulaire: cas d'un forçage lent avec $\omega^* = 1/2$. Solution exacte (trait plein) et solution approchée (trait interrompu).

En forçage rapide, on considère que $\sqrt{\omega^*} \eta$ est grand, et ce pour tous les η . Clairement, le centre de la conduite, $\eta = 0$, doit être exclu d'une telle analyse. La solution obtenue ne sera pas uniformément valide. On utilise ici l'expansion asymptotique de $J_0(z)$ valable pour de grande valeurs de $|z|$ avec $\arg(z) < \pi$:

$$J_0(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \dots \quad (2.72)$$

On a donc:

$$\begin{aligned}
J_0(e^{i3\pi/4} s) &= \text{Ber}(s) + i \text{Bei}(s) \\
&\approx e^{-i3\pi/8} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \cos\left(e^{i3\pi/4} s - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= e^{-i3\pi/8} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \cos\left(i \frac{s}{\sqrt{2}} - \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= e^{-i3\pi/8} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \left[\cos\left(i \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(i \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\
&= e^{-i3\pi/8} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \left[\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\
&\approx e^{-i3\pi/8} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \frac{1}{2} e^{\frac{s}{\sqrt{2}}} \left[\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\
&= e^{-i3\pi/8} \sqrt{\frac{\pi}{2s}} e^{\frac{s}{\sqrt{2}}} e^{i\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}, \tag{2.73}
\end{aligned}$$

ce qui mène à:

$$\frac{J_0(e^{i3\pi/4} \sqrt{\omega^* \eta})}{J_0(e^{i3\pi/4} \sqrt{\omega^*})} \approx \frac{1}{\sqrt{\eta}} e^{-\sqrt{\frac{\omega^*}{2}}(1-\eta)} e^{-i\sqrt{\frac{\omega^*}{2}}(1-\eta)}, \tag{2.74}$$

et finalement au résultat asymptotique suivant:

$$\begin{aligned}
\frac{u}{u_c} &= \Re \left\{ \frac{4}{i\omega^*} \left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} e^{-\sqrt{\frac{\omega^*}{2}}(1-\eta)} e^{-i\sqrt{\frac{\omega^*}{2}}(1-\eta)} \right) e^{i\omega^* \zeta} \right\} \\
&= \frac{4}{\omega^*} \left[\sin(\omega^* \zeta) - \frac{1}{\sqrt{\eta}} e^{-\sqrt{\frac{\omega^*}{2}}(1-\eta)} \sin\left(\omega^* \zeta - \sqrt{\frac{\omega^*}{2}}(1-\eta)\right) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^{*2}}\right) \tag{2.75}
\end{aligned}$$

résultat qui n'est pas uniformément valable: il nécessite que $\sqrt{\omega^* \eta}$ soit suffisamment grand. L'écoulement est essentiellement en déphasage de $\pi/2$ (i.e., de 90 deg) par rapport au gradient de pression, voir Fig. 2.11: c'est en $\omega^* \zeta = \pi/2$ (i.e., lorsque le gradient de pression est nul) que le profil de vitesse est le plus "plein". En début de cycle, on observe une zone de grande vitesse près de la paroi (i.e., plus grande que la vitesse au centre). La dynamique de cet écoulement est donc fort compliquée.

2.2.3 Démarrage brusque d'une plaque

Considérons un écoulement instationnaire le long d'une plaque plane: $u = u(y, t)$. Comme une plaque ne borne l'écoulement que d'un côté (l'autre "côté" étant à l'infini), il n'y a pas de gradient de pression latéral pour un écoulement établi le long d'une plaque. On a alors simplement que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{2.76}$$

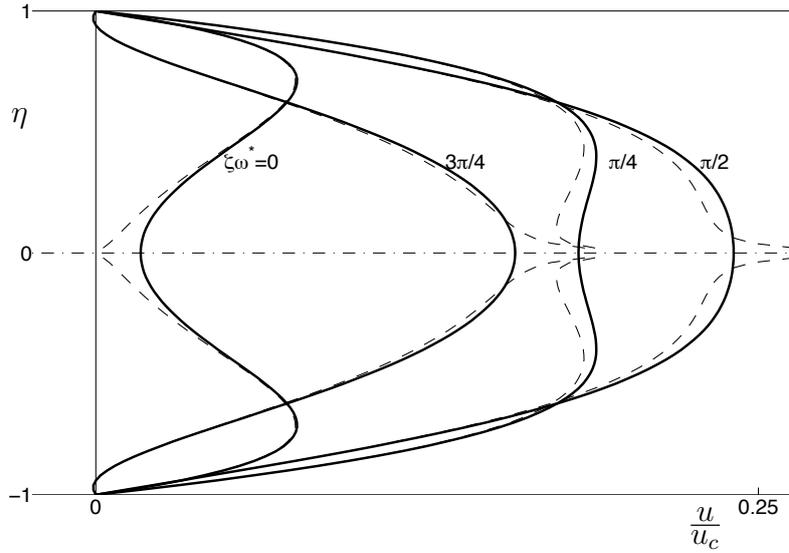


Figure 2.11: Écoulement cyclique en conduite circulaire: cas d'un forçage rapide avec $\omega^* = 20$. Solution exacte (trait plein) et solution approchée (trait interrompu).

Cette équation est l'équation classique de diffusion.

Considérons tout d'abord le problème du démarrage brusque d'une plaque: pour $t < 0$, il n'y a pas de vitesse de plaque, et donc pas d'écoulement $u(y, t < 0) = 0$. Pour $t > 0$, une vitesse de plaque constante, U , est imposée. Un écoulement "démarré" donc au sein du fluide en $t = 0_+$, et ce afin de respecter la condition de non-glissement à la paroi: $u(0, t > 0) = U$. Clairement, il s'agit d'un problème aux conditions initiale et limite bien posé. L'analyse dimensionnelle nous fournit la variable de similitude à utiliser: $\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu t}}$. En fait, l'algèbre est un peu plus facile si on utilise plutôt $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$. On considère donc:

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) = f(\eta). \quad (2.77)$$

Cela donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= U \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -U \frac{df}{d\eta} \eta \frac{1}{2t}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= U \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U \frac{df}{d\eta} \frac{1}{2\sqrt{\nu t}}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{1}{4\nu t}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

On obtient donc l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta \frac{df}{d\eta} = 0. \quad (2.79)$$

Intégrée une première fois, elle donne:

$$\frac{df}{d\eta} = C e^{-\eta^2} . \quad (2.80)$$

Intégrée une deuxième fois, elle donne:

$$f(\eta) = C \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' + D . \quad (2.81)$$

La condition $f(0) = 1$ donne $D = 1$. La condition $\lim_{\eta \rightarrow \infty} f(\eta) = 0$ donne $C \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 1 = 0$. On a donc la solution:

$$\frac{u}{U} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' = 1 - \operatorname{erf}(\eta) = \operatorname{erfc}(\eta) , \quad (2.82)$$

avec erf la fonction erreur et erfc la fonction erreur complémentaire. Le développement du champ de vitesse est montré à la Fig. 2.12.

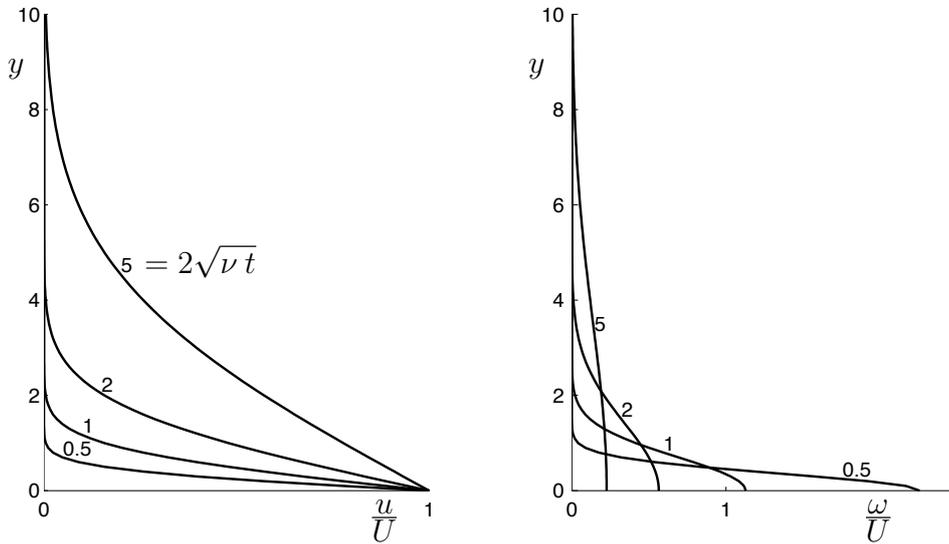


Figure 2.12: Démarrage brusque d'une plaque: développement des profils de vitesse et de tourbillon.

Le tourbillon est aussi facilement obtenu:

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} = \frac{U}{\sqrt{\pi \nu t}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} . \quad (2.83)$$

Son graphe est aussi donné à la Fig. 2.12. En fait, au temps $t = 0_+$, une feuille tourbillon infiniment mince (i.e., un Dirac de tourbillon) a été déposée sur la surface de la plaque. Elle diffuse ensuite dans le fluide, et la valeur du tourbillon à la paroi diminue en fonction du temps. L'intégrale du tourbillon reste cependant conservée et égale à U . En effet:

$$\int_0^\infty \omega dy = - \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial y} dy = -[u(y)]_0^\infty = U . \quad (2.84)$$

2.2.4 Plaque oscillante

Dans le cas d'une plaque oscillante, la vitesse de la plaque est

$$U \cos(\omega t) = \Re \{ U e^{i\omega t} \} . \quad (2.85)$$

Par analyse dimensionnelle, on détermine que la variable est $\eta = y \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$. On considère donc:

$$\frac{u}{U} = \Re \{ f(\eta) e^{i\omega t} \} , \quad (2.86)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= U f i \omega e^{i\omega t} , \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= U \frac{df}{d\eta} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} e^{i\omega t} , \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{\omega}{\nu} e^{i\omega t} , \end{aligned} \quad (2.87)$$

où on a négligé de préciser qu'on doit considérer la partie réelle des fonctions ci-dessus: on s'en souviendra à la fin. On obtient donc l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} - i f = 0 . \quad (2.88)$$

Les solutions sont de la forme $C e^{\lambda \eta}$. Le polynôme caractéristique est ici $\lambda^2 - i = 0$, c.-à.-d. $\lambda^2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{5\pi}{2}}$, et donc $\lambda_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ et $\lambda_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$. Ici, la solution doit décroître lorsque $\eta \rightarrow \infty$. On doit donc exclure la solution de la forme $C e^{\lambda_1 \eta}$. On a donc:

$$\frac{u}{U} = \Re \left\{ C e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\eta} e^{i\omega t} \right\} . \quad (2.89)$$

La condition de non-glissement en $\eta = 0$ détermine que $C = 1$. Finalement, on obtient:

$$\frac{u}{U} = e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}} \cos \left(\omega t - \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) = e^{-y \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} \cos \left(\omega t - y \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \right) . \quad (2.90)$$

L'amplitude de la vitesse décroît de manière exponentielle. De plus, elle est déphasée par rapport à la vitesse de la plaque, l'angle de déphasage ϕ étant proportionnel à la distance à la plaque: $\phi = y \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$, voir Fig. 2.13. Par exemple, la vitesse en $y = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \pi$ est déphasée de π (i.e., de 180 deg) par rapport à la vitesse de la plaque.

2.3 Zone d'entrée et longueur d'établissement

Comme nous l'avons déjà noté précédemment, le profil de vitesse pour un écoulement à section invariable n'est pas nécessairement établi. Nous considérons ici une longue

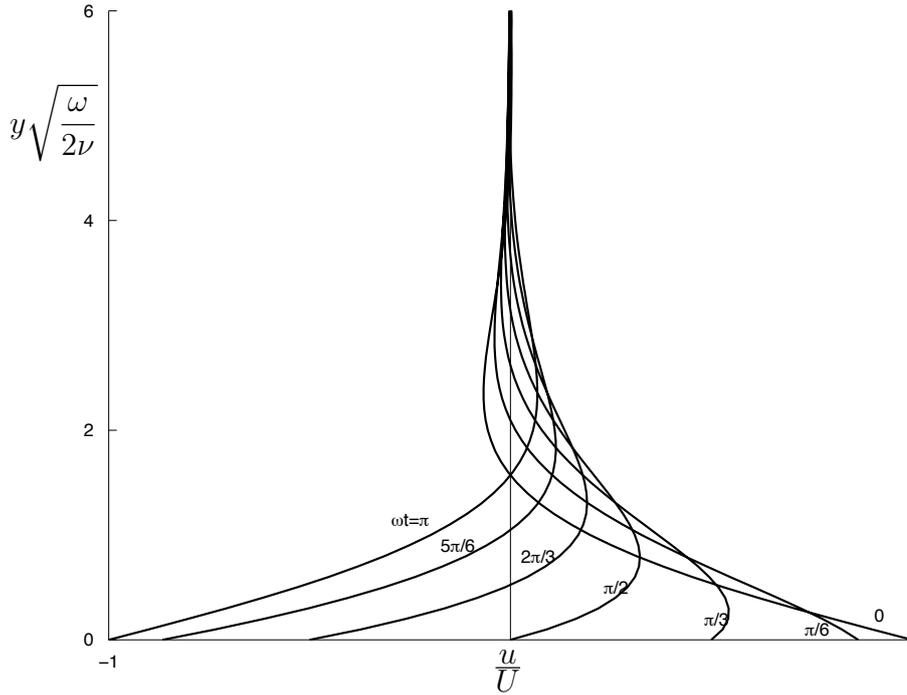


Figure 2.13: Oscillation d'une plaque: profils de vitesse.

conduite de section constante connectée à un grand réservoir, voir Fig. 2.14. A l'entrée de la conduite, $x = 0$, le profil de vitesse est essentiellement plat (i.e., écoulement bouchon) car la présence de la paroi de la conduite n'a pas encore pu influencer de façon significative le profil de vitesse. On a donc, en bonne approximation: $u(0, r) \approx u_m$ pour $0 \leq r < R$ et $u(0, R) = 0$. Il faudra compter une longueur d'établissement x_c non négligeable pour que l'écoulement s'établisse (i.e., se développe) et atteigne le régime qui correspond à l'écoulement de Poiseuille, $u(x > x_c, r) \approx u(r) = 2u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$, dans le cas d'un écoulement laminaire.

Les équations qui régissent ce problème sont essentiellement les équations de la couche limite (voir plus loin le chapitre du cours consacré aux couches limites) écrites ici en coordonnées cylindriques:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v) &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{dP}{dx} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (2.91)$$

En régime de couche limite, la pression n'est fonction que de x et le terme de diffusion en x est négligeable par rapport au terme de diffusion en r . Dans le problème laminaire que nous traitons, une couche limite se développe le long de la paroi, voir Fig. 2.14. Son épaisseur, $\delta(x)$, grandit en x jusqu'à ce qu'elle atteigne le centre de la conduite en $x \approx x_c$.

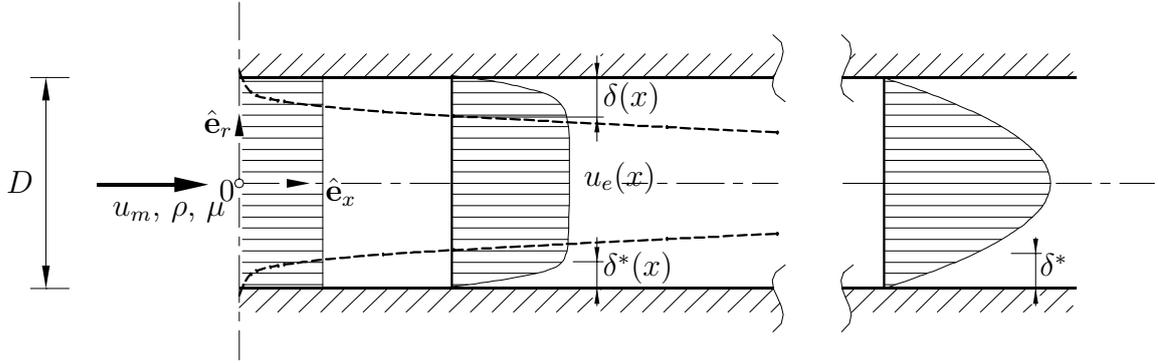


Figure 2.14: Zone d'entrée et établissement d'un écoulement en conduite circulaire.

A partir de cet endroit, on a essentiellement le profil de vitesse de Poiseuille pour un écoulement établi.

A noter que, d'un point de vue strictement mathématique, l'écoulement qui s'établit n'atteint le profil de vitesse établi que de façon asymptotique. Il faudra donc une distance infinie pour complètement établir un profil de vitesse. On considérera donc, pour la suite, que x_c est la longueur d'établissement telle que la vitesse au centre de la conduite soit presque égale à $2u_m$. Par exemple, $x_{c,0.99}$ désignera la longueur d'établissement nécessaire pour attendre 99% de cette vitesse, $x_{c,0.95}$ celle pour atteindre 95% de cette vitesse, etc.

Que vaut la pression $p(x)/\rho = P(x)$? Elle est en fait déterminée par la vitesse de l'écoulement, $u_e(x)$, dans la partie plate du profil en dehors de la couche limite, voir Fig. 2.14. Pour cette partie irrotationnelle de l'écoulement, l'équation de Bernoulli est satisfaite:

$$\begin{aligned} P(x) + \frac{1}{2}u_e^2(x) &= \text{constante} = P(0) + \frac{1}{2}u_m^2, \\ \frac{dP}{dx} + u_e \frac{du_e}{dx} &= 0. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Le problème posé revient donc finalement à résoudre le système d'équations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v) &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (2.93)$$

avec la condition initiale $u(0, r) = u_m$ et la condition frontière $u(x, R) = 0$. Comment détermine-t-on la vitesse $u_e(x)$? Clairement, par conservation du débit qui traverse chaque section: $\int u dA = u_m A$ pour tout x . Le profil de vitesse au sein de la couche limite

détermine donc $u_e(x)$ qui lui même intervient dans les équations qui déterminent le profil de vitesse. Le problème est donc fortement couplé. En fait, la notion d'épaisseur de couche limite, δ , est assez floue, comme on le verra par la suite. On utilise plutôt la notion d'épaisseur de déplacement, δ^* , qui est basée sur la notion de débit, voir Fig. 2.14. Ceci deviendra plus clair dans la partie du cours consacrée aux couches limites. Dans le cadre présent, elle est définie par:

$$u_e(x) \pi (R - \delta^*(x))^2 = \int u dA = u_m A = u_m \pi R^2, \quad (2.94)$$

et donc $\delta^*(x)$ et $u_e(x)$ sont reliés par

$$\left(1 - \frac{\delta^*(x)}{R}\right)^2 \frac{u_e(x)}{u_m} = 1, \quad (2.95)$$

ce qui constitue la relation fondamentale de couplage entre la couche limite et l'écoulement externe. A l'entrée, on a que $u_e(0) = u_m$ et donc que $\delta^*(0) = 0$. Asymptotiquement, on obtient Poiseuille avec $u_e = 2 u_m$, et donc avec $\delta^*/R = 1 - 1/\sqrt{2} = 0.293$.

Le problème ci-dessus n'a en fait pas de solution analytique. Il est certainement soluble par approche numérique. Il est aussi possible d'obtenir une solution approchée par utilisation de l'équation intégrale de von Karman, laquelle fait usage de $\delta^*(x)$ et de $u_e(x)$ qui sont, pour le problème présent, liés par l'équation ci-dessus. L'équation intégrale de von Karman sera aussi développée dans la partie du cours consacrée aux couches limites. A noter que, pour ce cours, la théorie des couches limites est développée pour le cas plan. Il faudrait, pour le problème présent, la développer pour le cas axisymétrique.

Même sans le résoudre, on peut déjà déterminer, par analyse dimensionnelle, que la loi qui régit la longueur d'établissement est de la forme:

$$\frac{x_c}{D} = f\left(\frac{u_m D}{\nu}\right) = f(Re_D). \quad (2.96)$$

Nous allons voir, dans la suite de ce chapitre, qu'il est possible d'estimer la loi de variation à partir de la solution analytique d'un problème différent: celui de l'écoulement instationnaire correspondant à un démarrage brusque en conduite.

Chapitre 3

Transfert de chaleur

La chaleur est une forme d'énergie. On appelle transfert de chaleur le transfert d'énergie suscité par un écart de température entre les différents points d'un milieu ou entre milieux distincts.

Il existe trois modes de transfert de chaleur : la conduction, la convection et le rayonnement. Les deux premiers modes n'impliquent que des phénomènes locaux : ils sont décrits par des équations locales (équations aux dérivées partielles ou équations différentielles ordinaires). Le troisième mode fait intervenir tout l'environnement : il s'agit d'un phénomène global, décrit par des équations intégrales ou un ensemble équivalent d'équations algébriques.

La *conduction* de la chaleur est la transmission d'énergie, de proche en proche, par divers mécanismes mettant en jeu des particules élémentaires : molécules, atomes, phonons, électrons. La conduction dépend exclusivement des propriétés physiques du matériau considéré.

La *convection* de la chaleur est la transmission d'énergie thermique par delà une interface, généralement fluide-solide. Le mécanisme de convection, qui fait intervenir les propriétés de conduction des deux milieux au voisinage immédiat de l'interface, est principalement piloté par les caractéristiques de l'écoulement dans un voisinage assez étendu de l'interface.

Le *rayonnement thermique* est un rayonnement électromagnétique intervenant dans une gamme assez large de longueurs d'onde (le visible et l'infrarouge), et donc de fréquences pour lesquelles des interactions mécaniques sont possibles avec les constituants corpusculaires de la matière. Les substances solides absorbent en général le rayonnement thermique sur une épaisseur assez faible, voire très faible (quelques microns pour les matériaux conducteurs de l'électricité) : ces substances sont dites opaques. D'autres matériaux (les liquides, certains solides tels le verre ou les plastiques translucides, des gaz tels CO_2 , H_2O , $NH_3 \dots$) n'absorbent que partiellement et progressivement le rayonnement thermique :

ils sont dits semi-transparents. Enfin, des gaz dont la structure moléculaire est très simple (gaz monoatomiques tels Ar , diatomiques tels O_2 et N_2) sont quasi parfaitement transparents au rayonnement thermique. L'atmosphère ambiante n'a donc que très peu d'influence (seulement via H_2O et d'autres gaz à l'état de traces) sur la transmission du rayonnement thermique. Tout l'environnement du corps étudié doit être pris en considération : l'étude du rayonnement fait inévitablement appel à des relations globales. Cette caractéristique ne doit toutefois pas conduire à ignorer des phénomènes locaux parfois très complexes lors du transfert par rayonnement thermique : l'incidence du recouvrement de vitrages par des couches ultraminces en constitue un exemple.

Les lois relatives à la conduction et à la convection de la chaleur sont des lois linéaires, tout au moins dans leur formulation usuelle. Par contre, la loi de Stefan-Boltzman, loi fondamentale du rayonnement thermique, est hautement non-linéaire : elle fait intervenir la température absolue au quatrième degré.

3.1 Transfert de chaleur dans les solides

3.1.1 Conduction : loi de Fourier

Pour un matériau homogène et isotrope, le transfert de chaleur est caractérisé par le vecteur densité de flux de chaleur. Celui-ci est relié au gradient de température par la *loi de Fourier*

$$\mathbf{q} = -k\nabla T. \quad (3.1)$$

Il s'agit bien d'une loi de constitution qui apparaissait comme une partie du modèle de fluide visqueux newtonien décrit par (1.29). Toutefois, il convient de rappeler que la loi de Fourier est beaucoup plus générale et décrit le transfert de chaleur dans une multitude de matériaux.

Rappelons que le coefficient $k = \hat{k}(p, T)$ est la *conductibilité thermique*, propre à chaque matériau. La conductibilité thermique varie en général avec la température. Toutefois, contrairement à la viscosité, la variation de k avec la température est généralement faible dans des intervalles de température limités.

La conductibilité thermique des métaux est beaucoup plus élevée que celles des autres matériaux. Le tableau ci-dessous reprend quelques valeurs de conductibilités thermiques pour une température de $100^{\circ}C$. Il faut aussi observer qu'en général, la conductibilité d'un alliage est inférieure à celles de chacun de ses composants.

Matériau	k (W/mK)
eau (à pression atmosphérique)	0.67
cuivre	380
aluminium	260
acier	45

(D'après J. R. Bird, Transport Phenomena, Wiley, 60)

Le flux de chaleur qui traverse une surface A donnée se calcule aisément par

$$\mathcal{Q} = \int_A q(\mathbf{n})dA = \int_A \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}dA, \quad (3.2)$$

où $q(\mathbf{n})$ est la densité de flux de chaleur.

L'équation de la chaleur est la forme particulière de l'équation de conservation de l'énergie lorsqu'on l'applique à un corps solide, indéformable, éventuellement soumis à une génération interne de densité de puissance r . Le corps est en outre supposé au repos: il n'y a donc pas de travail exercé sur son environnement.

L'équation de conservation (1.8.3) devient dans ces conditions :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = r - \nabla \cdot \mathbf{q}. \quad (3.3)$$

En y introduisant la chaleur massique c et en utilisant la loi de Fourier, on obtient :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = r + \nabla \cdot (k \nabla T). \quad (3.4)$$

Lorsque la conductibilité k ne varie pas avec la température, on trouve l'équation de la chaleur :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{r}{k} + \nabla^2 T, \quad (3.5)$$

où α est la diffusivité thermique :

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}. \quad (3.6)$$

La diffusivité thermique a une signification physique intéressante. Elle représente la facilité avec laquelle un flux de chaleur transmis à un solide se traduit, au sein de celui-ci,

par un relèvement de la température. Les propriétés de conductibilité thermique et de capacité calorifique du matériau interviennent donc toutes deux.

Par exemple, considérons un milieu semi-infini initialement à température nulle. Sa surface externe est forcée instantanément à $T_0 = 100^{\circ}C$. Le temps t après lequel la température aura atteint $\frac{1}{2}T_0 = 50^{\circ}C$ à 0.3 m de profondeur est repris ci-dessous :

Matériau	Argent	Cuivre	Acier	Verre
$10^6 \alpha \text{ m}^2/\text{s}$	170	103	12.9	0.59
t	9.5 min	16.5 min	2.2 h	2.0 jours

(D'après A. Bejan, Heat transfer, Wiley, 93)

Conduction à travers une plaque plane, en régime permanent

Considérons une plaque plane dont les faces latérales sont beaucoup plus grandes que son épaisseur L et ont une température connue. Si l'on néglige les effets de bord, on peut accepter que la recherche du champ de température dans la plaque est un problème unidimensionnel. L'équation de la chaleur se réduit à

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0. \quad (3.7)$$

Cette équation indique que le profil de température est une droite dont les constantes d'intégration se déterminent par les conditions aux limites aux parois. Ici, on assigne les températures de paroi (figure 3.1).

- en $x = 0$, $T = T_0$,
- en $x = L$, $T = T_L$.

La solution particulière du problème est donnée par

$$T = \frac{T_L - T_0}{L}x + T_0, \quad (3.8)$$

la densité de flux de chaleur vaut

$$q = -k \frac{T_L - T_0}{L}, \quad (3.9)$$

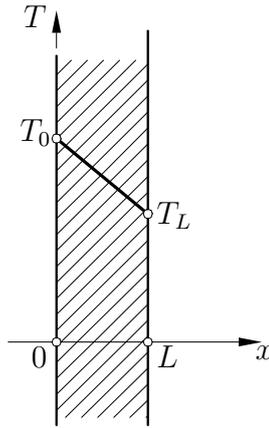


Figure 3.1: Profil de température dans une plaque plane.

et le flux de chaleur à travers une aire latérale A de la plaque vaut

$$\mathcal{Q} = Aq = -Ak \frac{T_L - T_0}{L}. \quad (3.10)$$

Tant le flux de chaleur que la densité de flux sont invariables avec x , ce qui est évident puisqu'en régime permanent sans puits ni source de chaleur, il ne peut y avoir accumulation d'énergie.

Le problème qui vient d'être résolu est trop partiel. En général, la plaque considérée est environnée, à ses deux faces, de fluides en écoulement dont on connaît les températures et les intensité d'échange par convection. Par contre les températures de parois sont généralement inconnues, et par ailleurs toujours très difficiles à mesurer.

3.1.2 Convection : loi de Newton

Lors du transfert de chaleur d'une paroi à température T_p vers un fluide environnant dont la température moyenne est T_f (supposée ici plus basse), l'expérience indique que l'on peut écrire une loi de transfert sous la forme

$$\mathcal{Q} = Ah(T_p - T_f), \quad (3.11)$$

où A est l'aire d'échange et $h(W/m^2K)$ est appelé *coefficient de convection*. Il apparaît que, souvent, h est indépendant ou ne dépend que faiblement de la température. La loi (3.11), dite *loi de Newton*, est donc approximativement linéaire.

La loi de Newton est plus formelle que physique, car le coefficient h ne peut être déterminé une fois pour toutes. Il contient en réalité toutes les informations relatives à l'écoulement et aux propriétés du fluide : profil de vitesse à la paroi, propriétés du fluide : viscosité, conductibilité thermique, masse volumique, chaleur massique. Ce sera l'objet de plusieurs chapitres ultérieurs de ce cours que d'exposer des méthodes de calcul du coefficient de convection h , en tenant compte de tous les éléments qui viennent d'être énumérés.

Ici, nous considérerons que la valeur de h est connue. Quelques valeurs typiques sont données, ci-dessous, à titre d'exemple et pour indiquer des ordres de grandeurs.

Type de transfert	Fluide	$h(W/m^2 K)$
Convection forcée	gaz	10...300
	liquide aqueux	500...12000
	huile	50...1700
	métal liquide	6000...110000
Convection naturelle	gaz	5...30
	liquide aqueux	100...1000
Changement de phase	eau, ébullition	3000...60000
	eau, condensation	5000...110000

(D'après J. Taine et J.P. Petit, Heat transfer, Prentice Hall, 93)

Plaque soumise à convection

Considérons maintenant le cas d'une plaque soumise à convection illustré sur la figure 3.2. Le profil de température le long d'une normale aux parois de la plaque est continu. Les températures aux parois sont T_0 et T_L , tandis que les températures des fluides loin des parois sont respectivement $T_{\infty 0}$ et $T_{\infty L}$.

Les conditions aux limites s'écrivent en exprimant le fait que le flux par conduction à l'intérieur de la plaque (loi de Fourier) est égal à celui qui sort par convection (loi de Newton). On a ainsi

- en $x = 0$,
$$-k \left. \frac{dT}{dx} \right|_0 = h_0(T_{\infty 0} - T_0),$$

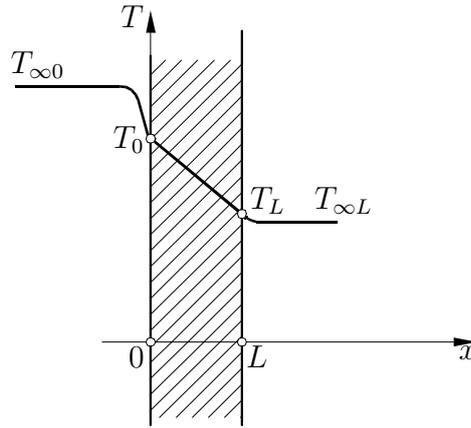


Figure 3.2: Profil de température : plaque plane soumise à convection.

- en $x = L$,
$$-k \frac{dT}{dx} \Big|_L = h_L(T_L - T_{\infty L}),$$

En utilisant les conditions aux limites, on obtient immédiatement le profil de température dans la plaque

$$T = \frac{(T_{\infty L} - T_{\infty 0}) \left(\frac{x}{L} + \frac{k}{h_0 L} \right)}{1 + \frac{k}{h_0 L} + \frac{k}{h_L L}} + T_{\infty 0}, \quad (3.12)$$

En introduisant un nombre de Biot Bi estimé à gauche et à droite par:

$$Bi_0 = \frac{h_0 L}{k}, \quad Bi_L = \frac{h_L L}{k}, \quad (3.13)$$

on peut écrire la solution (3.12) sous la forme

$$T = \frac{(T_{\infty L} - T_{\infty 0}) \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{Bi_0} \right)}{1 + \frac{1}{Bi_0} + \frac{1}{Bi_L}} + T_{\infty 0}, \quad (3.14)$$

Le nombre de Biot permet de quantifier les effets de convection par rapport aux effets de conduction.

On notera ainsi que la solution (3.8) est un cas limite de (3.14). En effet, pour maintenir inchangé le flux traversant la plaque, ce qui revient à maintenir T_0 et T_L inchangés,

la condition de convection à la paroi gauche par exemple doit évoluer de manière à ce que la densité de flux $h_0(T_{\infty 0} - T_0)$ demeure constante. Si le coefficient de convection tend vers l'infini, la température doit se rapprocher asymptotiquement de T_0 . La solution (3.8) correspond donc à une convection d'intensité infinie ($Bi \rightarrow \infty$) aux deux faces.

Génération interne de chaleur dans un cylindre

Considérons un cylindre plein de rayon R qui soit l'objet d'une génération interne de chaleur. On suppose que la génération interne de chaleur est provoquée par effet Joule par le passage d'un courant électrique au sein du cylindre. La transmission d'un courant électrique est un processus irréversible et l'énergie électrique est convertie en chaleur par un effet de dissipation électrique. En supposant que le courant est uniformément réparti dans la section, la densité de puissance calorifique fournie est donc :

$$g = \frac{I^2}{\sigma} \quad (3.15)$$

où σ est la conductibilité électrique ($\Omega^{-1}m^{-1}$) et I est la densité de courant (Am^{-2}).

En régime permanent, l'équation de la chaleur (3.5) en coordonnées cylindriques se réduit à :

$$\frac{g}{k} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0, \quad (3.16)$$

En supposant que la chaleur se dissipe par convection à l'extérieur du cylindre (coefficient de convection h , température moyenne du fluide environnant T_{∞} , les conditions aux limites sont :

- en $r = R$, $-k \frac{dT}{dr} \Big|_R = h(T_R - T_{\infty})$,
- en $r = 0$, $-k \frac{dT}{dr} \Big|_0 = 0$.

Cette dernière condition traduit le fait que, le long d'un diamètre et en particulier en l'axe du cylindre, la densité de flux ne peut présenter de discontinuité en l'absence de source ou de puits local de chaleur. La solution de (3.16) est

$$T = \frac{gR^2}{4k} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] + \frac{gR}{2h} + T_{\infty}. \quad (3.17)$$

3.1.3 Notion de résistance thermique

Reprenons l'exemple de la figure 3.2. Le flux $\mathcal{Q} = Aq$ traversant une surface d'aire A de la paroi peut s'écrire sous les trois formes

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} &= \frac{(T_{\infty 0} - T_0)}{\frac{1}{Ah_0}}, \\ \mathcal{Q} &= \frac{(T_0 - T_L)}{\frac{L}{Ak}}, \\ \mathcal{Q} &= \frac{(T_L - T_{\infty L})}{\frac{1}{Ah_L}},\end{aligned}\tag{3.18}$$

où on distingue la première et la troisième expression comme relatives au mode convectif de transfert, tandis que la seconde est relative au mode conductif.

Chacune de ces expressions du flux est analogue à la loi d'Ohm

$$I = \frac{\Delta U}{R},$$

où I est le courant, ΔU la différence de potentiel et R la résistance électrique. On est ainsi conduit à introduire la notion de résistance thermique (K/W) :

- résistance thermique conductive $\frac{L}{Ak}$,
- résistance thermique convective $\frac{1}{Ah}$.

On déduit de ce formalisme qu'un écart de température constitue un *potentiel de transfert thermique*. On notera également que le nombre de Biot exprime le rapport d'une résistance conductive à une résistance convective. L'analogie électrique peut être étendue au cas général tridimensionnel, en comparant la loi de Fourier

$$\mathbf{q} = -k\nabla T.$$

à la forme vectorielle de loi d'Ohm

$$\mathbf{j} = -\sigma\nabla U.$$

où j est la densité de courant, σ la conductance unitaire ($\Omega^{-1}m^{-2}$). Finalement, l'analogie peut aussi être observée au niveau de l'expression de la résistance thermique conductive et celle de la résistance électrique $R = L/(A\sigma)$.

Si l'on se réfère à la figure 3.2, on observe que le flux de chaleur transmis du fluide de gauche à température $T_{\infty 0}$ au fluide de droite à température $T_{\infty L}$ doit "vaincre" trois résistances successives : résistance convective à gauche, résistance conductive dans la plaque, résistance convective à droite. La figure 3.3 montre bien que ces trois résistances sont placées en série. La résistance thermique totale est la somme des trois résistances mises en série :

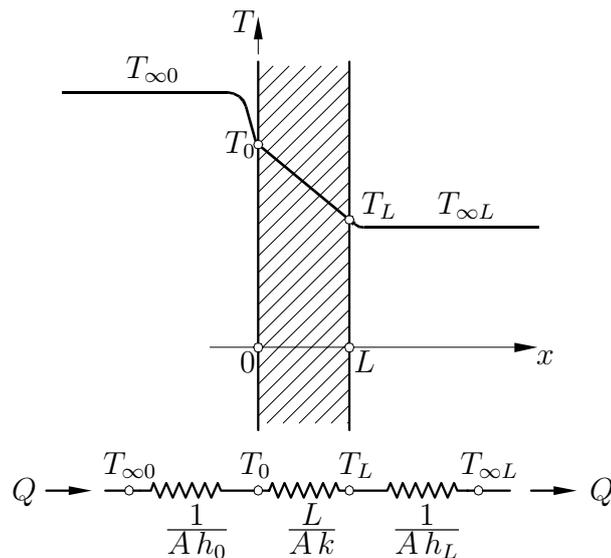


Figure 3.3: Circuit électrique équivalent au transfert de chaleur à travers une plaque.

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{(T_{\infty 0} - T_0)}{\frac{1}{Ah_0}} = \frac{(T_0 - T_L)}{\frac{L}{Ak}} = \frac{(T_L - T_{\infty L})}{\frac{1}{Ah_L}}, \\
 &= \frac{(T_{\infty 0} - T_{\infty L})}{\frac{1}{Ah_0} + \frac{L}{Ak} + \frac{1}{Ah_L}},
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Le circuit thermique présente la même propriété d'additivité des résistances en série que son équivalent électrique. L'analogie peut être étendue à des circuits plus complexes,

présentant des résistances en parallèle.

En thermique du bâtiment, lors de l'étude des échangeurs de chaleur et dans bien d'autres cas, il est utile d'évaluer le flux transféré entre deux fluides séparés par une paroi, au moyen d'un paramètre unique. Le relation suivante est utilisée à cet effet

$$\mathcal{Q} = AU(T_{\infty 0} - T_{\infty L}) \quad (3.20)$$

qui constitue la relation de définition de U appelé *coefficient global de transfert de chaleur* (W/m^2K). La comparaison de (3.20) et (3.19) conduit à trouver l'expression du coefficient global en fonction des grandeurs physiques locales

$$\frac{1}{AU} = R_{tot} = \frac{1}{Ah_0} + \frac{L}{Ak} + \frac{1}{Ah_L} \quad (3.21)$$

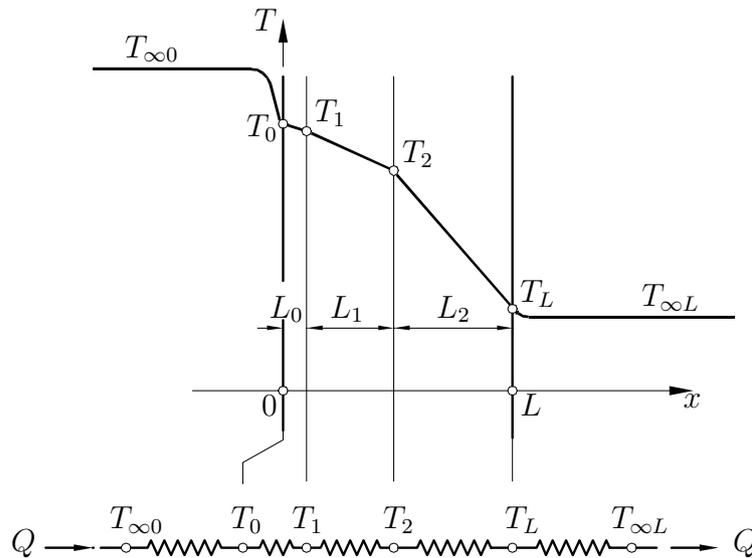


Figure 3.4: Transfert de chaleur à travers une plaque à couches multiples.

Lorsque la paroi est composée de plusieurs couches successives comme indiqué sur la figure 3.4, la généralisation des considérations précédentes conduit immédiatement à l'expression du coefficient global de transfert

$$\frac{1}{AU} = R_{tot} = \frac{1}{Ah_0} + \sum_i \frac{L_i}{Ak_i} + \frac{1}{Ah_L} \quad (3.22)$$

Conduction dans un tube

Considérons maintenant un tube et effectuons le même raisonnement. L'équation de Laplace en l'unique variable r s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0, \quad (3.23)$$

dont la solution générale a la forme $T = a \log(r) + b$.

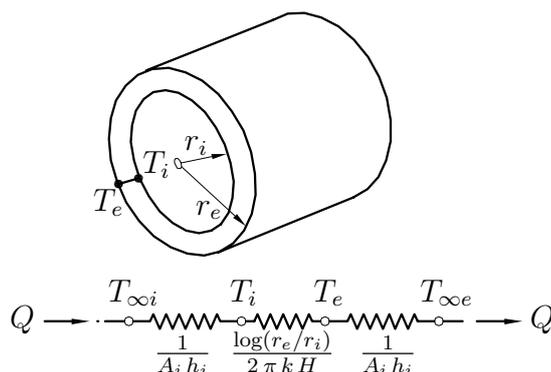


Figure 3.5: Transfert de chaleur à travers une paroi cylindrique.

Lorsqu'on choisit d'assigner les températures de paroi, les conditions aux limites s'écrivent en utilisant les notations définies sur la figure 3.5:

- en $r = r_i$, $T = T_i$,
- en $r = r_e$, $T = T_e$.

La solution particulière du problème est donnée par

$$T = \left(\frac{(T_e - T_i) \log(r)}{\log\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} \right) - \left(\frac{(T_e - T_i) \log(r_e)}{\log\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} - T_e \right), \quad (3.24)$$

la densité de flux de chaleur vaut

$$q = -k \frac{(T_e - T_i)}{\log\left(\frac{r_e}{r_i}\right) r}, \quad (3.25)$$

et le flux de chaleur à travers une longueur L du tube vaut

$$Q = 2\pi L r q = -k \frac{(T_e - T_i)}{\log\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} 2\pi L. \quad (3.26)$$

Lorsqu'on veut introduire les effets de convection, les conditions aux limites deviennent

- en $r = r_i$,
$$-k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r_i} = h_i(T_{\infty i} - T_i),$$
- en $r = r_e$,
$$-k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r_e} = h_e(T_e - T_{\infty e}),$$

où les notations sont définies sur la figure 3.5. On constate alors que pour le cas d'un tube de longueur L , le concept des résistances thermiques conductives et convectives donne les expressions suivantes :

- résistance thermique conductive $\frac{\log\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}{2\pi Lk}$,
- résistance thermique convective interne $\frac{1}{2\pi Lr_i h_i}$,
- résistance thermique convective externe $\frac{1}{2\pi Lr_e h_e}$.

La définition de coefficients globaux de transfert U_i et U_e devient pour la paroi interne ou externe du tube respectivement :

$$\mathcal{Q} = (2\pi Lr_i)U_i(T_{\infty i} - T_{\infty e}) = (2\pi Lr_e)U_e(T_{\infty i} - T_{\infty e}) \quad (3.27)$$

On voit bien que les relations (3.27) définissent des valeurs distinctes de coefficient global de transfert de chaleur, selon que l'on choisit de se référer à la surface interne ou externe du tube. Comme pour la paroi plane, l'expression de la résistance totale peut très facilement être étendue au cas de parois cylindriques à couches multiples, comme le sont des conduites munies d'un isolant thermique.

3.1.4 Exemple de solution analytique de l'équation de Laplace

Soit le domaine rectangulaire représenté à la figure 3.6. Trois côtés du rectangle sont maintenus à la température T_0 tandis que le quatrième l'est à T_b . Des conditions aux limites homogènes facilitent la résolution du problème, ce qui conduit à le reformuler en termes d'excès de température : $\theta = T - T_0$. L'équation de Laplace est identique en T et θ :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d^2\theta}{dy^2} = 0 \quad (3.28)$$

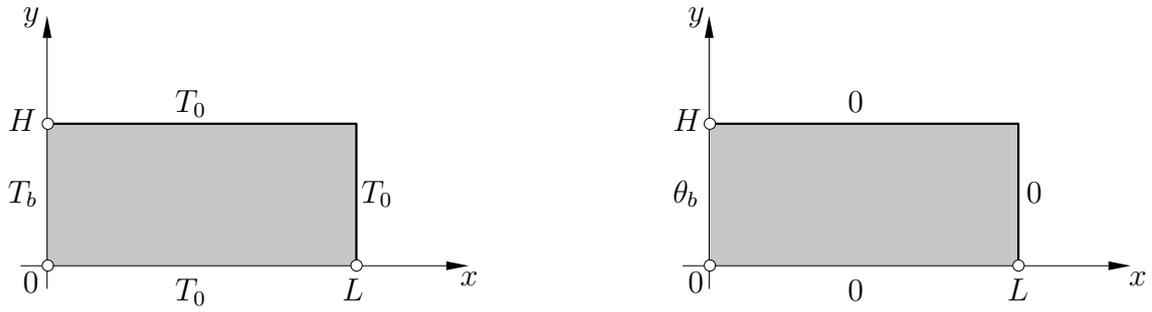


Figure 3.6: Domaine rectangulaire et conditions aux limites.

Les conditions aux limites sont mentionnées à la figure 3.6.

La solution de (3.28) s'obtient par séparation des variables. On pose :

$$\theta(x, y) = X(x) Y(y) \quad (3.29)$$

La substitution dans (3.28) donne :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad (3.30)$$

Le premier rapport ne dépend que de la variable indépendante x , le second que de y . Les deux rapports doivent néanmoins demeurer égaux pour tout x et tout y : ils ne peuvent dès lors être égaux qu'à une constante. Par ailleurs, cette constante devra être positive afin d'obtenir des solutions à multiples racines en y , ce qui est nécessaire pour pouvoir satisfaire aux deux conditions homogènes imposées dans la direction y . On a donc :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda^2, \quad (3.31)$$

où λ est une constante réelle, non encore déterminée.

La solution du système est :

$$\begin{aligned} X(x) &= A \sinh(\lambda x) + B \cosh(\lambda x) \\ Y(y) &= C \sin(\lambda y) + D \cos(\lambda y) \end{aligned} \quad (3.32)$$

La condition en $y = 0$ impose $D = 0$. La condition en $y = H$ conduit à :

$$C \sin(\lambda H) = 0 \quad (3.33)$$

Le problème différentiel en Y ne possédera de solution non identiquement nulle que pour certaines valeurs de λ :

$$\lambda_n = \frac{n \pi}{H}, \quad n \in Z \quad (3.34)$$

et les solutions s'écrivent :

$$Y_n(y) = C_n \sin(\lambda_n y). \quad (3.35)$$

La condition en $x = L$ donne une relation entre les constantes arbitraires d'intégration A et B , et $X(x)$ devient, pour chaque valeur de λ_n :

$$X_n(x) = \frac{A_n}{\cosh(\lambda_n L)} \sinh(\lambda_n(x - L)) \quad (3.36)$$

Il n'est possible de satisfaire à la condition aux limites non homogène en $x = 0$ qu'en adoptant pour solution une superposition des solutions précédemment obtenues:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh(\lambda_n(x - L)) \sin(\lambda_n y) \quad (3.37)$$

On se limite aux valeurs entières positives de n , afin que les solutions superposées soient linéairement indépendantes. En outre, on constate que le cas $n = 0$ n'apporte aucune contribution différente de zéro.

La condition en $x = 0$ impose :

$$\theta(0, y) = \theta_b = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh(\lambda_n L) \sin(\lambda_n y). \quad (3.38)$$

On observe, ici, que les solutions $\sin(\lambda_n y)$ sont orthogonales entre elles sur l'intervalle $[0, H]$, par rapport à la fonction poids unité pour le produit scalaire $\langle fg \rangle = \int_0^H fg dy$.

La fonction constante θ_b peut donc être développée en série de ces fonctions orthogonales. on trouve:

$$E_n \sinh(\lambda_n L) = \frac{\theta_b \int_0^H \sin(\lambda_n y) dy}{\int_0^H \sin^2(\lambda_n y) dy} \quad (3.39)$$

Les valeurs paires de n conduisent à des valeurs nulles de E_n . En posant:

$$n = 2m + 1, \quad \lambda_m = \frac{(2m + 1) \pi}{H}, \quad m \in N, \quad (3.40)$$

la solution s'écrit:

$$\theta(x, y) = \frac{4\theta_b}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sinh(\lambda_m(x-L)) \sin(\lambda_m y)}{\sinh(\lambda_m L) (2m+1)}. \quad (3.41)$$

Elle est représentée à la figure 3.7

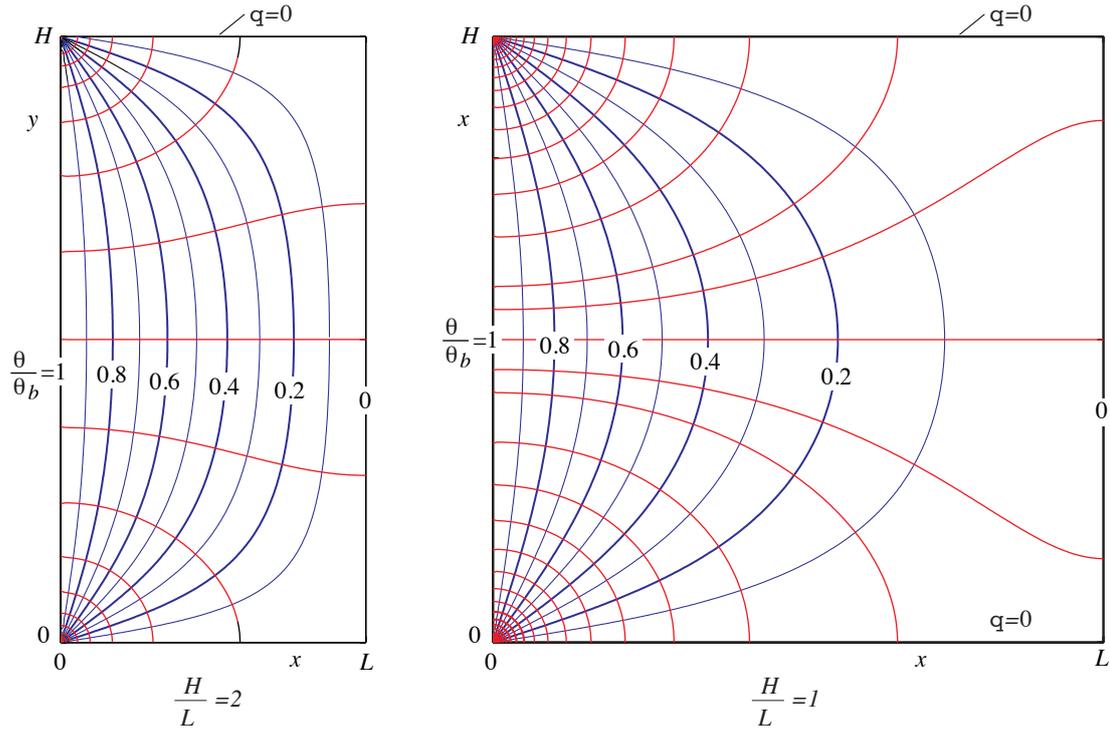


Figure 3.7: Isothermes et lignes de flux dans un domaine rectangulaire.

3.2 Transfert thermique en écoulement établi

On considère ici différents cas de transfert thermique en écoulement établi en conduite cylindrique circulaire. Le profil de vitesse est donc connu: c'est le profil de Poiseuille (avec la notation malheureuse, r au lieu de y , déjà utilisée auparavant).

En négligeant la conduction de chaleur dans la direction axiale,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (3.42)$$

l'équation de l'énergie se réduit à:

$$\rho c u \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \mu \left(\frac{du}{dr} \right)^2 . \quad (3.43)$$

avec $\frac{du}{dr}$ provenant du profil de vitesse:

$$\frac{du}{dr} = -4 \frac{u_m}{R} \frac{r}{R} . \quad (3.44)$$

Le transfert thermique est dit "établi" lorsque le profil de différence de température, $T - T_w$, avec T_w la température de paroi, ne dépend pas de x (i.e., n'est fonction que de r):

$$\frac{\partial}{\partial x} (T - T_w) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_w}{dx} . \quad (3.45)$$

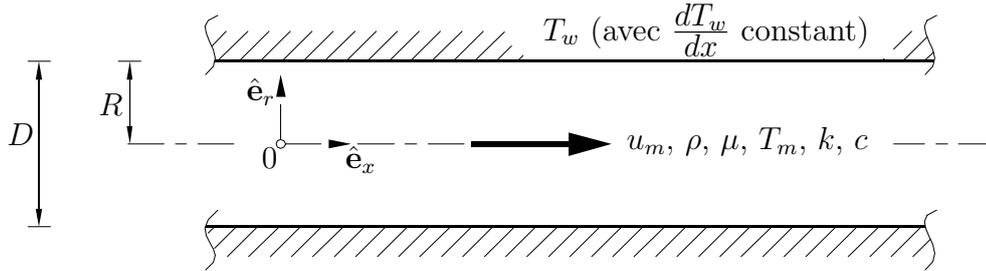


Figure 3.8: Transfert thermique établi avec écoulement de Poiseuille en conduite circulaire.

3.2.1 Transfert thermique établi avec température de paroi constante

On considère tout d'abord le cas du transfert thermique établi avec température de paroi, T_w , constante (i.e., $\frac{dT_w}{dx} = 0$). On a donc que

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_w}{dx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 . \quad (3.46)$$

Il n'y a donc pas de conduction de chaleur dans la direction axiale (i.e., pas besoin de faire l'hypothèse de la négliger: elle s'annule exactement).

L'équation de l'énergie se simplifie alors davantage:

$$0 = k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \mu \left(\frac{du}{dr} \right)^2 . \quad (3.47)$$

La dissipation visqueuse contrebalance donc exactement la conduction, ce qui conduit à:

$$k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} (T - T_w) \right) = -16 \mu \frac{u_m^2}{R^2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 . \quad (3.48)$$

Par intégration, on obtient:

$$\frac{d}{dr} (T - T_w) = -4 \frac{\mu u_m^2}{k R} \left(\frac{r}{R} \right)^3 , \quad (3.49)$$

et donc, finalement, le profil de différence de température:

$$T - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) . \quad (3.50)$$

La différence de température maximale est obtenue au centre de la conduite:

$$T_c - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} . \quad (3.51)$$

Par exemple, pour de l'air à 20°C ($\mu = 1.81 \cdot 10^{-5}$ N s/m² et $k = 2.57 \cdot 10^{-2}$ W/(m K)) circulant en conduite avec une vitesse de débit, $u_m = 1$ m/s, on obtient $T_c - T_w = 0.00074^\circ\text{C}$, ce qui est faible. Pour de l'eau à 20°C ($\mu = 1.00 \cdot 10^{-3}$ N s/m² et $k = 0.603$ W/(m K)) circulant avec une vitesse de débit $u_m = 1$ m/s, on obtient $T_c - T_w = 0.0017^\circ\text{C}$, ce qui est aussi faible. Comme nous le verrons plus loin, la dissipation visqueuse est en fait souvent négligée dans les phénomènes de transfert de chaleur

La chaleur produite au sein de l'écoulement par la dissipation visqueuse est dégagée vers l'extérieur par conduction à la paroi. Comme le profil de température ne dépend pas de x , le transfert de chaleur ne dépend pas non plus de x : il s'agit bien d'un transfert thermique établi. On a, pour le transfert de chaleur à la paroi:

$$q_w = -k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} = 4 \frac{\mu u_m^2}{R} = 4 k \frac{(T_c - T_w)}{R} . \quad (3.52)$$

Le coefficient adimensionnel de transfert de chaleur est le nombre de Nusselt défini par

$$Nu = \frac{q_w}{k (T_c - T_w) / D} . \quad (3.53)$$

On a donc déterminé ici que le nombre de Nusselt en transfert thermique établi pour un écoulement de Poiseuille en conduite circulaire est $Nu = 8$.

En fait, la température maximale n'est pas la grandeur que l'on utilise en ingénierie pour définir un coefficient de transfert global. On utilise plutôt la température moyenne

représentative du flux énergétique thermique au sein de la conduite. A chaque tube de courant de section dA correspond un flux énergétique local égal à $cT\rho u dA$ (énergie thermique \times débit massique). La température de référence (“cup mixing temperature”) est définie par:

$$cT_m = \frac{\int_A cT\rho u dA}{\int_A \rho u dA}, \quad (3.54)$$

et donc, en incompressible, par:

$$T_m = \frac{\int_A T u dA}{\int_A u dA} = \frac{\int_A T u dA}{u_m A}, \quad (3.55)$$

Le flux énergétique thermique global de la conduite est donc, par définition de T_m , égal à $cT_m\rho u_m A$. De manière équivalente, on a, par soustraction de T_w , que

$$T_m - T_w = \frac{\int_A (T - T_w) u dA}{\int u dA}. \quad (3.56)$$

Pour le profil de différence de température ci-dessus, on obtient, par intégration (avec $dA = r d\theta dr$ et en utilisant $\eta = r/R$):

$$T_m - T_w = \frac{1}{u_m \pi R^2} \frac{\mu u_m^2}{k} 2 u_m 2\pi R^2 \int_0^1 (1 - \eta^4) (1 - \eta^2) \eta d\eta = \frac{5}{6} \frac{\mu u_m^2}{k}. \quad (3.57)$$

On peut donc aussi écrire, pour le profil de différence de température, voir Fig. 3.9:

$$\frac{T - T_w}{T_m - T_w} = \frac{6}{5} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right). \quad (3.58)$$

Le transfert de chaleur à la paroi est alors

$$q_w = 4 \frac{\mu u_m^2}{R} = \frac{24}{5} k \frac{(T_m - T_w)}{R}, \quad (3.59)$$

de sorte que le nombre de Nusselt défini en utilisant $T_m - T_w$ vaut:

$$Nu = \frac{q_w}{k (T_m - T_w) / D} = \frac{48}{5} = 9.60. \quad (3.60)$$

3.2.2 Transfert thermique établi avec température de paroi linéaire

On considère ensuite le cas, plus complexe, du transfert thermique établi avec température de paroi, T_w , linéaire en x (i.e., $\frac{dT_w}{dx}$ constant). On a donc que

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_w}{dx} = \text{constante} \quad \implies \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0. \quad (3.61)$$

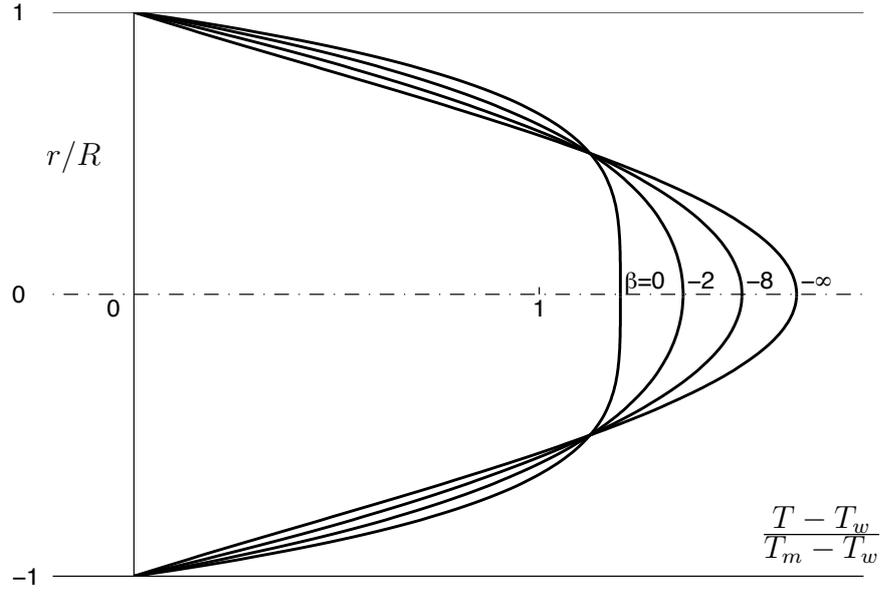


Figure 3.9: Profils de différence de température pour le transfert thermique établi avec écoulement de Poiseuille en conduite circulaire. Cas avec $\beta \leq 0$.

Il n'y a donc, de nouveau, pas de conduction de chaleur dans la direction axiale (i.e., pas besoin de faire l'hypothèse de la négliger: elle s'annule exactement). L'équation d'énergie devient ici:

$$\rho c \frac{dT_w}{dx} 2 u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) = k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} (T - T_w)\right) + 16 \mu \frac{u_m^2}{R^2} \left(\frac{r}{R}\right)^2. \quad (3.62)$$

Celle-ci s'intègre pour donner:

$$\frac{d}{dr} (T - T_w) = \frac{1}{2} \frac{\rho c}{k} \frac{dT_w}{dx} u_m R \left(2 \frac{r}{R} - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right) - 4 \frac{\mu u_m^2}{k R} \left(\frac{r}{R}\right)^3, \quad (3.63)$$

et, finalement, le profil de différence de température:

$$T - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right) - \frac{1}{8} \frac{\rho c}{k} \frac{dT_w}{dx} u_m R^2 \left(3 - 4 \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right). \quad (3.64)$$

Le transfert de chaleur à la paroi est:

$$q_w = -k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} = 4 \frac{\mu u_m^2}{R} - \frac{1}{2} \rho c \frac{dT_w}{dx} u_m R. \quad (3.65)$$

On obtient aussi, par intégration, que:

$$T_m - T_w = \frac{5}{6} \frac{\mu u_m^2}{k} - \frac{11}{48} \frac{\rho c}{k} \frac{dT_w}{dx} u_m R^2. \quad (3.66)$$

Les équations ci-dessus constituent la solution exacte du problème posé. Définissons le paramètre adimensionnel β :

$$\beta = \left(\frac{\rho c}{k} \frac{dT_w}{dx} u_m R^2 \right) / \left(\frac{\mu u_m^2}{k} \right) = \rho c \frac{dT_w}{dx} \frac{R^2}{\mu u_m}. \quad (3.67)$$

On a alors:

$$\begin{aligned} T - T_w &= \frac{\mu u_m^2}{k} \left[\left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) - \frac{1}{8} \beta \left(3 - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) \right], \\ T_m - T_w &= \frac{\mu u_m^2}{k} \left[\frac{5}{6} - \frac{11}{48} \beta \right], \\ \frac{q_w}{k/D} &= \frac{\mu u_m^2}{k} [8 - \beta], \\ \frac{T - T_w}{T_m - T_w} &= \frac{\left[\left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) - \frac{1}{8} \beta \left(3 - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) \right]}{\left[\frac{5}{6} - \frac{11}{48} \beta \right]}, \\ Nu &= \frac{q_w}{k (T_m - T_w) / D} = \frac{[8 - \beta]}{\left[\frac{5}{6} - \frac{11}{48} \beta \right]}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

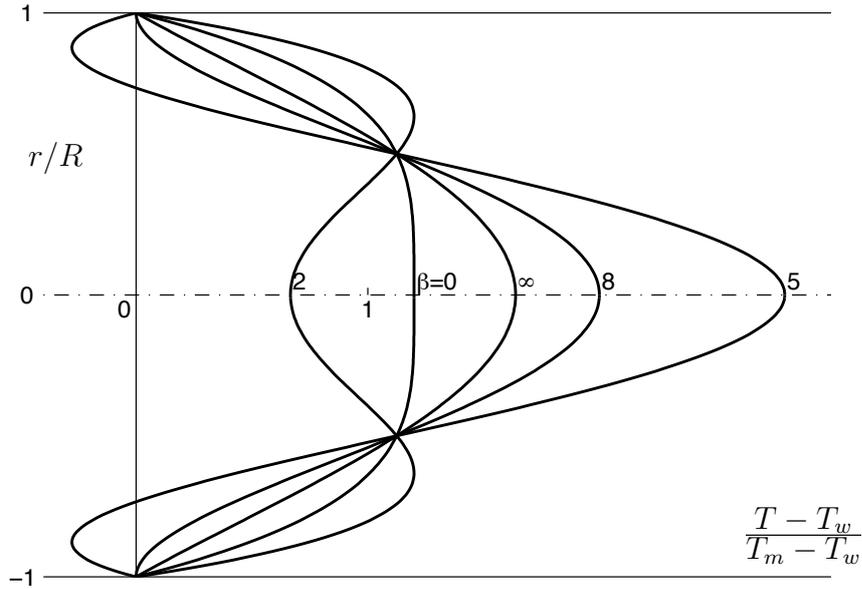


Figure 3.10: Profils de différence de température pour le transfert thermique établi avec écoulement de Poiseuille en conduite circulaire. Cas avec $\beta \geq 0$.

Les profils normalisés de différence de température, $\frac{T - T_w}{T_m - T_w}$, sont donnés aux Fig. 3.9 et Fig. 3.10 pour différentes valeurs du paramètre β . La variation du nombre de Nusselt en

fonction de β est présentée à la Fig. 3.11. Le cas $\beta = 0$ correspond au cas avec température de paroi constante: $Nu = \frac{48}{5} = 9.60$. Le cas $\beta = 8$ correspond au cas adiabatique: $q_w = 0$ (et donc $Nu = 0$) alors que $T_m - T_w \neq 0$. Le cas $\beta = \frac{40}{11} = 3.64$ correspond à $q_w \neq 0$ alors que $T_m - T_w = 0$, et donc à $Nu \rightarrow \infty$.

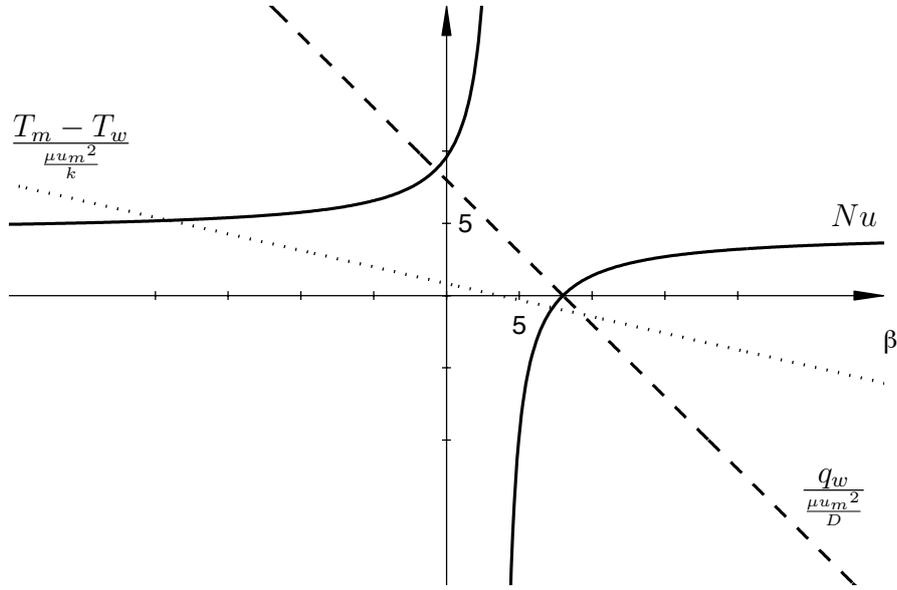


Figure 3.11: Variation du nombre de Nusselt en fonction de β pour le transfert thermique établi avec écoulement de Poiseuille en conduite circulaire.

Le cas avec $\beta \rightarrow \pm\infty$ (i.e., $\frac{1}{\beta} \rightarrow 0$) correspond au cas avec dT_w/dx non-nul mais avec dissipation visqueuse négligeable. On a alors simplement:

$$\begin{aligned}
 T - T_w &= -\frac{1}{8} \frac{\rho c}{k} \frac{dT_w}{dx} u_m R^2 \left(3 - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right), \\
 T_m - T_w &= -\frac{11}{48} \frac{\rho c}{k} \frac{dT_w}{dx} u_m R^2, \\
 q_w &= -\frac{1}{2} \rho c \frac{dT_w}{dx} u_m R, \\
 \frac{T - T_w}{T_m - T_w} &= \frac{6}{11} \left(3 - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right), \\
 Nu &= \frac{q_w}{k (T_m - T_w) / D} = \frac{48}{11} = 4.36.
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

Finalement, on note une propriété remarquable de tous les profils de température:

quel que soit β , on a toujours

$$\frac{T - T_w}{T_m - T_w} = \frac{9}{8} \quad \text{en} \quad \frac{r}{R} = \frac{1}{2}. \quad (3.70)$$

3.2.3 Entrée thermique: le problème de Grätz

Les cas considérés ci-avant sont les seuls avec écoulement de Poiseuille et avec transfert thermique établi. Considérons maintenant le problème plus complexe du développement d'un profil de température au sein d'un écoulement établi suite à un changement brusque de la température de paroi, voir Fig. 3.12. Pour $x < 0$, la température de paroi est égale à T_0 . Pour $x > 0$, elle est égale à $T_w \neq T_0$ mais constante.

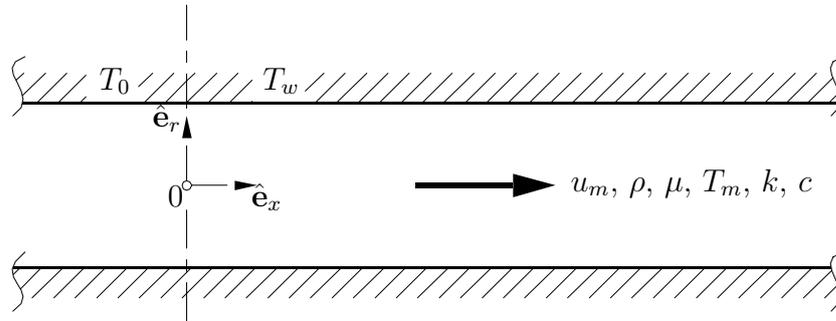


Figure 3.12: Entrée thermique avec écoulement de Poiseuille en conduite circulaire.

On simplifie le problème davantage en négligeant le terme de dissipation visqueuse. On a donc, pour l'équation d'énergie:

$$\rho c u \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (3.71)$$

ou, avec la diffusivité thermique, $\alpha = \frac{k}{\rho c} = \frac{\nu}{Pr}$,

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (3.72)$$

Comme on a négligé la dissipation visqueuse, le profil de température pour $x < 0$ est tout à fait plat: $T = T_0$. (En effet, cela correspond au cas vu ci-avant avec dissipation visqueuse négligée et avec température de paroi constante.) Le fait que $T = T_0$ soit valable jusqu'en $x = 0$ provient du fait qu'on a aussi négligé la conduction axiale. De même, loin en aval de la discontinuité de température de paroi, on atteindra de nouveau

un profil plat: $T \rightarrow T_w$ lorsque $x \rightarrow \infty$. Le problème à résoudre est, bien sûr, la zone de développement: problème de l'“entrée thermique”.

Avec l'écoulement de Poiseuille, $u = 2 u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$, on obtient:

$$2 u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) . \quad (3.73)$$

On travaille ici en variable adimensionnelle. On définit

$$T^* = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}, \quad \eta = \frac{r}{R}, \quad \zeta = \frac{1}{Re_D Pr} \frac{x}{D} = \frac{1}{Pe_D} \frac{x}{D}, \quad (3.74)$$

avec $Pe_D = Re_D Pr$ le nombre de Peclet. L'équation se réduit alors à la forme générique:

$$(1 - \eta^2) \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} = \frac{2}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) . \quad (3.75)$$

A noter que le choix de la normalisation de x a été dicté par le besoin d'obtenir cette forme générique indépendante des paramètres dimensionnels (à faire en exercice). Les conditions initiale et à la limite deviennent:

$$T^*(\eta, 0) = 1, \quad T^*(1, \zeta) = 0 . \quad (3.76)$$

Les variables sont clairement séparables. On cherche donc une solution de la forme:

$$T^*(\eta, \zeta) = f(\eta) g(\zeta) . \quad (3.77)$$

On obtient alors:

$$(1 - \eta^2) f \frac{dg}{d\zeta} = \frac{2}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{df}{d\eta} \right) g, \quad (3.78)$$

et donc:

$$\frac{1}{2g} \frac{dg}{d\zeta} = \frac{1}{\eta (1 - \eta^2) f} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{df}{d\eta} \right) = -\lambda^2 . \quad (3.79)$$

Cela donne:

$$\frac{dg}{d\zeta} + 2\lambda^2 g = 0, \quad (3.80)$$

$$\eta \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{df}{d\eta} + \lambda^2 \eta (1 - \eta^2) f = 0 . \quad (3.81)$$

La fonction g est de la forme $g = C e^{-2\lambda^2 \zeta}$. La solution du problème est donc obtenue comme:

$$T^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(\eta) e^{-2\lambda_n^2 \zeta} \quad (3.82)$$

avec

$$\eta^2 \frac{d^2 f_n}{d\eta^2} + \eta \frac{df_n}{d\eta} + \lambda_n^2 \eta^2 (1 - \eta^2) f_n = 0 . \quad (3.83)$$

L'imposition de la condition à la limite, $T^*(1, \zeta) = 0$, implique que $f_n(1) = 0$: les λ_n (i.e., les valeurs propres) sont donc telles que les solutions $f_n(\eta)$ de l'équation différentielle s'annulent en $\eta = 1$. L'équation différentielle ci-dessus est fort complexe: à cause du terme $(1 - \eta^2)$, il ne s'agit pas d'une équation de Bessel. Le problème a cependant été résolu par Poiseuille en 1885.

Le problème plus simple résolu par Grätz en 1883 est celui où le profil de vitesse est simplifié: on considère un profil plat: $u = u_m$. C'est ce qu'on appelle un écoulement "bouchon" ("slug flow"). Dans ce cas, on obtient plus simplement:

$$\frac{\partial T^*}{\partial \zeta} = \frac{4}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right), \quad (3.84)$$

ce qui donne, avec $T^* = f(\eta) g(\zeta)$:

$$f \frac{dg}{d\zeta} = \frac{4}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{df}{d\eta} \right) g, \quad (3.85)$$

et donc:

$$\frac{1}{4g} \frac{dg}{d\zeta} = \frac{1}{\eta f} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{df}{d\eta} \right) = -\lambda^2, \quad (3.86)$$

ou encore:

$$\frac{dg}{d\zeta} + 4\lambda^2 g = 0, \quad (3.87)$$

$$\eta \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{df}{d\eta} + \lambda^2 \eta f = 0. \quad (3.88)$$

La fonction g est donc de la forme $g = C e^{-4\lambda^2 \zeta}$, et la solution du problème est donc construite comme:

$$T^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(\eta) e^{-4\lambda_n^2 \zeta} \quad (3.89)$$

avec

$$\eta^2 \frac{d^2 f_n}{d\eta^2} + \eta \frac{df_n}{d\eta} + \lambda_n^2 \eta^2 f_n = 0, \quad (3.90)$$

ce qui constitue une équation de Bessel d'ordre 0. Les solutions en sont $J_0(\lambda_n \eta)$ et $Y_0(\lambda_n \eta)$. Comme Y_0 n'est pas borné à l'origine, il faut la rejeter. La solution du problème s'exprime donc sous la forme:

$$T^*(\eta, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n \eta) e^{-4\lambda_n^2 \zeta}. \quad (3.91)$$

L'imposition de la condition à la limite, $T^*(1, \zeta) = 0$, implique que $J_0(\lambda_n) = 0$: les λ_n (i.e., les valeurs propres) sont donc les zéros successifs de la fonction de Bessel J_0 . L'imposition de la condition initiale, $T^*(\eta, 0) = 1$ demande que

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n \eta). \quad (3.92)$$

Cette condition permet de déterminer les C_n . En effet, on se souvient que les fonctions de Bessel sont orthogonales avec la fonction de poids η . Plus précisément, pour tout $\alpha \neq \beta$, on a :

$$\int_0^1 \eta J_0(\alpha \eta) J_0(\beta \eta) d\eta = \frac{\beta J_1(\beta) J_0(\alpha) - \alpha J_1(\alpha) J_0(\beta)}{\beta^2 - \alpha^2}, \quad (3.93)$$

avec J_1 la fonction de Bessel régulière d'ordre 1 (Rappel: $\frac{d}{ds} J_0(s) = -J_1(s)$), et donc, pour tout $\lambda_n \neq \lambda_m$ zéros de la fonction J_0 , on obtient l'orthogonalité :

$$\int_0^1 \eta J_0(\lambda_n \eta) J_0(\lambda_m \eta) d\eta = 0. \quad (3.94)$$

On se souvient aussi que :

$$\int_0^1 \eta (J_0(\alpha \eta))^2 d\eta = \frac{1}{2} (J_0(\alpha))^2 + \frac{1}{2} (J_1(\alpha))^2, \quad (3.95)$$

et donc, pour tout λ_n zéro de la fonction J_0 , on obtient la normalisation :

$$\int_0^1 \eta (J_0(\lambda_n \eta))^2 d\eta = \frac{1}{2} (J_1(\lambda_n))^2. \quad (3.96)$$

En multipliant Eq. (3.92) par $\eta J_0(\lambda_m \eta)$ et en intégrant, on obtient donc :

$$\int_0^1 \eta J_0(\lambda_m \eta) d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_0^1 \eta J_0(\lambda_m \eta) J_0(\lambda_n \eta) = C_m \frac{1}{2} (J_1(\lambda_m))^2. \quad (3.97)$$

Comme $\int s J_0(s) ds = s J_1(s)$, on a aussi que

$$\int_0^1 \eta J_0(\lambda_m \eta) d\eta = \frac{1}{\lambda_m} [\eta J_1(\lambda_m \eta)]_0^1 = \frac{1}{\lambda_m} J_1(\lambda_m). \quad (3.98)$$

On a donc, pour le coefficient C_m :

$$C_m = \frac{2}{\lambda_m J_1(\lambda_m)}. \quad (3.99)$$

Le champ de température est finalement obtenu :

$$T^*(\eta, \zeta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \eta)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} e^{-4\lambda_n^2 \zeta}. \quad (3.100)$$

Il est représenté à la Fig. 3.13.

On a aussi :

$$\frac{\partial T^*}{\partial \eta} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n \eta)}{J_1(\lambda_n)} e^{-4\lambda_n^2 \zeta}. \quad (3.101)$$

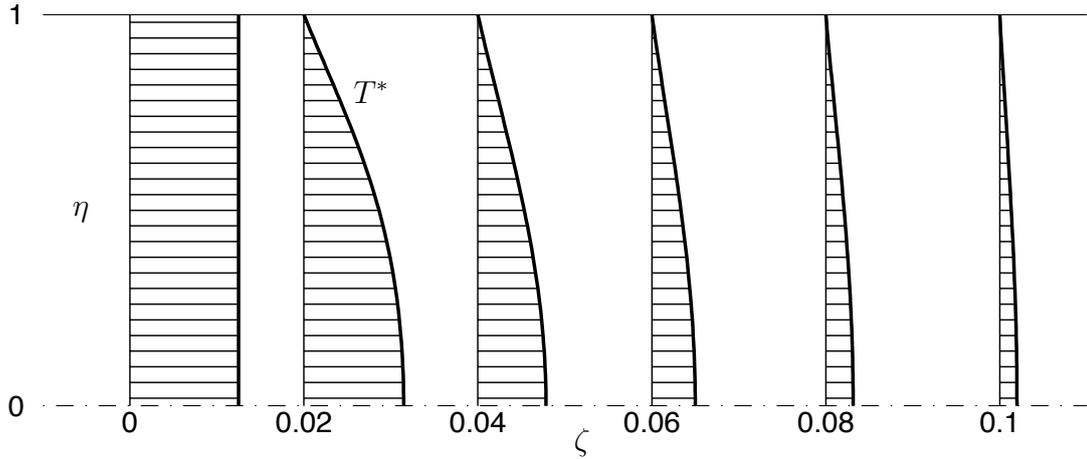


Figure 3.13: Entrée thermique avec écoulement bouchon en conduite circulaire: évolution spatiale du champ de température.

Le transfert de chaleur à la paroi est donc:

$$q_w(\zeta) = -k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{k}{R} (T_0 - T_w) \left. \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = \frac{k}{R} (T_0 - T_w) 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-4\lambda_n^2 \zeta}. \quad (3.102)$$

La température de référence pour définir le nombre de Nusselt est

$$T_m - T_w = \frac{\int (T - T_w) u dA}{\int u dA}, \quad (3.103)$$

ce qui conduit à

$$\frac{T_m - T_w}{T_0 - T_w} = T_m^*(\zeta) = \frac{\int T^* u dA}{u_m A} = \frac{\int T^* dA}{A} = 2 \int_0^1 T^*(\eta, \zeta) \eta d\eta = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} e^{-4\lambda_n^2 \zeta} \quad (3.104)$$

où on a utilisé le fait que $u = u_m$ dans ce problème simplifié d'écoulement bouchon. On a donc, finalement, pour le nombre de Nusselt:

$$Nu(\zeta) = \frac{q_w}{k(T_m - T_w)/D} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-4\lambda_n^2 \zeta}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} e^{-4\lambda_n^2 \zeta}}. \quad (3.105)$$

Son évolution est donnée à la Fig. 3.14.

Quelle est la longueur de développement caractéristique d'une telle entrée thermique? Elle est essentiellement déterminée par le terme exponentiel qui décroît le moins vite,

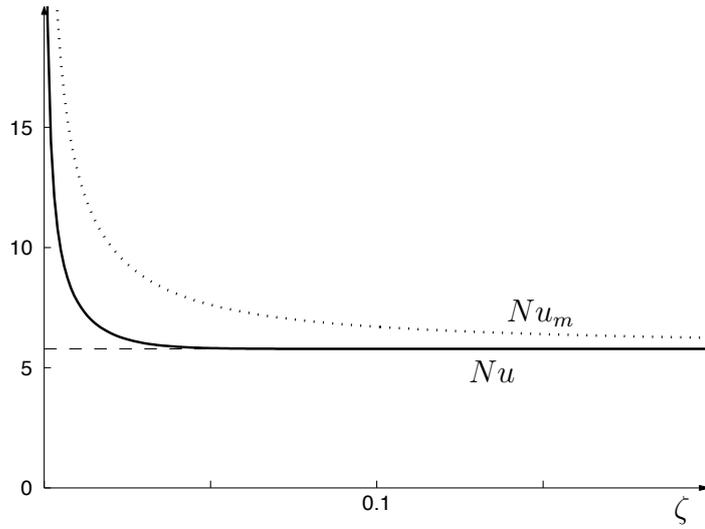


Figure 3.14: Entrée thermique avec écoulement bouchon en conduite circulaire: évolution des nombres de Nusselt Nu et Nu_m .

$e^{-4\lambda_1^2\zeta}$. On a donc, comme estimation de la longueur de développement (pour passer de 1 à e^{-1} dans le facteur exponentiel dominant):

$$\zeta_c \approx \frac{1}{4\lambda_1^2} = 0.043 . \quad (3.106)$$

Quel est le transfert de chaleur asymptotique? Pour $\zeta > \zeta_c$, on obtient:

$$Nu(\zeta > \zeta_c) \approx \lambda_1^2 = 5.78 . \quad (3.107)$$

(Pour comparaison: avec le profil de vitesse de Poiseuille, la longueur caractéristique obtenue est $\zeta_c \approx 0.068$ et le transfert de chaleur asymptotique est $Nu(\zeta > \zeta_c) \approx 3.66$.)

3.2.4 Nombre de Nusselt moyen

On définit le flux de chaleur moyen réalisé sur une distance x par:

$$q_{w,m}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x q_w(x') dx' . \quad (3.108)$$

A noter que, par définition, on a: $d(x q_{w,m}) = q_w dx$.

Le flux de transfert total réalisé sur une distance x est une grandeur importante car il correspond à l'énergie thermique globale perdue (gagnée) par le fluide sur la distance x .

Le bilan global donne:

$$2\pi R x q_{w,m}(x) = \pi R^2 \rho u_m c (T_m(0) - T_m(x)) \quad (3.109)$$

de sorte que $T_m(x)$ peut être calculé si $q_{w,m}(x)$ est connu. La forme différentielle de l'équation de bilan donne:

$$2\pi R d(x q_{w,m}) = 2\pi R q_w dx = -\pi R^2 \rho u_m c dT_m, \quad (3.110)$$

ce qui n'est rien d'autre que le bilan de puissance thermique perdue (acquise) par le fluide sur un élément de longueur dx , voir Fig. 3.15. On a donc:

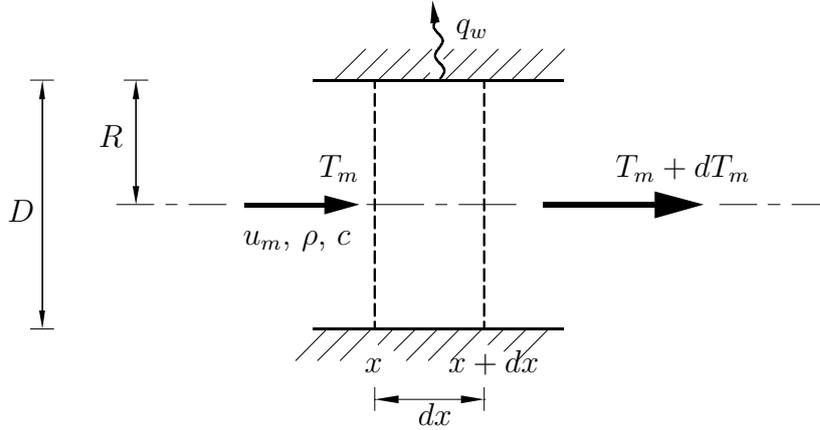


Figure 3.15: Bilan d'énergie thermique perdue (acquise) par l'écoulement établi sur un élément de longueur dx .

$$q_w(x) dx = -\frac{D}{4} \rho u_m c dT_m. \quad (3.111)$$

A noter que la forme différentielle s'intègre bien pour redonner le bilan global:

$$\begin{aligned} x q_{w,m}(x) &= -\frac{D}{4} \rho u_m c (T_m(x) - T_m(0)) = -\frac{1}{4} \frac{\rho u_m D}{\mu} \frac{\mu c}{k} (T_m(x) - T_m(0)) \\ &= \frac{1}{4} Re_D Pr k (T_m(0) - T_m(x)). \end{aligned} \quad (3.112)$$

L'équation différentielle de bilan s'exprime aussi en terme de Nu :

$$\begin{aligned} Nu(x) dx &= \frac{D q_w}{k (T_m - T_w)} dx = -\frac{R^2 \rho u_m c}{k} \frac{dT_m}{(T_m - T_w)} \\ &= -\frac{D \rho u_m D}{4 \mu} \frac{\mu c}{k} \frac{dT_m}{(T_m - T_w)} \\ &= -\frac{D}{4} Re_D Pr \frac{dT_m}{(T_m - T_w)}, \end{aligned} \quad (3.113)$$

résultat différentiel général, qui est même valable lorsque T_w dépend de x . Dans le cas avec T_w constant (comme dans le problème de Grätz), on a $dT_m = d(T_m - T_w)$, et l'équation s'intègre aussi pour donner:

$$x Nu_m(x) = \frac{D}{4} Re_D Pr \log [(T_m(0) - T_w) / (T_m(x) - T_w)] . \quad (3.114)$$

A quoi correspond le nombre de Nusselt moyen, $Nu_m(x)$ défini ci-dessus? En comparant les résultats obtenus pour $q_{w,m}(x)$ et $Nu_m(x)$, on constate qu'il correspond au transfert de chaleur moyen normalisé,

$$Nu_m = \frac{q_{w,m}}{k \Delta T_m / D} , \quad (3.115)$$

avec, comme référence ΔT_m pour la différence globale de température, la moyenne logarithmique:

$$\Delta T_m = \frac{[(T_m(0) - T_w) - (T_m(x) - T_w)]}{\log [(T_m(0) - T_w) / (T_m(x) - T_w)]} . \quad (3.116)$$

Pour le problème de Grätz, on a, en termes adimensionnels,

$$\zeta Nu_m(\zeta) = -\frac{1}{4} \log (T_m^*(\zeta)) . \quad (3.117)$$

Avec l'écoulement bouchon, $u = u_m$, cela donne:

$$Nu_m(\zeta) = -\frac{1}{4\zeta} \log \left[4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} e^{-4\lambda_n^2 \zeta} \right] , \quad (3.118)$$

résultat qui est aussi donné à la Fig. 3.14. Pour $\zeta \gg \zeta_c$, la valeur asymptotique de Nu_m est obtenue en considérant le terme dominant:

$$Nu_m(\zeta \gg \zeta_c) \approx -\frac{1}{4\zeta} \log \left[\frac{4}{\lambda_1^2} e^{-4\lambda_1^2 \zeta} \right] = -\frac{1}{4\zeta} \left(\log \left(\frac{4}{\lambda_1^2} \right) - 4\lambda_1^2 \zeta \right) \approx \lambda_1^2 = 5.78 , \quad (3.119)$$

ce qui est, bien sûr, la même valeur asymptotique que celle obtenue pour $Nu(\zeta > \zeta_c)$. A noter que Nu_m converge moins vite vers la valeur asymptotique que Nu .

Chapitre 4

Ecoulements rampants

Les écoulements rampants sont les écoulements lents aussi communément appelés écoulements de Stokes. Les termes non-linéaires d'inertie sont supposés négligeables par rapport aux termes de gradient de pression et de diffusion. Dans le cas de fluides à grandeurs physiques invariables, ces écoulements sont régis par des équations linéaires:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4.1)$$

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (4.2)$$

Si on prend la divergence de l'équation de quantité de mouvement, on obtient:

$$\nabla^2 p = \nabla \cdot (\nabla p) = \mu \nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{v}) = \mu \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0, \quad (4.3)$$

où on a utilisé la propriété de commutation entre les opérateurs $\nabla \cdot ()$ et $\nabla^2 ()$. La pression est donc harmonique: $\nabla^2 p = 0$.

Si on prend le rotationnel de l'équation de quantité de mouvement, on obtient:

$$0 = \nabla \times (\nabla p) = \mu \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{v}) = \mu \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{v}) = \mu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (4.4)$$

où on a utilisé la propriété de commutation entre les opérateurs $\nabla \times ()$ et $\nabla^2 ()$. Le tourbillon est donc aussi harmonique: $\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0$. De plus, comme on a que $\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\omega}$, on a aussi que $\nabla^2 (\nabla^2 \boldsymbol{\psi}) = 0$: la fonction de courant est donc bi-harmonique. A noter qu'on utilise aussi souvent la notation $\nabla^4 ()$ pour désigner le double Laplacien. On écrit donc, de manière équivalente: $\nabla^4 \boldsymbol{\psi} = 0$.

Les écoulements de Stokes sont donc très particuliers: la pression et le tourbillon sont des fonctions harmoniques, la fonction de courant est une fonction bi-harmonique.

4.1 Écoulement rampant autour d'un cylindre de section circulaire

On considère ici l'écoulement permanent bidimensionnel autour d'un cylindre de section circulaire de rayon a . Cet écoulement n'est pas un écoulement établi. Le nombre de Reynolds caractéristique de cet écoulement est $Re_D = U_\infty D/\nu$, avec U_∞ la vitesse à "l'infini" (i.e., loin du cylindre) et $D = 2a$ le diamètre du cylindre. Étant donné la géométrie circulaire, les coordonnées polaires s'imposent. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ont déjà été présentées. Il est sans espoir d'en obtenir une solution exacte valable pour tous les nombres de Reynolds. Nous nous attachons ici à en chercher la solution dans le cas où $Re_D \ll 1$, les termes non-linéaires d'inertie étant alors négligés par rapport aux termes de gradient de pression et de diffusion: approximation d'écoulement rampant (i.e., d'écoulement de Stokes).

On se place dans un repère fixe par rapport au cylindre. La vitesse infinie amont, U_∞ , est prise positive (i.e., l'écoulement vient de la gauche). La surface du cylindre est une ligne de courant: ψ y est donc constant. En effet, le long du cylindre, on a que $u_r = 0$, ce qui requiert que $\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$ en $r = R$, et donc que ψ soit constant le long du cylindre. Comme la fonction de courant n'est définie qu'à une constante arbitraire près, on peut prendre, sans perte de généralité, que $\psi = 0$ en $r = a$. L'écoulement est symétrique par rapport à l'axe des x : ω est donc antisymétrique par rapport à ce même axe: $\omega(r, -\theta) = -\omega(r, \theta)$.

La solution est facilement obtenue si on travaille en terme de fonction de courant. Très loin du cylindre, on doit avoir que $u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow U_\infty$ et que $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow 0$. On a donc que $\psi \rightarrow U_\infty y = U_\infty r \sin \theta$, que $u_r \rightarrow U_\infty \cos \theta$ et $u_\theta \rightarrow -U_\infty \sin \theta$. On considère donc une fonction ψ de la forme générale:

$$\psi = f(r) \sin \theta, \quad (4.5)$$

ce qui conduit à:

$$-\omega = \nabla^2 \psi = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) f(r) \sin \theta. \quad (4.6)$$

La fonction $f(r)$ est de la forme $a_p r^p$. On a donc:

$$-\omega = a_p (p^2 - 1) r^{p-2} \sin \theta. \quad (4.7)$$

Cela conduit à:

$$0 = -\nabla^2 \omega = a_p ((p-2)^2 - 1) (p^2 - 1) r^{p-4} \sin \theta. \quad (4.8)$$

Comme cela doit être vérifié pour tous les θ , on en déduit que p est solution du polynôme caractéristique: $((p-2)^2 - 1) (p^2 - 1) = 0$. Il y a une racine double: la fonction $f(r)$ est donc une combinaison linéaire de r , $r \log r$, r^{-1} et r^3 . On a donc, finalement:

$$\psi = U_\infty a \left(c_1 \frac{r}{a} + c_2 \frac{a}{r} + c_3 \frac{r}{a} \log \left(\frac{r}{a} \right) + c_4 \left(\frac{r}{a} \right)^3 \right) \sin \theta. \quad (4.9)$$

Le terme en r^3 est à rejeter étant donné les conditions de régularité à l'infini. Strictement parlant, il en est de même du terme en $r \log r$, mais gardons le pour le moment: il diverge certainement beaucoup moins rapidement que le terme en r^3 ! On a donc, pour le champ de vitesse:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_\infty \left(c_1 + c_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 + c_3 \log \left(\frac{r}{a} \right) \right) \cos \theta, \quad (4.10)$$

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty \left(c_1 - c_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 + c_3 \left(\log \left(\frac{r}{a} \right) + 1 \right) \right) \sin \theta. \quad (4.11)$$

La condition de vitesse nulle à la surface du cylindre mène alors à:

$$u_r = U_\infty c_1 \left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 - 2 \log \left(\frac{r}{a} \right) \right) \cos \theta, \quad (4.12)$$

$$u_\theta = -U_\infty c_1 \left(-1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 - 2 \log \left(\frac{r}{a} \right) \right) \sin \theta. \quad (4.13)$$

Finalement, très loin du cylindre, on devrait avoir que $\psi \rightarrow U_\infty y = U_\infty r \sin \theta$, que $u_r \rightarrow U_\infty \cos \theta$ et $u_\theta \rightarrow -U_\infty \sin \theta$. Manifestement, il est impossible de satisfaire, et la condition de vitesse nulle à la paroi, et la condition de vitesse uniforme à l'infini! Ceci constitue le paradoxe de Stokes: il n'y a pas de solution pour l'écoulement rampant autour du cylindre bidimensionnel! Pour tout nombre de Reynolds, aussi faible soit-il, un écoulement rampant autour d'un cylindre bidimensionnel ne peut pas exister. Le terme non-linéaire d'inertie est donc toujours significatif: le supprimer complètement mène à un problème qui n'a tout simplement pas de solution. En désespoir de cause, le mieux que nous puissions ici offrir comme solution (non-régulière) est:

$$\begin{aligned} \psi &= U_\infty a \left(\frac{r}{a} - \frac{a}{r} - 2 \frac{r}{a} \log \left(\frac{r}{a} \right) \right) \sin \theta \\ &= U_\infty a \left(\frac{r}{a} - \frac{a}{r} + \frac{r}{a} \log \left(\left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) \right) \sin \theta, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} u_r &= U_\infty \left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 - 2 \log \left(\frac{r}{a} \right) \right) \cos \theta \\ &= U_\infty \left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \log \left(\left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) \right) \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} u_\theta &= U_\infty \left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 + 2 \log \left(\frac{r}{a} \right) \right) \sin \theta \\ &= U_\infty \left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 - \log \left(\left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) \right) \sin \theta, \end{aligned} \quad (4.16)$$

qui, bien sûr, diverge de façon logarithmique à l'infini. Rappelons, en passant, qu'une divergence logarithmique est une divergence "douce", car plus douce que n'importe quelle puissance de r .

Finalement, il est utile de mentionner que le paradoxe de Stokes est vrai pour l'écoulement autour de n'importe quel corps bidimensionnel: il n'y a pas de solution de type "écoulement rampant".

Nous examinons maintenant le cas très utile de l'écoulement de type Stokes autour de la sphère: celui-là a une solution.

4.2 Ecoulement rampant autour d'une sphère

On considère l'écoulement rampant tridimensionnel autour d'une sphère de rayon a . De nouveau, cet écoulement n'est pas un écoulement établi. Le nombre de Reynolds caractéristique est $Re_D = U_\infty D / \nu$ avec $D = 2a$ le diamètre de la sphère. Les coordonnées sphériques sont ici naturelles. De nouveau, on recherche la solution pour l'écoulement rampant avec $Re_D \ll 1$: les termes non-linéaires d'inertie sont négligés par rapport aux termes de gradient de pression et de diffusion. De nouveau, on travaille en terme de fonction de courant. On se place dans un repère fixe par rapport au centre de la sphère. La vitesse à l'infini, U_∞ , est prise positive. A l'infini, on doit avoir que $u \rightarrow U_\infty$ et que $v \rightarrow 0$. On a donc que $u_r \rightarrow U_\infty \cos \theta$ et $u_\theta \rightarrow -U_\infty \sin \theta$. On a donc que $\psi \rightarrow \frac{1}{2} U_\infty r \sin \theta$. On considère donc une solution de la forme $\psi = f(r) \sin \theta$. Cela conduit à

$$u_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \psi) = \frac{f}{r} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin^2 \theta) = 2 \frac{f}{r} \cos \theta, \quad (4.17)$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \psi) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r f) \sin \theta = -\left(\frac{df}{dr} + \frac{f}{r} \right) \sin \theta. \quad (4.18)$$

Le tourbillon est

$$\begin{aligned} -\omega &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \nabla^2 \psi - \frac{\psi}{r^2 \sin^2 \theta} \\ &= \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} - \frac{2}{r^2} f \right) \sin \theta = g(r) \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Le tourbillon est harmonique, i.e., la fonction de courant est biharmonique:

$$0 = \nabla^2 \omega - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} = \left(\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{2}{r^2} g \right) \sin \theta. \quad (4.20)$$

On a donc finalement l'équation différentielle pour $f(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{2}{r^2} \right) f = 0 \quad (4.21)$$

Cette équation est linéaire, et sa solution est de la forme r^p . Par substitution, on obtient le polynôme caractéristique:

$$p(p-3)(p-1)(p+2) = 0 \quad (4.22)$$

dont les racines sont $p = 0$, $p = 3$, $p = 1$ et $p = -2$. La fonction $f(r)$ est donc une combinaison linéaire de 1 , r^3 , r et r^{-2} . On a donc:

$$\psi = U_\infty a \left(c_1 + c_2 \frac{r}{a} + c_3 \left(\frac{a}{r} \right)^2 + c_4 \left(\frac{r}{a} \right)^3 \right) \sin \theta; \quad (4.23)$$

La condition à l'infini requiert que $c_4 = 0$ et que $c_2 = 1/2$. Les conditions de vitesse nulle à la surface de la sphère, $u_r = u_\theta = 0$ en $r = a$, déterminent ensuite que $c_1 = -3/4$ et que $c_3 = 1/4$. Finalement, on a donc:

$$\psi = U_\infty a \left(\frac{1}{2} \frac{r}{a} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) \sin \theta, \quad (4.24)$$

$$u_r = U_\infty \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right) \cos \theta, \quad (4.25)$$

$$u_\theta = -U_\infty \left(1 - \frac{3}{4} \left(\frac{a}{r} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right) \sin \theta, \quad (4.26)$$

$$\omega = -\frac{U_\infty}{a} \frac{3}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \sin \theta. \quad (4.27)$$

On a $\psi = 0$ sur la surface de la sphère. Les lignes de courant de l'écoulement sont données à la Fig. 4.1. Le champ tourbillon est donné à la Fig. 4.2.

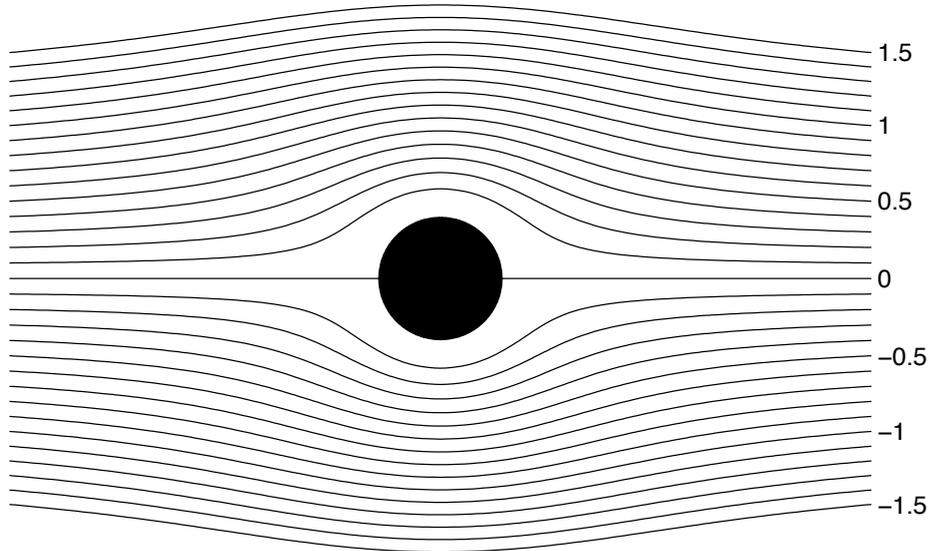


Figure 4.1: Lignes de courant pour l'écoulement rampant autour de la sphère: iso-contours de $\psi / (U_\infty a)$.

Notons que la perturbation causée par la sphère est considérable: le champ de vitesse ne décroît qu'en $1/r$, ce qui est très lent. Finalement, notons que le champ de vitesse d'un

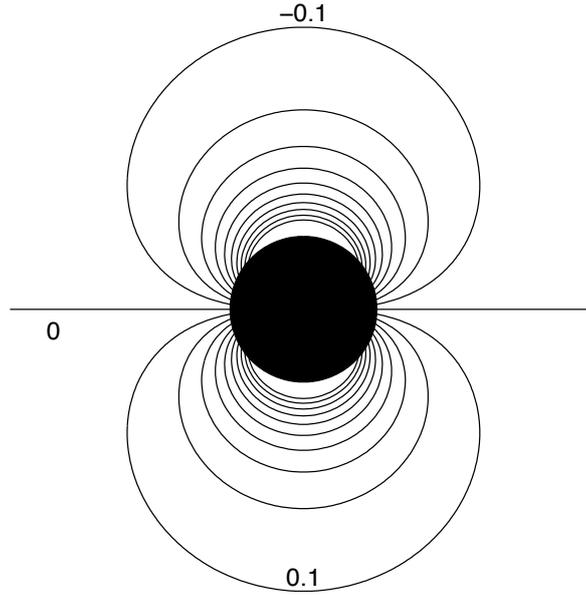


Figure 4.2: Tourbillon pour l'écoulement rampant autour de la sphère: iso-contours de $\omega / (U_\infty/a)$.

écoulement de Stokes ne dépend pas de la viscosité, μ du fluide. Il n'en va pas de même, bien sûr, pour la contrainte de cisaillement:

$$\tau_{r\theta} = 2\mu d_{r\theta} = \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = -\mu \frac{U_\infty}{a} \frac{3}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^4 \sin \theta . \quad (4.28)$$

Il n'en va pas non plus de même pour la pression. Celle-ci est obtenue par intégration:

$$p - p_\infty = -\mu \frac{U_\infty}{a} \frac{3}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos \theta \quad (4.29)$$

avec p_∞ la pression à l'infini. Rappelons qu'en écoulement incompressible, la pression n'est définie qu'à une constante près. Le champ de pression de l'écoulement est donné à la Fig. 4.3.

Par intégration de la composante en x de la contrainte de cisaillement agissant sur la surface de la sphère, on obtient la traînée de frottement, \mathcal{D}_τ (\mathcal{D} pour "drag"). l'élément de surface est ici $dS = (r \sin \theta d\phi)(r d\theta)$ avec ϕ l'angle azimutal. On a donc:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\tau &= - \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\tau_{r\theta} \Big|_{r=a} \sin \theta \right) (a \sin \theta d\phi)(a d\theta) \\ &= \mu \frac{U_\infty}{a} \frac{3}{2} 2\pi a^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 4\pi \mu U_\infty a . \end{aligned} \quad (4.30)$$

De même, par intégration de la composante en x de la pression agissant sur la surface de la sphère, on obtient la traînée de pression, D_p :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_p &= - \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \left((p - p_{\infty}) \Big|_{r=a} \cos \theta \right) (a \sin \theta d\phi)(a d\theta) \\ &= \mu \frac{U_{\infty}}{a} \frac{3}{2} 2\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 2\pi \mu U_{\infty} a . \end{aligned} \quad (4.31)$$

Nous avons ici obtenu la célèbre formule de Stokes (1851) pour la traînée de la sphère en écoulement rampant: 2/3 de traînée de frottement et 1/3 de traînée de pression, le tout donnant:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\tau} + \mathcal{D}_p = 6\pi \mu U_{\infty} a . \quad (4.32)$$

Le coefficient adimensionnel de traînée est défini en utilisant la section de la sphère comme surface de référence:

$$C_{\mathcal{D}} = \frac{\mathcal{D}}{\frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2 \pi a^2} = \frac{12\nu}{U_{\infty} a} = \frac{24}{Re_D} . \quad (4.33)$$

Cette célèbre formule s'avère très utile dans de nombreux problèmes pratiques. Bien que strictement valable pour $Re_D \ll 1$, il se fait qu'elle se compare bien avec les résultats expérimentaux jusqu'à des valeurs de Re_D proches de l'unité.

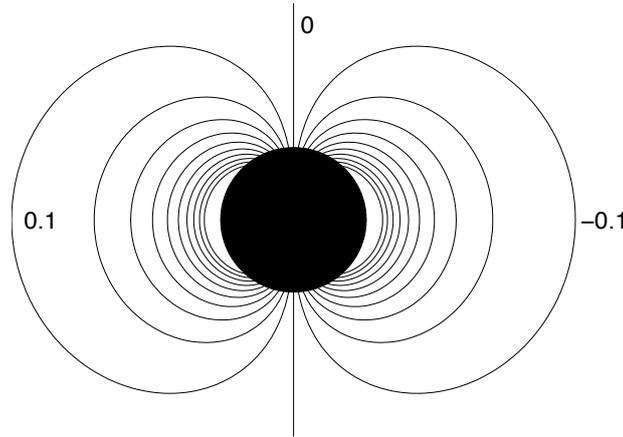


Figure 4.3: Pression pour l'écoulement rampant autour de la sphère: iso-contours de $(p - p_{\infty}) / (\mu U_{\infty} / a)$.

4.3 Théorie de la lubrification

La théorie de la lubrification fait partie des écoulements rampants. Pour de tels écoulements, les termes non-linéaires d'inertie sont négligeables par rapport aux termes de gradient

de pression et de diffusion, et ce parce que le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement est petit. Cette hypothèse est, bien sûr, à vérifier.

Nous considérons ici, à titre d'exemple et d'introduction à la théorie de la lubrification, le cas du palier plat et plan, voir Fig. 4.4.

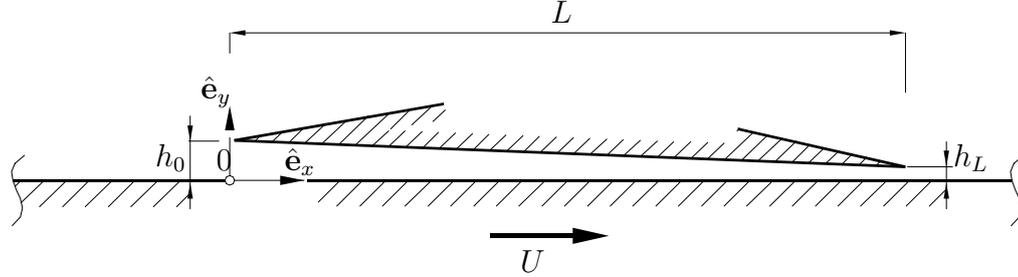


Figure 4.4: Lubrification: cas du palier plat.

Dans le repère choisi, le bloc supérieur (i.e., le palier) est fixe et est légèrement incliné par rapport à la plaque inférieure. Cette dernière est mobile et se déplace à vitesse constante U . A noter que, dans un système de coordonnées fixé à la plaque, ce serait le contraire: le palier serait mobile et la plaque serait fixe. Cela revient au même: en effet, la vitesse de déplacement relatif étant constante, on peut travailler dans l'un ou l'autre repère. Pour la suite, nous verrons que le repère avec palier fixe facilite les développements mathématiques.

L'important pour créer de la portance (et donc assurer le rôle à la fois porteur et lubrificateur du palier), est, comme nous le verrons ci-dessous, que l'écart entre les deux surfaces solides ne soit pas constant, d'où l'angle relatif, α , entre les deux surfaces. Dans le cas du palier plat, on a

$$h(x) = h_0 - (h_0 - h_L) \frac{x}{L} = h_0 - \tan \alpha x . \quad (4.34)$$

A noter que l'angle est faible: $\alpha \approx \tan \alpha \ll 1$. Il faut aussi que l'écart soit faible comparé à la longueur du palier: $h(x) \ll L$: Cela permet de valider l'hypothèse que les termes d'inertie sont effectivement négligeables: $\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \ll \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, c.-à-d., en utilisant les ordres de grandeur, que:

$$\rho U \frac{U}{L} \ll \mu \frac{U}{h_0^2} , \quad (4.35)$$

où on a choisi h_0 car c'est le plus critique. Cela revient donc à demander que

$$\frac{\rho U L}{\mu} \left(\frac{h_0}{L} \right)^2 = Re_L \left(\frac{h_0}{L} \right)^2 \ll 1 . \quad (4.36)$$

On voit donc que le nombre de Reynolds, Re_L , basé sur la longueur, L , du palier peut être grand si le plus grand écart, h_0 , est suffisamment petit. A noter que ce n'est pas un facteur h_0/L qui multiplie Re_L , mais bien un facteur $(h_0/L)^2$! Ceci est tout à l'avantage de la théorie de la lubrification: elle sera souvent tout à fait justifiée et donc souvent très utile en ingénierie. A titre d'exemple, considérons un cas tel que $U = 10$ m/s, $L = 10$ cm et $h_0 = 0.1$ mm, avec une huile de lubrification SAE 50 à $T = 60^\circ C$. La viscosité cinématique de cette huile à cette température est $\nu \approx 6.7 \cdot 10^{-5}$ m²/s. On aura alors $Re_L \approx 1.5 \cdot 10^4$ qui est clairement beaucoup plus grand que l'unité, mais $Re_L (h_0/L)^2 \approx 1.5 \cdot 10^{-2}$ qui est clairement beaucoup plus petit que l'unité. L'hypothèse consistant à admettre que les termes d'inertie sont négligeables est donc ici tout à fait justifiée.

Comme l'angle α est faible, on peut facilement obtenir une très bonne approximation de l'écoulement. En effet, bien que l'écoulement ne soit pas strictement établi puisque la section de passage varie en x , il est "presque établi" puisque la section de passage varie faiblement en x vu que l'angle est faible. On a en fait que $\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$. L'écoulement est donc essentiellement un écoulement de type Poiseuille-Couette avec gradient de pression. Dans le cas présent avec $u(0) = U$ et $u(h) = 0$, le profil de vitesse Poiseuille-Couette est:

$$u = -\frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2\mu} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) + U \left(1 - \frac{y}{h}\right). \quad (4.37)$$

Pourquoi l'écoulement ne serait-il pas simplement un écoulement de Couette avec gradient de pression nul? Cette solution n'est pas acceptable car elle viole la conservation du débit au travers de chaque section. En plus de l'écoulement de Couette, un écoulement de Poiseuille doit aussi se développer de manière à assurer la conservation du débit au travers de chaque section. A cet écoulement de Poiseuille correspond un gradient de pression. Celui-ci est nécessairement fonction de x afin d'assurer la conservation de débit à chaque section. La pression est la même à l'entrée, $x = 0$, et à la sortie, $x = L$, soit $p(0) = p(L) = p_0$. Elle augmente, atteint un maximum, et diminue. L'écoulement de Poiseuille est donc dirigé vers l'entrée et vers la sortie, en partant du point de pression maximum.

Le débit, Q , est uniforme (i.e., ne dépend pas de x):

$$Q = \int_0^h u dy = -\frac{dp}{dx} \frac{h^3}{12\mu} + \frac{U h}{2}, \quad (4.38)$$

ce qui entraîne la relation suivante:

$$-h^3 \frac{dp}{dx} = 12\mu \left(Q - \frac{U h}{2}\right). \quad (4.39)$$

Ceci constitue l'équation de Reynolds en lubrification (1889). A noter que le profil de gradient de pression est connu si Q est connu. La forme différentielle de cette équation est obtenue en écrivant que $dQ/dx = 0$:

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right) = 6\mu U \frac{dh}{dx}. \quad (4.40)$$

Donc, pour tout palier avec $h(x)$ donné, on peut intégrer (numériquement, voire exactement quand c'est possible) l'équation différentielle de Reynolds avec les conditions aux limites: $p(0) = p(L) = p_0$. Ce n'est pas simple, même dans le cas du palier plat (à essayer en exercice).

En fait, dans le cas du palier plat, on peut grandement se faciliter la tâche en utilisant une petite astuce qui permet de déterminer Q et donc tout le reste. On écrit:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dh} \frac{dh}{dx} = -\frac{dp}{dh} \frac{(h_0 - h_L)}{L}, \quad (4.41)$$

ce qui conduit à:

$$\frac{dp}{dh} = \frac{12 \mu L}{(h_0 - h_L)} \left(\frac{Q}{h^3} - \frac{U}{2h^2} \right), \quad (4.42)$$

et donc, par intégration, à

$$p(h) = \frac{6 \mu L}{(h_0 - h_L)} \left(\frac{U}{h} - \frac{Q}{h^2} + C \right). \quad (4.43)$$

La constante d'intégration se détermine facilement en utilisant la condition que $p = p_0$ en $h = h_0$,

$$p_0 = \frac{6 \mu L}{(h_0 - h_L)} \left(\frac{U}{h_0} - \frac{Q}{h_0^2} + C \right), \quad (4.44)$$

et donc, finalement:

$$p(h) - p_0 = \frac{6 \mu L}{(h_0 - h_L)} \left(U \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_0} \right) - Q \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) \right). \quad (4.45)$$

Mais, on a aussi que $p = p_0$ en $h = h_L$! Cela donne l'équation qui détermine Q :

$$0 = \frac{6 \mu L}{(h_0 - h_L)} \left(U \left(\frac{1}{h_L} - \frac{1}{h_0} \right) - Q \left(\frac{1}{h_L^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) \right), \quad (4.46)$$

et donc

$$Q = U \frac{\left(\frac{1}{h_L} - \frac{1}{h_0} \right)}{\left(\frac{1}{h_L^2} - \frac{1}{h_0^2} \right)} = U \frac{h_0 h_L}{(h_0 + h_L)}. \quad (4.47)$$

A noter que le débit ne dépend que de la vitesse U et des paramètres géométriques h_0 et h_L .

On peut maintenant tout déterminer. Pour le profil de pression, on obtient:

$$\begin{aligned} p(h) - p_0 &= \frac{6 \mu U L}{(h_0 - h_L)} \left(\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_0} \right) - \frac{h_0 h_L}{(h_0 + h_L)} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) \right) \\ &= \frac{6 \mu U L}{(h_0 - h_L)} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_0} \right) \left(1 - \frac{h_0 h_L}{(h_0 + h_L)} \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h_0} \right) \right) \\ &= \frac{6 \mu U L}{(h_0^2 - h_L^2)} \frac{(h_0 - h)(h - h_L)}{h^2}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

On peut aussi l'exprimer en fonction de x , bien que le résultat soit moins compact. Puisque $h_0 - h = (h_0 - h_L) x/L$ et que $h - h_L = (h_0 - h_L) (1 - x/L)$, on obtient:

$$\begin{aligned}
 p(x) - p_0 &= \frac{6 \mu U L}{(h_0^2 - h_L^2)} (h_0 - h_L)^2 \frac{(x/L) (1 - x/L)}{(h_0 - (h_0 - h_L) x/L)^2} \\
 &= 6 \mu U L \frac{(h_0 - h_L)}{(h_0 + h_L)} \frac{(x/L) (1 - x/L)}{(h_0 - (h_0 - h_L) x/L)^2} \\
 &= \frac{6 \mu U L}{h_0^2} \frac{(1 - h_L/h_0)}{(1 + h_L/h_0)} \frac{(x/L) (1 - x/L)}{(1 - (1 - h_L/h_0) x/L)^2}, \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

resultat qui est représenté à la Fig. 4.5 pour différentes valeurs du rapport de contraction h_L/h_0 .

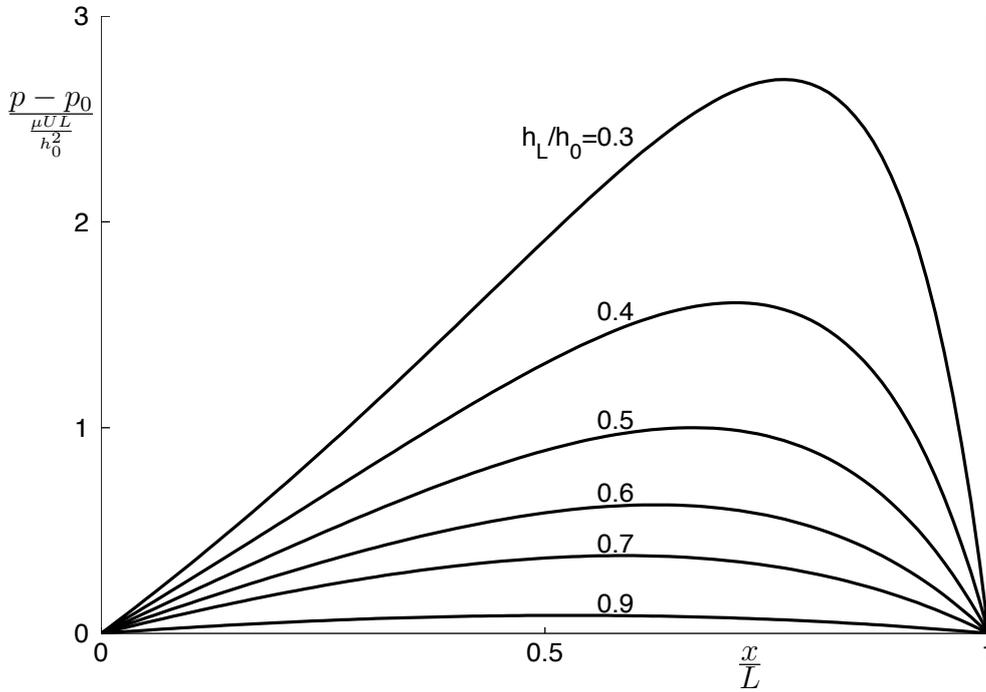


Figure 4.5: Profils de pression pour le cas du palier plat.

Le point avec maximum de pression (i.e., avec $\frac{dp}{dx} = 0$) se trouve aussi facilement: puisque $\frac{dh}{dx} \neq 0$, on l'obtient en cherchant la valeur de h pour laquelle $\frac{dp}{dh} = 0$. Cela correspond à

$$\frac{2}{h} = \frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_L}, \quad \Longleftrightarrow \quad h = \frac{h_0 h_L}{(h_0 + h_L)/2}. \quad (4.50)$$

La hauteur h de maximum de pression est donc la moyenne géométrique entre h_0 et h_L . Le point x correspondant est alors aussi obtenu:

$$\frac{x}{L} = \frac{h_0}{(h_0 + h_L)}. \quad (4.51)$$

La pression maximale est aussi obtenue, voir Fig. 4.6:

$$p_{\max} - p_0 = \frac{3 \mu U L}{2 h_0 h_L} \frac{(h_0 - h_L)}{(h_0 + h_L)} = \frac{3 \mu U L}{2 h_0^2} \frac{1}{h_L/h_0} \frac{(1 - h_L/h_0)}{(1 + h_L/h_0)}. \quad (4.52)$$

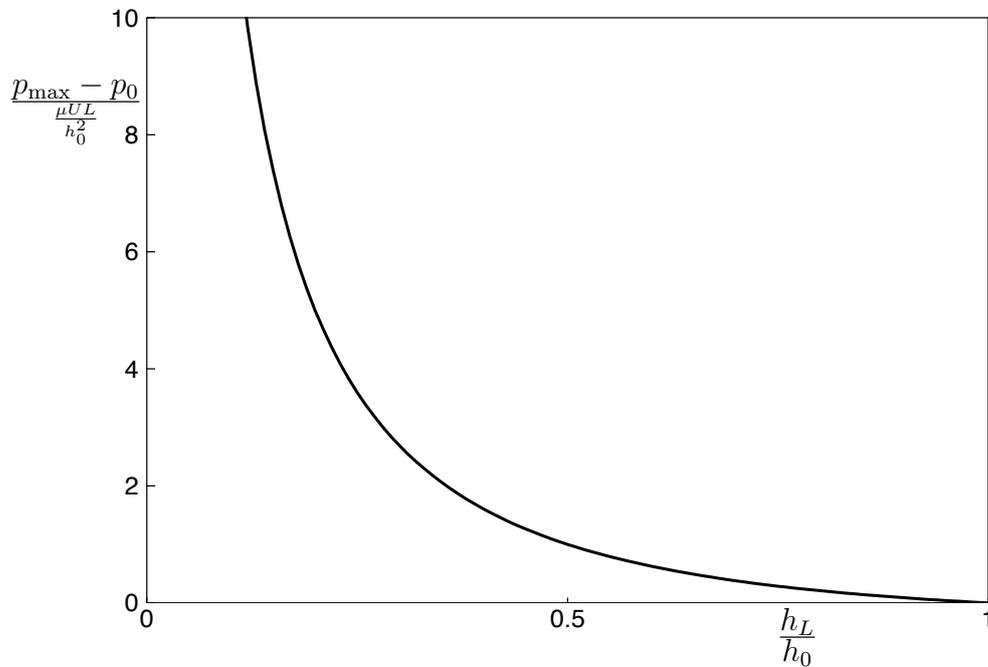


Figure 4.6: Maximum de pression pour le cas du palier plat.

Cette pression peut être très grande. A titre d'exemple, considérons un cas tel que $U = 10$ m/s, $L = 10$ cm, $h_0 = 0.1$ mm, $h_L = 0.05$ mm avec une huile de viscosité $\mu \approx 0.1$ N s/m² (cas de la SAE 50 à environ 50 °C). On obtient alors $p_{\max} - p_0 \approx 10^7$ Pa, soit plus directement 10 MPa! Un palier plat peut donc supporter des charges énormes.

En fait la charge utile (par unité de profondeur) s'obtient aussi facilement par intégration:

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^L (p(x) - p_0) dx = \int_{h_0}^{h_L} (p(h) - p_0) \frac{dx}{dh} dh = -\frac{L}{(h_0 - h_L)} \int_{h_0}^{h_L} (p(h) - p_0) dh \\
&= -\frac{L}{(h_0 - h_L)} \frac{6 \mu U L}{(h_0^2 - h_L^2)} \int_{h_0}^{h_L} \left[(h_0 + h_L) \frac{1}{h} - \frac{h_0 h_L}{h^2} - 1 \right] dh \\
&= -\frac{L}{(h_0 - h_L)} \frac{6 \mu U L}{(h_0^2 - h_L^2)} \left[(h_0 + h_L) \log \left(\frac{h_L}{h_0} \right) + h_0 h_L \left(\frac{1}{h_L} - \frac{1}{h_0} \right) + (h_0 - h_L) \right] \\
&= -\frac{6 \mu U L^2}{(h_0^2 - h_L^2)(h_0 - h_L)} \left[(h_0 + h_L) \log \left(\frac{h_L}{h_0} \right) + 2(h_0 - h_L) \right] \\
&= -6 \mu U L^2 \left[\frac{1}{(h_0 - h_L)^2} \log \left(\frac{h_L}{h_0} \right) + \frac{2}{(h_0^2 - h_L^2)} \right] \\
&= -\frac{6 \mu U L^2}{h_0^2} \left[\frac{1}{(1 - h_L/h_0)^2} \log \left(\frac{h_L}{h_0} \right) + \frac{2}{(1 - (h_L/h_0)^2)} \right]. \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Ce résultat est certainement très utile en ingénierie. Il a quelques conséquences remarquables. Tout d'abord, pour h_0 fixé, on constate que la charge utile augmente de plus en plus à mesure que le rapport de contraction h_L/h_0 diminue, voir Fig. 4.7. Il est clair qu'il y a une valeur minimale de h_L au dessous de laquelle on ne peut pas s'aventurer car il faut éviter que le film d'huile ne devienne trop mince par rapport à la hauteur des aspérités et/ou des défauts de surface des pièces. Posons la question inverse: pour h_L fixé, y-a-t-il un optimum du rapport h_0/h_L auquel correspond la charge utile maximale. On utilise ici

$$P = \frac{6 \mu U L^2}{h_L^2} \left[\frac{1}{(h_0/h_L - 1)^2} \log \left(\frac{h_0}{h_L} \right) - \frac{2}{((h_0/h_L)^2 - 1)} \right], \tag{4.54}$$

qui a effectivement un optimum (cependant assez plat) lorsque $h_0/h_L = 2.19$, voir Fig. 4.7, avec comme charge utile maximale:

$$P = 0.16024 \frac{\mu U L^2}{h_L^2}. \tag{4.55}$$

Un autre aspect du problème est la force de cisaillement totale, F , (force par unité de profondeur) que la surface mobile applique au fluide. On a, pour la contrainte,

$$\begin{aligned}
\tau &= \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{h}{2} \left(1 - 2\frac{y}{h} \right) - \mu \frac{U}{h} \\
&= \frac{6 \mu}{h^2} \left(Q - \frac{U h}{2} \right) \left(1 - 2\frac{y}{h} \right) - \mu \frac{U}{h} \\
&= \mu U \left[\frac{6}{h^2} \left(\frac{h_0 h_L}{(h_0 + h_L)} - \frac{h}{2} \right) \left(1 - 2\frac{y}{h} \right) - \frac{1}{h} \right]. \tag{4.56}
\end{aligned}$$

La partie mobile est en $y = 0$. On a alors:

$$\tau_w(x, 0) = \mu U \left[\frac{6}{h^2} \frac{h_0 h_L}{(h_0 + h_L)} - \frac{4}{h} \right]. \tag{4.57}$$

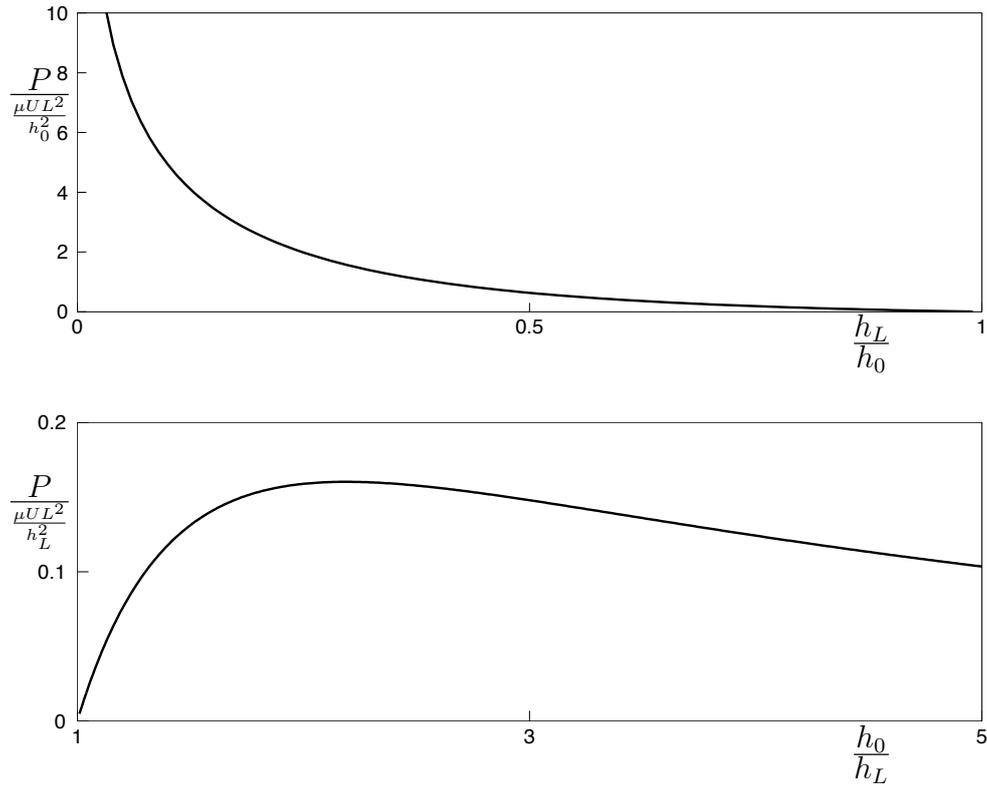


Figure 4.7: Charge utile pour le cas du palier plat. Cas avec h_0 fixé et h_L/h_0 variable. Cas avec h_L fixé et h_0/h_L variable.

La force de cisaillement totale (par unité de profondeur) exercée par la partie mobile sur le fluide est obtenue par intégration:

$$\begin{aligned}
 F &= - \int_0^L \tau_w(x, 0) dx = - \int_{h_0}^{h_L} \tau_w(x, 0) \frac{dx}{dh} dh = \frac{L}{(h_0 - h_L)} \int_{h_0}^{h_L} \tau_w(x, 0) dh \\
 &= \frac{L}{(h_0 - h_L)} \mu U \int_{h_0}^{h_L} \left[\frac{6}{h^2} \frac{h_0 h_L}{(h_0 + h_L)} - \frac{4}{h} \right] dh \\
 &= -\mu U L \left[\frac{6}{(h_0 + h_L)} + \frac{4}{(h_0 - h_L)} \log \left(\frac{h_L}{h_0} \right) \right] \\
 &= -\frac{\mu U L}{h_0} \left[\frac{6}{(1 + h_L/h_0)} + \frac{4}{(1 - h_L/h_0)} \log \left(\frac{h_L}{h_0} \right) \right]. \tag{4.58}
 \end{aligned}$$

Seule cette force effectue un travail, car seule la surface $y = 0$ se déplace. A noter que la pression n'effectue pas de travail car elle agit perpendiculairement à la surface mobile: comme le produit scalaire entre le vecteur vitesse et la contrainte de pression est nul, il n'y a pas de travail associé. La puissance nécessaire (par unité de profondeur) est donc finalement obtenue comme le produit de la force (par unité de profondeur) par la vitesse

de déplacement:

$$F U = -\frac{\mu U^2 L}{h_0} \left[\frac{6}{(1 + h_L/h_0)} + \frac{4}{(1 - h_L/h_0)} \log \left(\frac{h_L}{h_0} \right) \right]. \quad (4.59)$$

A noter aussi que la puissance consommée est dissipée en chaleur au sein du fluide. Il faudra donc s'assurer que l'huile est refroidie en dehors de la zone où elle sert de support à la charge et de lubrifiant.

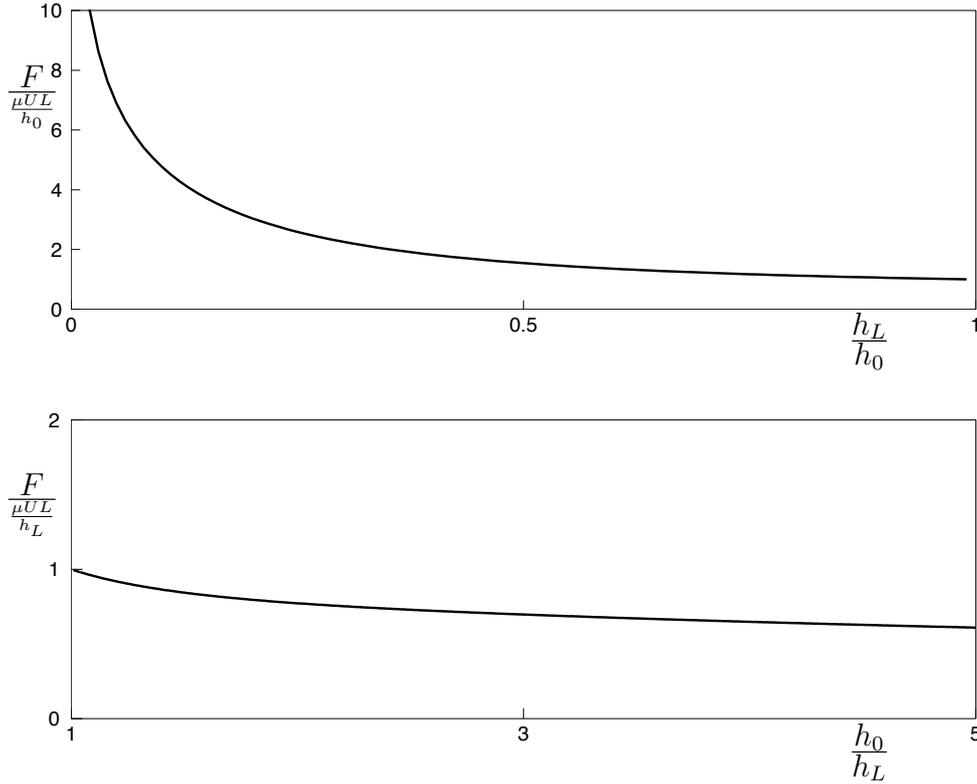


Figure 4.8: Force à appliquer pour le cas du palier plat. Cas avec h_0 fixé et h_L/h_0 variable. Cas avec h_L fixé et h_0/h_L variable.

A h_0 fixé, la force et donc la puissance augmentent de façon monotone lorsque le rapport de contraction, h_L/h_0 diminue, voir Fig. 4.8. A noter que la limite pour $h_L/h_0 \rightarrow 1$ (et donc pas de charge supportée par le palier) conduit bien à la valeur correspondant à un écoulement de Couette pur (i.e., sans gradient de pression):

$$\lim_{h_L/h_0 \rightarrow 1} F = \frac{\mu U^2 L}{h_0}. \quad (4.60)$$

Qu'en est-il à h_L fixé? On utilise alors:

$$F = -\frac{\mu U L}{h_L} \left[\frac{6}{(h_0/h_L + 1)} - \frac{4}{(h_0/h_L - 1)} \log \left(\frac{h_0}{h_L} \right) \right]. \quad (4.61)$$

La limite lorsque $h_0/h_L \rightarrow 1$ est, bien sûr, la même que ci-dessus. Il n'y a pas d'optimum du rapport h_0/h_L : la force et donc la puissance décroissent de façon monotone lorsque le rapport h_0/h_L augmente, voir Fig. 4.8.

Chapitre 5

Convection naturelle

L'étude de la convection le long d'une plaque chaude suspendue verticalement dans l'air retient ici notre intérêt, elle met en jeu la théorie de couche limite pour un écoulement laminaire permanent. L'élévation de l'air le long des parois d'un radiateur est un exemple typique de convection naturelle sous l'effet de la poussée d'Archimède, qui s'oppose à la gravité.

Tout d'abord, nous allons supposer que la pression est globalement hydrostatique en tout point de la plaque

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = -\rho_0 g \quad (5.1)$$

ou encore

$$p(x, y) = -\rho_0 g y \quad (5.2)$$

Il s'agit d'une hypothèse équivalente à l'approximation de Boussinesq (1903), qui revient à ne considérer les variations de densité du fluide que lorsqu'elles multiplient la gravité, soit dans le terme de la poussée d'Archimède, dans le cas présent. En effet, comme l'a parfaitement exprimé Boussinesq, la variation de masse volumique est précisément la cause du phénomène de convection observé. Par la suite, nous verrons qu'il n'est pas nécessaire d'introduire une telle hypothèse et que la pression hydrostatique dans la couche mince le long de la plaque chaude se déduit directement de l'hypothèse que la convection se fait sur une couche mince le long de la plaque.

Suite à un développement en série de Taylor de $\rho(p, T)\rho_0^{-1}$, la conservation de la quantité de mouvement le long de la plaque verticale est donnée par

$$\rho_0(1 - \underbrace{\beta(T - T_0)}_{\ll 1}) \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial y}}_{\rho_0 g} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \rho_0(1 - \beta(T - T_0))g$$

$$\rho_0 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho_0 \beta(T - T_0)g$$

où $\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$ est le coefficient de dilatation thermique du fluide.

Le champ de pression est donc fixé par un champ de pression hydrostatique.

5.1 Une étape préliminaire : la convection forcée...

Une propriété intéressante de la convection forcée est qu'il est possible de découpler le problème de l'écoulement, du problème thermique. C'est pourquoi nous l'abordons avant de considérer la convection naturelle.

Alors qu'à une grande distance de la paroi les effets visqueux sont supposés négligeables (écoulement irrotationnel), à proximité de celle-ci, il n'en est rien. Le mouvement relatif entre la plaque et le fluide engendre l'existence d'un tourbillon. Les effets visqueux peuvent même être dominants par rapport aux termes non linéaires d'inertie dans un voisinage proche de la paroi. On définit ainsi la frontière de la couche limite de vitesse comme le lieu géométrique pour lequel les ordres de grandeur des effets d'inertie et des effets visqueux sont identiques. Négliger les effets visqueux près de la plaque est incompatible avec le modèle du fluide visqueux qui stipule que le fluide colle à la paroi.

L'épaisseur caractéristique de la couche limite, d'un ordre de grandeur supposé constant dans une zone suffisamment éloignée du bord d'attaque ($y = 0$) et des turbulences, est largement inférieure à la longueur verticale caractéristique. Le modèle de la couche limite est ainsi basé sur l'hypothèse $\delta \ll Y$ (Fig. 5.1).

En réalité, l'épaisseur de la couche limite augmente de manière monotone (et non linéaire) dans la direction verticale, d'où l'intérêt de l'analyse dans la zone locale. Le frottement visqueux au niveau de la paroi contribue, en effet, au ralentissement de l'écoulement du fluide. Il est de plus en plus important au fur et à mesure que la portion de la paroi longée augmente, la couche limite est ainsi de moins en moins fine.

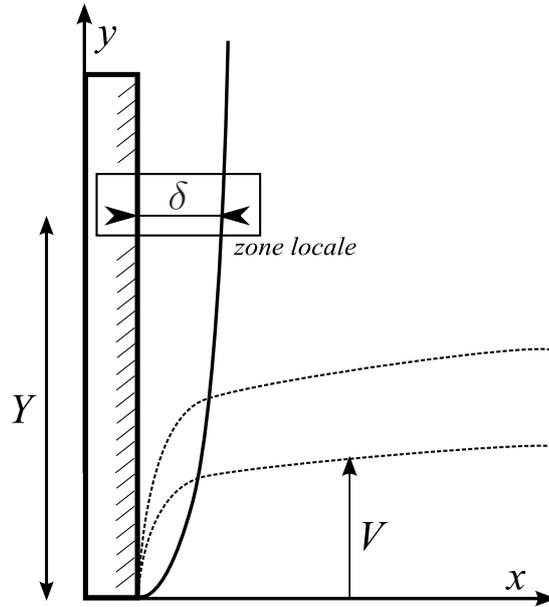


Figure 5.1: Couche limite et écoulement externe incompressible et irrotationnel.

Par égalisation des ordres de grandeur des termes d'inertie et visqueux, on montre que l'hypothèse de la couche limite est vérifiée si le nombre de Reynolds Re_Y , basé sur la longueur verticale caractéristique, est grand. On impose en effet, en termes d'ordres de grandeur

$$\rho \frac{V^2}{Y} = \mu \frac{V}{\delta^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\delta^2}{Y^2} = \frac{\mu}{\rho V Y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\delta}{Y} = Re_Y^{-1/2} \quad (5.3)$$

Ce qui signifie que, plus on avance dans la direction verticale, plus le rapport entre l'épaisseur de la couche limite et la longueur de la plaque diminue. Notons, au passage, que Re_Y doit être suffisamment grand pour que δ/Y soit petit, mais pas trop pour que l'écoulement ne devienne pas turbulent. Nous trouvons ainsi une valeur pour l'épaisseur de la couche limite de vitesse. Cette valeur n'est qu'une approximation (assez bonne) basée sur les ordres de grandeur. Notons aussi que dans la couche limite, l'un des deux termes de forces visqueuses de l'équation de conservation de la quantité de mouvement est négligeable devant l'autre: $\mathcal{O}(\mu V/\delta^2) \gg \mathcal{O}(\mu V/Y^2)$.

Nous pouvons alors, avec l'hypothèse de la couche limite, valider l'approximation de Boussinesq

$$p(x, y) - p_0 = \underbrace{p(\delta, y) - p_0}_{\mathcal{O}(\rho V^2)} + \underbrace{(x - \delta) \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=\delta}}_{\mathcal{O}\left(\rho \frac{V^2 \delta^2}{Y^2}\right) \ll \mathcal{O}(p(\delta, y))} \quad (5.4)$$

Suite aux simplifications de l'équation verticale de conservation de la quantité de mouvement, on observe que la variation de pression en y doit être d'un ordre de grandeur identique aux termes d'inertie (pour ne pas être négligée). Aussi, la variation de pression horizontale dans la couche limite est négligeable devant la pression hors de la couche limite.

Les équations de Prandtl (1904) sont applicables au sein de la couche limite, avec, en convection forcée, un gradient de pression vertical nul si l'écoulement extérieur est uniforme. A l'extérieur de la couche limite en revanche, les équations d'Euler (terme visqueux négligé) font légion.

Les grandeurs de référence de ces deux modèles, x/δ pour Prandtl et x/Y pour Euler sont, conformément à la théorie de la couche limite, forts différentes. L'introduction d'une astuce mathématique est nécessaire au raccord des deux modèles, et donc à l'expression mathématique de l'écoulement au niveau de la couche limite. La variable ζ est introduite afin que

$$\frac{\delta}{\zeta} = \frac{\zeta}{Y} = \frac{1}{Re^\alpha} \quad \text{avec } 0 < \alpha < 0.5 \quad , \text{ typiquement } 0.25 \quad (5.5)$$

Cette variable est donc d'un ordre de grandeur intermédiaire entre les distances verticale et horizontale et permet ainsi l'obtention de conditions limites identiques pour les deux modèles au lieu de raccord de ceux-ci

$$\lim_{x/\delta \rightarrow \infty} v\left(\frac{x}{\delta}, y\right) = \lim_{x/Y \rightarrow 0} v_e\left(\frac{x}{Y}, y\right) = v_e(0, y)$$

$$\lim_{x/\delta \rightarrow \infty} p\left(\frac{x}{\delta}, y\right) = \lim_{x/Y \rightarrow 0} p_e\left(\frac{x}{Y}, y\right) = p_e(0, y)$$

Cela permet de résoudre le problème de l'écoulement du fluide. La démarche est similaire pour le problème thermique; les effets conductifs sont négligeables devant les effets convectifs loin de la paroi alors qu'ils faut en tenir compte dans son voisinage immédiat. On définit la couche limite thermique δ_T comme le lieu géométrique où la conduction (diffusion de l'énergie) et la convection (transport de l'énergie) possèdent un ordre de grandeur identique. Remarquons que le terme de dissipations visqueuses ne joue aucun rôle dans la présente analyse dimensionnelle.

Par un raisonnement semblable à celui effectué antérieurement, mais sur la base de l'équation de la conservation de l'énergie cette fois, on trouve, après égalisation des ordres de grandeur des termes de transport et de diffusion de l'énergie,

$$\frac{\delta_T}{Y} = (Pr Re_Y)^{-1/2} \quad \text{et donc} \quad \frac{\delta_T}{\delta} = Pr^{-1/2} \quad (5.6)$$

On comprend alors aisément la raison pour laquelle l'huile est privilégiée comme lubrifiant pour de nombreuses applications. Le nombre de Prandtl de l'huile étant relativement

élevé ($\gg 1$), l'épaisseur de la couche limite thermique est faible, permettant uniquement à une petite fraction de l'huile, dont la viscosité diminue avec la température, de chauffer.

5.2 Nombre de Grashof

Revenons au problème de convection forcée. Nous n'imposons cette fois plus le déplacement du fluide, mais bien une force de volume, la gravité. Cet apport naturel se traduit, conformément à l'hypothèse (vérifiée) de Boussinesq, en un gradient de pression $-dp/dy = \beta g(T - T_0)$. On ne dispose dès lors plus de la vitesse caractéristique V , auparavant imposée.

Deux approches différentes permettent d'obtenir l'ordre de grandeur de cette vitesse verticale. La première consiste à dire que la flottabilité (poussée d'Archimède) est compensée par la friction. On se place dans la couche limite (δ petit), où le terme des frottements visqueux est non négligeable contrairement au terme d'inertie, conséquence de l'approche suivie.

$$\underbrace{u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}}_{\ll V/\delta^2} = \beta g(T - T_0) + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (5.7)$$

$$V = \frac{\beta g \Delta T \delta_T^2}{\nu} \quad (5.8)$$

L'épaisseur de la couche limite thermique est obtenue par égalisation des termes de conduction et de convection présents dans l'équation de l'énergie :

$$\frac{\delta_T}{Y} = \sqrt{\frac{\alpha}{VY}} = \left(\frac{\nu \alpha}{\beta g \Delta T Y \delta_T^2} \right)^{1/2} = (Gr)^{-1/4} (Pr)^{-1/4} \quad (5.9)$$

$$\frac{\delta}{Y} = (Gr)^{-1/4} (Pr)^{1/4} \quad (5.10)$$

où Gr représente le nombre de Grashof (1822-1893), qui caractérise une convection libre, ce paramètre est identique pour deux convections libres dynamiquement identiques. Ce nombre est défini comme le produit des forces d'inertie par la force d'Archimède, divisé par le carré des forces visqueuses

$$Gr = \frac{\beta \Delta T g L^3}{\nu^2} \quad (5.11)$$

Dans une seconde approche, on considère que la flottabilité est compensée par l'inertie du fluide. Cela revient à dire que l'action de la flottabilité s'exerce dans une zone où

le terme visqueux est négligeable (hors couche limite, δ théoriquement, pour l'analyse dimensionnelle, très grand). On obtient

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \beta g(T - T_0) + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\ll V^2/Y} \quad (5.12)$$

$$V = \sqrt{\beta g \Delta T Y} \quad (5.13)$$

Définie ainsi, la vitesse caractéristique n'est pas du même ordre de grandeur que celui obtenu auparavant. L'épaisseur de la couche limite thermique est, elle aussi, différente

$$\frac{\delta_T}{Y} = \sqrt{\frac{\alpha}{VY}} = \left(\frac{\alpha^2}{\beta g \Delta T Y^3} \right)^{1/4} = (Gr)^{-1/4} (Pr)^{-1/2} \quad (5.14)$$

$$\frac{\delta}{Y} = (Gr)^{-1/4} \quad (5.15)$$

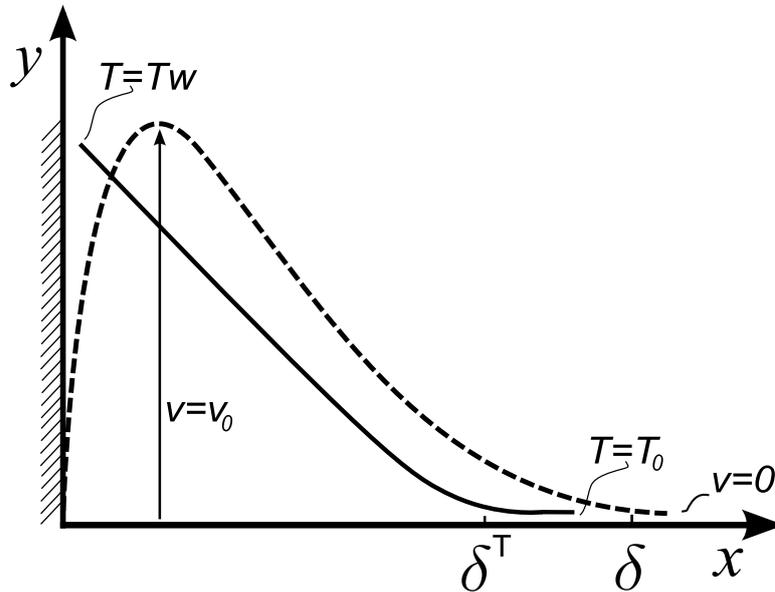


Figure 5.2: Couches limites de vitesse et thermique en convection forcée. (a) la flottabilité est compensée par la friction ($Pr \geq 1$): la couche de vitesse est plus épaisse (b) la flottabilité est compensée par l'inertie ($Pr < 1$): couche thermique plus épaisse..

Remarquons que dans ce deuxième cas, nous avons l'égalité $\sqrt{Gr_Y} = Re_Y$. De plus, dans les deux cas, le rapport des deux couches limites est donné par $\delta_T/\delta = Pr^{-1/2}$. Ce qui signifie que la couche limite de vitesse est plus épaisse que la couche limite thermique lorsque $Pr \geq 1$, et inversement si le $Pr < 1$ (Fig. 5.2).

5.3 Une solution approchée pour le problème de la convection naturelle

En raison du couplage des problèmes thermique et de l'écoulement, nous allons tenter de construire une solution approchée pour la couche limite. Il n'est pas tout à fait exact de travailler avec des profils δ_T et δ semblables, mais cela simplifie grandement la solution et c'est acceptable si on suppose que le nombre de Prandtl n'est pas trop différent de l'unité.

On recherche une solution telle que les conditions sommaires suivantes soient respectées

$$v(0, y) = 0 \quad v(\delta, y) = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x}(\delta, y) = 0 \quad \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0, y) = -\rho\beta g(T_w - T_0) \quad (5.16)$$

$$T(0, y) = T_w \quad T(\delta, y) = T_0 \quad \frac{\partial T}{\partial x}(\delta, y) = 0 \quad (5.17)$$

Sur base d'une intuition purement phénoménologique, nous allons -par exemple- proposer les profils suivants.

$$v(x, y) = v_0(y) \frac{x}{\delta(y)} \left(1 - \frac{x}{\delta(y)}\right)^2 \quad (5.18)$$

$$\frac{T(x, y) - T_0}{T_w - T_0} = \left(1 - \frac{x}{\delta(y)}\right)^2 \quad (5.19)$$

Ces deux équations traduisent de manière simple la décroissance monotone et non linéaire du champ de température et la décroissance, elle aussi monotone, précédée par une forte croissance, à proximité de la paroi, du champs de vitesse (Fig 2.33).

Ces expressions sont toutes deux fonctions de $v_0(y)$, la vitesse maximale et de δ , l'épaisseur de la couche limite (thermique ou de vitesse). A l'aide des formes présumées des champs de vitesse et de température et suite à l'intégration des équations de conservation, nous allons obtenir des équations que doivent satisfaire v_0 et δ .

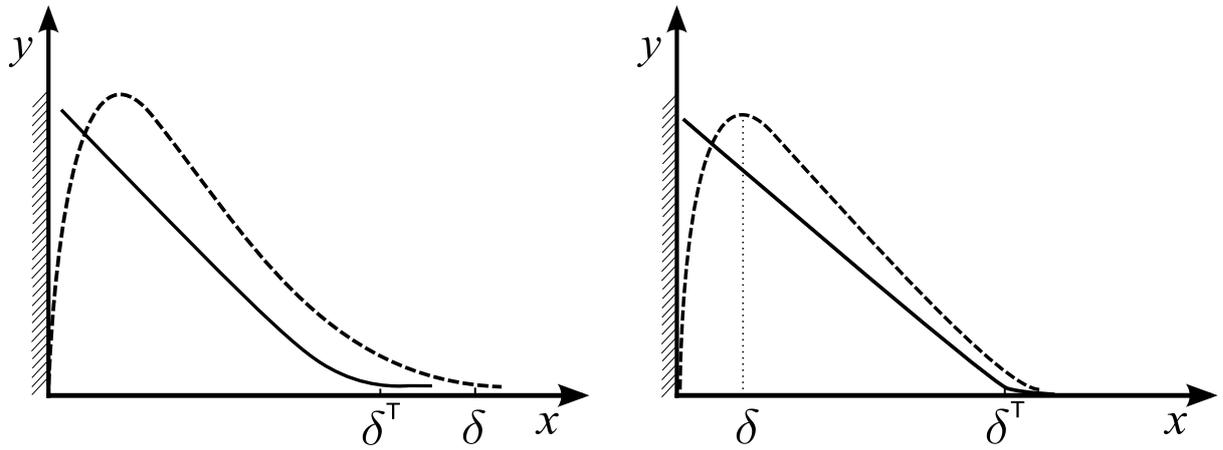


Figure 5.3: Couches limites thermique et de vitesse pour la construction de la solution approchée.

$$\int_0^\delta u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} dx = \beta g \int_0^\delta (T(x, y) - T_0) dx + \nu \int_0^\delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \quad (2.294)$$

L'intégration par partie du terme de gauche donne :

$$[uv]_0^\delta - \int_0^\delta v \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^\delta v \frac{\partial v}{\partial y} dx = \beta g \int_0^\delta (T(x, y) - T_0) dx + \nu \int_0^\delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \quad (2.295)$$

où on a tiré profit de l'incompressibilité : $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$.

On utilise ensuite la condition de raccord (2.290c) pour le terme de droite et on obtient :

$$\frac{d}{dy} \int_0^\delta v^2(x, y) dx = \beta g \int_0^\delta (T(x, y) - T_0) dx - \nu \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (2.296)$$

Identiquement, pour l'équation de conservation de l'énergie avec, en plus, $u(0, y) =$

$u(y, \delta) = 0$, nécessaire dans ce cas

$$\int_0^\delta u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} dx = \alpha \int_0^\delta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \quad (2.297)$$

$$[uT]_0^\delta - \int_0^\delta T \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^\delta v \frac{\partial T}{\partial y} dx = \alpha \int_0^\delta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \quad (2.298)$$

$$\frac{d}{dy} \int_0^\delta v(x, y) T(x, y) dx = -\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (2.299)$$

Si l'on substitue les expressions 2.292 et 2.293 de $v(x, y)$ et $T(x, y)$, on obtient deux équations différentielles ordinaires du premier ordre.

$$\begin{cases} \frac{1}{105} \frac{d}{dy} \left(v_0^2(y) \delta(y) \right) = \frac{\beta g \Delta T}{3} \frac{\delta(y)}{\delta(y)} + \nu \frac{v_0(y)}{\delta(y)} \\ \frac{1}{30} \frac{d}{dy} \left(v_0(y) \delta(y) \right) = \frac{2\alpha}{\delta(y)} \end{cases} \quad (2.300)$$

Equations satisfaites pour des champs $v_0(y)$ et $\delta(y)$ de la forme

$$\begin{aligned} v_0(y) &= V y^m \\ \delta(y) &= D y^n \end{aligned} \quad (2.301)$$

avec $m = 1/2$ et $n = 1/4$:

$$\begin{cases} \frac{1}{105} V^2 D (2m + n) y^{2m+n-1} = \frac{\beta g \Delta T D}{3} y^n + \nu \frac{V}{D} y^{m-n} \\ \frac{1}{30} V D (m + n) y^{m+n-1} = \frac{2\alpha}{D} y^{-n} \end{cases} \quad (2.302)$$

Les valeurs de V et D peuvent alors être retrouvées, pour obtenir l'expression finale de l'épaisseur de la couche limite

$$\frac{\delta_T(y)}{y} = 3,936 (Pr)^{-1/2} (Gr(y))^{-1/4} \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{1/4} \quad (2.303)$$

Notons, au passage, que cette solution possède un ordre de grandeur tout à fait raisonnable vis-à-vis de l'estimation que nous en avons faite précédemment (2.284). On vérifie en effet que

$$\mathcal{O}\left(3,936(Pr)^{-1/2}\left(\frac{20}{21} + Pr\right)^{1/4}\right) = \mathcal{O}\left(Pr^{1/4}\right) \text{ pour } Pr \geq 1 \quad (2.304)$$

Chapitre 6

Couches limites laminaires

6.1 Introduction

Bien que le modèle du fluide parfait (c-à-d non visqueux) en écoulement incompressible et irrotationnel produise des résultats utiles et fondamentaux, il a ses limites car il ne permet de calculer que des écoulements avec glissement du fluide le long de la paroi. Les fluides réels sont visqueux: ils ne glissent pas le long des parois; ils y adhèrent. La condition de non-glissement à la paroi est donc une caractéristique fondamentale des écoulements de fluides réels. Le fait que le fluide adhère à la paroi entraîne une production de tourbillon à celle-ci. Le tourbillon est produit à la paroi, diffuse de la paroi vers l'écoulement, et est transporté par ce même écoulement le long de la paroi. Il s'ensuit que l'écoulement au voisinage de la paroi n'est plus irrotationnel: il contient du tourbillon. La zone proche de la paroi qui contient ce tourbillon est appelée "couche limite" (de paroi).

La compétition entre les phénomènes de diffusion et de convection du tourbillon détermine l'épaisseur de la couche limite. Celle-ci est généralement mince, et d'autant plus mince que le nombre de Reynolds caractéristique global de l'écoulement est grand.

Considérons, par exemple, l'écoulement laminaire d'un fluide autour d'un profil de type aérodynamique et à faible angle d'attaque, voir Fig. 6.1. La vitesse caractéristique globale est la vitesse amont, U_∞ . La dimension caractéristique globale est la corde du profil, c . Le nombre de Reynolds caractéristique global est donc $Re = U_\infty c/\nu$. Le temps caractéristique global de convection (inertie, transport) est $T \sim c/U_\infty$. Au sein de la couche limite, les effets de la viscosité sont du même ordre de grandeur que les effets d'inertie. C'est en fait là une façon de définir la couche limite: la couche limite est la région proche de la paroi où les effets visqueux sont aussi importants que les effets d'inertie. On y reviendra dans la section suivante, lors du développement rigoureux des équations qui régissent la couche limite. Pour l'exemple du profil aérodynamique considéré ici, on a donc que le temps T est aussi le temps caractéristique global de diffusion du tourbillon au sein de la couche limite. Durant T , le processus de diffusion va couvrir une épaisseur

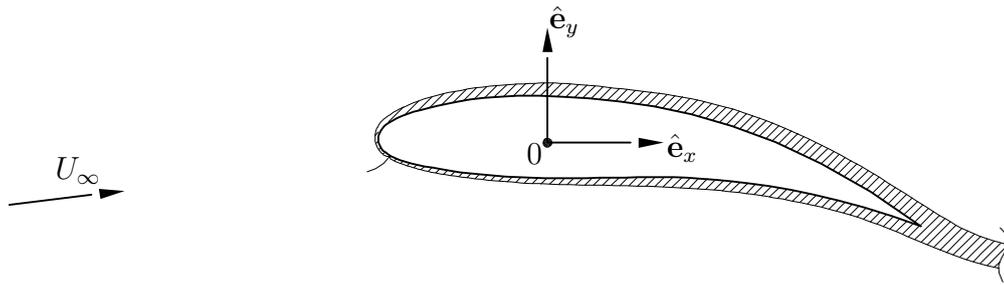


Figure 6.1: Profil aérodynamique en écoulement réel, avec couche limite le long de la paroi.

globale $\delta(c) = \mathcal{O}(\sqrt{\nu T})$. On en conclut que

$$T \sim \frac{\delta^2(c)}{\nu} \sim \frac{c}{U_\infty}, \quad (6.1)$$

ce qui conduit aux égalités :

$$\frac{\delta(c)}{c} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{U_\infty c/\nu}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right). \quad (6.2)$$

Comparée à la corde du profil, la couche limite laminaire est effectivement d'autant plus petite que le nombre de Reynolds global est grand. De plus, nous avons déjà obtenu la loi de variation. Nous verrons dans la suite que l'approche rigoureuse du problème confirme bien ce résultat préliminaire.

Que se passe-t-il en aval du profil? Le tourbillon de couche limite quitte la proximité de la paroi au bord de fuite et devient tourbillon de sillage. C'est le cas idéal de bon fonctionnement aérodynamique du profil. Si, par contre, on augmente trop l'angle d'attaque, la couche limite à l'extrados du profil quitte la paroi avant d'atteindre le bord de fuite. On a séparation de la couche limite avant le bord de fuite: c'est le cas de mauvais fonctionnement aérodynamique du profil. On parle alors de "décrochage" du profil. A noter que la séparation d'une couche limite est, en général, un phénomène instationnaire: le point de séparation ne demeure pas au même endroit, le tourbillon de couche limite quitte la paroi de façon non continue et de gros tourbillons de sillage sont produits de façon intermittente.

Ce chapitre a pour objet d'exposer la théorie de la couche limite pour des écoulements incompressibles et laminares. Le cas simple de l'écoulement le long d'une plaque plane et avec vitesse extérieure à la couche limite, $u_e(x)$, sera étudié en détail. La solution exacte de Blasius sera obtenue pour le cas u_e constant. Le transfert de chaleur en couche limite sera aussi étudié, ainsi que l'effet du nombre de Prandtl du fluide.

Les méthodes de solution pour les écoulements laminaires avec $u_e = u_e(x)$ sont étudiées en détail dans le cours *Aérodynamique*, de même que le cas des couches limites en écoulements turbulents.

6.2 Etablissement des équations de la couche limite laminaire

6.2.1 Approche physique

On considère l'écoulement laminaire bidimensionnel et stationnaire le long d'une plaque plane. La plaque commence en $x = 0$ et s'étend vers les $x > 0$. La couche limite commence donc aussi en $x = 0$.

En l'absence de couche limite, on a une vitesse de l'écoulement qui est connue (par exemple, calculée en utilisant l'approximation en fluide parfait.) On suppose que la couche limite est assez mince pour que la vitesse en dehors de la couche limite, $u_e(x)$, puisse effectivement être approximée par la vitesse obtenue sans couche limite. Au sein de la couche limite, la vitesse passe d'une valeur nulle à la paroi (condition de non-glissement) à la valeur $u_e(x)$.

Au vu des constatations précédentes, il est logique de supposer que l'épaisseur locale de la couche limite, $\delta(x)$, à la distance x par rapport au début de la plaque est faible par rapport à cette distance: $\delta(x) \ll x$. Au sein de la couche limite, la vitesse $u(x, y)$ est de l'ordre de $u_e(x)$: $u = \mathcal{O}(u_e)$. La dérivée $\partial u / \partial y$ est donc $\mathcal{O}(u_e / \delta)$. Il est clair que la vitesse varie beaucoup moins vite en x qu'en y . La dérivée $\partial u / \partial x$ est $\mathcal{O}(u_e / x)$. On a donc:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = \mathcal{O} \left(\frac{u_e}{x} \right) &\ll \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| = \mathcal{O} \left(\frac{u_e}{\delta} \right) , \\ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| = \mathcal{O} \left(\frac{u_e}{x^2} \right) &\ll \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| = \mathcal{O} \left(\frac{u_e}{\delta^2} \right) . \end{aligned} \quad (6.3)$$

Notons par V l'ordre de grandeur de $v(x, y)$ dans la couche limite: $v = \mathcal{O}(V)$. On peut donc écrire:

$$\left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| = \mathcal{O} \left(\frac{V}{\delta} \right) . \quad (6.4)$$

D'autre part, l'équation de continuité, $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0$, implique aussi que l'on ait:

$$\left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| \sim \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = \mathcal{O} \left(\frac{u_e}{x} \right) . \quad (6.5)$$

On a donc:

$$\left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| = \mathcal{O} \left(\frac{V}{\delta} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{u_e}{x} \right) , \quad (6.6)$$

ce qui, en fait, détermine l'ordre de grandeur de v pour la couche limite:

$$v = \mathcal{O}(V) = \mathcal{O}\left(\frac{\delta}{x} u_e\right). \quad (6.7)$$

La vitesse v est donc effectivement beaucoup plus petite que la vitesse u .

L'équation de quantité de mouvement en x est:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (6.8)$$

Considérons d'abord les termes d'inertie. On obtient, pour les ordres de grandeur:

$$\left| u \frac{\partial u}{\partial x} \right| = \mathcal{O}\left(\frac{u_e^2}{x}\right), \quad \left| v \frac{\partial u}{\partial y} \right| = \mathcal{O}\left(\frac{\delta}{x} u_e \cdot \frac{u_e}{\delta}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{u_e^2}{x}\right). \quad (6.9)$$

Les deux termes d'inertie sont donc du même ordre de grandeur: on ne peut pas négliger l'un par rapport à l'autre. Pour les termes de diffusion visqueuse, l'équation (6.3) implique que la diffusion en x est négligeable par rapport à la diffusion en y . Cette dernière est donc la seule à considérer. Son ordre de grandeur est:

$$\left| \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| = \mathcal{O}\left(\nu \frac{u_e}{\delta^2}\right). \quad (6.10)$$

La couche limite étant la zone de l'écoulement proche de la paroi où les effets de viscosité sont aussi importants que les effets d'inertie (c'est en fait là une façon de la définir), il s'ensuit nécessairement que l'on ait:

$$\left| u \frac{\partial u}{\partial x} \right| \sim \left| v \frac{\partial u}{\partial y} \right| \sim \left| \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| = \mathcal{O}\left(\frac{u_e^2}{x}\right) = \mathcal{O}\left(\nu \frac{u_e}{\delta^2}\right), \quad (6.11)$$

et donc

$$\frac{\delta(x)}{x} = \mathcal{O}\left(\left(\frac{u_e x}{\nu}\right)^{-1/2}\right). \quad (6.12)$$

On a aussi obtenu, de façon plus formelle, la même expression que lors de l'introduction.

Qu'en est-il du terme $|\partial p/\partial x|/\rho$? Comme il constitue un des termes de l'équation de quantité de mouvement en x , il est nécessairement soit négligeable soit aussi $\mathcal{O}(u_e^2/x)$. En dehors de la couche limite, l'écoulement est irrotationnel: l'équation de Bernoulli y est donc satisfaite. La pression en dehors de la couche limite, $p = p_e(x)$, est donc régie par la relation:

$$\frac{p_e(x)}{\rho} + \frac{u_e^2(x)}{2} = B_0, \quad (6.13)$$

et donc, de façon équivalente, par:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp_e}{dx}(x) = u_e(x) \frac{du_e}{dx}(x). \quad (6.14)$$

Considérons maintenant l'équation de quantité de mouvement en y :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (6.15)$$

Les termes d'inertie sont de nouveau du même ordre de grandeur:

$$\left| u \frac{\partial v}{\partial x} \right| \sim \left| v \frac{\partial v}{\partial y} \right| \sim \mathcal{O} \left(u_e \frac{V}{x} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{V^2}{\delta} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{\delta}{x} \frac{u_e^2}{x} \right), \quad (6.16)$$

La diffusion en x est négligeable par rapport à la diffusion en y . Cette dernière est de l'ordre de

$$\left| \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right| = \mathcal{O} \left(\nu \frac{V}{\delta^2} \right) = \mathcal{O} \left(\nu \frac{\delta}{x} \frac{u_e}{\delta^2} \right) \quad (6.17)$$

Par Eq. (6.12), on en déduit que les termes d'inertie et de diffusion en y sont de nouveau du même ordre de grandeur: ils sont $\mathcal{O}((\delta/x)(u_e^2/x))$. Le terme $|\partial p/\partial y|/\rho$ est donc aussi, au plus, $\mathcal{O}((\delta/x)(u_e^2/x))$. Par série de Taylor, la pression au sein de la couche limite est donc, au plus, de l'ordre de

$$p(x, y) = p_e(x) + (y - \delta) \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=\delta} + \dots, \quad (6.18)$$

ce qui donne, comme ordre de grandeur:

$$\begin{aligned} \frac{p(x, y)}{\rho} &= \frac{p_e(x)}{\rho} + \mathcal{O} \left(\delta \frac{\delta}{x} \frac{u_e^2}{x} \right) = \frac{p_e(x)}{\rho} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\delta}{x} \right)^2 u_e^2 \right) \\ &= B_0 - \left(1 - \mathcal{O} \left(\left(\frac{\delta}{x} \right)^2 \right) \right) \frac{u_e^2(x)}{2}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Le terme de correction étant en $(\delta/x)^2$, on peut donc certainement le négliger et considérer que la pression ne varie pas au travers de la couche limite. On prend donc $p(x, y) = p_e(x)$, ce qui donne:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_e}{dx}(x) = u_e(x) \frac{du_e}{dx}(x). \quad (6.20)$$

Les équations de la couche limite (équations de Prandtl) sont donc finalement obtenues:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.21)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (6.22)$$

A noter, en passant, que le cas particulier u_e constant correspond à $dp_e/dx = 0$.

6.2.2 Approche mathématique

On considère ici une approche plus formelle et mathématique pour l'établissement des équations de la couche limite.

La couche limite se développe le long d'une plaque qui commence en $x = 0$. Pour simplifier, on considère que la plaque est plane, mais cette hypothèse n'est en fait pas limitative. On considère les équations de la couche limite au voisinage du point X fixé, et avec vitesse extérieure U_e fixée ($U_e = u_e(X)$).

En définitive, il y a alors deux "grandeurs caractéristiques" (X et U_e), et toutes deux constantes dans l'analyse. Le nombre de Reynolds est $Re = U_e X/\nu$. L'écoulement est fonction de X , U_e et ν seulement. On cherche à voir comment l'écoulement se comporte pour Re grand, en supposant cependant qu'il reste laminaire. Pour cela, on adimensionnalise les équations avec X et U_e , et on fait $Re \rightarrow \infty$.

On considère donc une famille d'écoulements fictifs, paramétrés par Re , qu'on fait tendre vers l'infini (similitude dynamique). L'écoulement asymptotique obtenu par le passage à la limite est une bonne approximation de l'écoulement réel, correspondant à une valeur précise de Re . La comparaison entre les divers écoulements (et donc le passage à la limite) n'est possible qu'en adimensionnalisant les équations.

Une première adimensionnalisation, élémentaire, fait apparaître les équations d'Euler pour $Re \rightarrow \infty$. C'est l'écoulement dit "externe", correspondant au modèle du fluide parfait. Cet écoulement ne respecte pas les conditions sur la plaque.

Une seconde adimensionnalisation est alors introduite pour faire apparaître la couche limite et les équations de Prandtl.

Définissons d'abord $\delta = X Re^{-1/2}$. Il est clair que la grandeur δ n'est pas exactement l'épaisseur de la couche limite. C'est un ordre de grandeur de cette épaisseur. (En fait, l'épaisseur de la couche limite est un concept peu précis et encore à définir: nous y reviendrons en temps opportun).

Considérons donc la mise sous forme adimensionnelle des équations de la couche limite en utilisant les variables "prime" suivantes adimensionnelles:

$$x = X x' , \quad y = \delta y' , \quad u = U_e u' , \quad v = V v' , \quad \text{et} \quad p = \rho U_e^2 p' , \quad (6.23)$$

où V est encore à déterminer.

L'équation de continuité devient:

$$\frac{U_e}{X} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{V}{\delta} \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 , \quad (6.24)$$

et donc:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = -\frac{V}{U_e} \frac{X}{\delta} \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{V}{U_e} Re^{1/2} \frac{\partial v'}{\partial y'} . \quad (6.25)$$

On considère la similitude dynamique avec $Re \rightarrow \infty$. Pour que l'équation ne dégénère pas lorsque $Re \rightarrow \infty$ (principe de moindre dégénérescence), on doit donc prendre:

$$V = U_e Re^{-1/2} . \quad (6.26)$$

On obtient alors:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 . \quad (6.27)$$

Considérons ensuite l'équation de quantité de mouvement en x . On obtient:

$$\begin{aligned} \frac{U_e^2}{X} \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) &= -\frac{U_e^2}{X} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu U_e}{X^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\nu U_e}{\delta^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} . \\ &= -\frac{U_e^2}{X} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu U_e}{\delta^2} \left(\left(\frac{\delta}{X} \right)^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) . \\ &= -\frac{U_e^2}{X} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{U_e^2}{X} \left(Re^{-1} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) . \end{aligned} \quad (6.28)$$

On a donc:

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \left(Re^{-1} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) , \quad (6.29)$$

qui, lorsque $Re \rightarrow \infty$, se réduit à:

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} . \quad (6.30)$$

Pour l'équation de quantité de mouvement en y , on obtient:

$$\frac{U_e V}{X} \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = -\frac{U_e^2}{\delta} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \nu \frac{V}{\delta^2} \left(\left(\frac{\delta}{X} \right)^2 \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) . \quad (6.31)$$

On a $U_e^2/\delta = Re^{1/2} U_e^2/X$. Comme $V = Re^{-1/2} U_e$, on a aussi $U_e V/X = Re^{-1/2} U_e^2/X$ et $\nu V/\delta^2 = Re^{-1/2} \nu U_e/\delta^2 = Re^{-1/2} U_e^2/X$. Ceci permet d'écrire:

$$Re^{-1/2} \frac{U_e^2}{X} \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = -Re^{1/2} \frac{U_e^2}{X} \frac{\partial p'}{\partial y'} + Re^{-1/2} \frac{U_e^2}{X} \left(Re^{-1} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) . \quad (6.32)$$

On a donc, finalement:

$$Re^{-1} \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + Re^{-1} \left(Re^{-1} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) , \quad (6.33)$$

qui, lorsque $Re \rightarrow \infty$, se réduit à:

$$\frac{\partial p'}{\partial y'} = 0 . \quad (6.34)$$

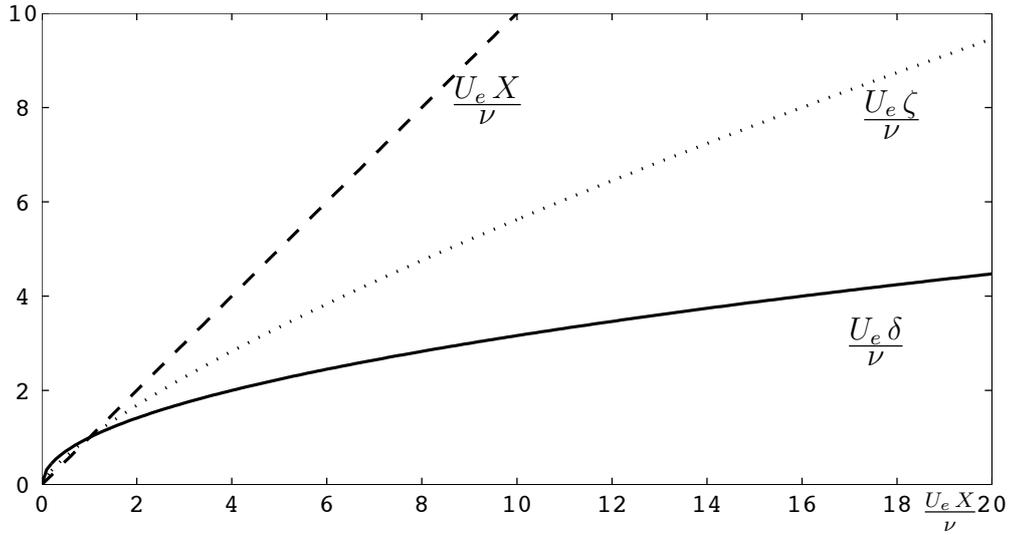


Figure 6.2: Schéma des échelles: échelle d'épaisseur de la couche limite, δ , échelle intermédiaire (de raccordement), ζ , et échelle de longueur le long de la plaque, X .

La pression ne varie donc pas au travers de la couche limite.

Les conditions à la paroi sont: $u = v = 0$ en $y = 0$. Les conditions loin de la paroi sont les conditions de raccordement entre l'écoulement "Prandtl" et l'écoulement "Euler". Pour fixer les idées, considérons la grandeur ζ définie par $\zeta = X Re^{-1/4}$. Clairement, dès que $Re \gg 1$, on a:

$$\frac{\delta}{\zeta} = Re^{-1/4} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{\zeta}{X} = Re^{-1/4} \ll 1. \quad (6.35)$$

ζ est donc une échelle intermédiaire entre δ et X : dès que $Re \gg 1$, on a que $\delta \ll \zeta \ll X$, voir Fig. 6.2. Le raccordement Prandtl-Euler se fait dans une zone à hauteur $\mathcal{O}(\zeta)$.

Pour les valeurs de Re de plus en plus grand, la solution adimensionnelle a une valeur unique au raccordement (en notant que cette solution adimensionnelle ne dépend que de Re et que les adimensionalisations de u et de p sont les mêmes hors couche limite et dans la couche limite). Cependant, l'ordonnée adimensionnelle de raccordement est $\hat{y} = \zeta/X$ pour la zone externe et $y' = \zeta/\delta$ pour la zone interne (zone de couche limite). En faisant tendre Re vers $l'\infty$, cette ordonnée de raccordement tend vers 0 pour la zone externe et vers $l'\infty$ pour la zone interne.

Revenant aux variables dimensionnelles, puisque le facteur de proportionnalité est le

même, on a donc comme conditions de raccordement asymptotiques:

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) &= \lim_{y \rightarrow 0} u_e(x, y) = u_e(x, 0) , \\ \lim_{y \rightarrow \infty} p(x, y) &= \lim_{y \rightarrow 0} p_e(x, y) = p_e(x, 0) .\end{aligned}\quad (6.36)$$

De plus, comme $\partial p / \partial y = 0$ dans la couche limite, la pression y vaut partout $p_e(x, 0)$. Le problème de Prandtl s'écrit donc finalement:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 , \quad (6.37)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial x}(x, 0) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.38)$$

et

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0 , \quad (6.39)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_e(x, 0) . \quad (6.40)$$

Finalement, et comme l'écoulement hors couche limite satisfait l'équation de Bernoulli, le terme $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial x}(x, 0)$ peut aussi s'écrire $u_e(x, 0) \frac{\partial u_e}{\partial x}(x, 0)$.

6.3 Solution pour le cas avec u_e constant (Blasius)

On considère ici le cas simple avec $u_e(x, 0)$ constant:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 , \quad (6.41)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} . \quad (6.42)$$

C'est le problème dont la solution a été obtenue par Blasius. Comme l'écoulement est incompressible, le champ de vitesse est déterminé par une fonction de courant, ψ , telle que $u = \partial \psi / \partial y$ et $v = -\partial \psi / \partial x$. L'équation de continuité est alors satisfaite. La similitude de la solution requiert que:

$$\frac{u}{u_e} = g\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) = g(\eta) , \quad (6.43)$$

avec $\eta = y/\delta(x)$, la variable de similitude où:

$$\delta(x) = \frac{x}{\left(\frac{u_e x}{2\nu}\right)^{1/2}} = \frac{\sqrt{2} x}{Re^{1/2}} = \left(\frac{2\nu x}{u_e}\right)^{1/2} . \quad (6.44)$$

Le facteur “2” n’est pas nécessaire (Blasius ne l’avait pas utilisé). Cependant, il permet d’éviter un autre facteur “2” par la suite. Pour les dérivées partielles de η , on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{y}{\delta^2(x)} \delta'(x) = -\eta \frac{\delta'(x)}{\delta(x)}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{\delta(x)},\end{aligned}\tag{6.45}$$

avec

$$\delta'(x) = \frac{1}{\sqrt{2} Re^{1/2}}.\tag{6.46}$$

La fonction de courant est nécessairement de la forme

$$\psi = u_e \delta(x) f(\eta).\tag{6.47}$$

En effet, cette forme conduit à:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e \delta(x) f'(\eta) \frac{1}{\delta(x)} = u_e f'(\eta).\tag{6.48}$$

Le profil de vitesse, $g(\eta)$, est donc $g(\eta) = f'(\eta)$. La fonction de courant donne aussi la vitesse v :

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left(u_e \delta'(x) f(\eta) - u_e \delta(x) f'(\eta) \eta \frac{\delta'(x)}{\delta(x)}\right) = u_e \delta'(x) (\eta f'(\eta) - f(\eta)).\tag{6.49}$$

Pour les dérivées du champ de vitesse, on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -u_e f''(\eta) \eta \frac{\delta'(x)}{\delta(x)}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e f''(\eta) \frac{1}{\delta(x)}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= u_e f'''(\eta) \frac{1}{\delta^2(x)}.\end{aligned}\tag{6.50}$$

Les termes d’inertie sont donc:

$$\begin{aligned}u \frac{\partial u}{\partial x} &= -u_e^2 f'(\eta) f''(\eta) \eta \frac{\delta'(x)}{\delta(x)}, \\ v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e^2 f''(\eta) (\eta f'(\eta) - f(\eta)) \frac{\delta'(x)}{\delta(x)}.\end{aligned}\tag{6.51}$$

Nous avons finalement tous les termes à introduire dans l’équation de quantité de mouvement en x ,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\tag{6.52}$$

soit:

$$\begin{aligned} -u_e^2 \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} f(\eta) f''(\eta) &= \nu u_e \frac{1}{\delta^2(x)} f'''(\eta) , \\ f'''(\eta) + \frac{u_e}{\nu} \delta(x) \delta'(x) f(\eta) f''(\eta) &= 0 . \end{aligned} \quad (6.53)$$

Finalement, comme on a $\delta(x)\delta'(x) = \frac{x}{Re}$, on obtient bien une équation différentielle ordinaire (EDO) pour $f(\eta)$:

$$f'''(\eta) + f(\eta) f''(\eta) = 0 . \quad (6.54)$$

Il s'agit d'une EDO non-linéaire et du 3ème ordre. (Remarquons, en passant, que si nous n'avions pas utilisé le facteur "2" dans la définition de δ , nous aurions obtenu un facteur "2" dans l'EDO: $f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = 0$, forme moins "canonique" que celle ci-dessus, mais tout aussi valable.) L'EDO obtenue requiert trois conditions aux limites. On a: $u = 0$ à la paroi, ce qui requiert d'avoir $f'(0) = 0$. On a aussi: $v = 0$ à la paroi, ce qui requiert $f(0) = 0$. La paroi est donc une ligne de courant: $\psi = 0$ à la paroi. Finalement, le raccordement avec l'écoulement Euler requiert d'avoir: $\lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1$. On a donc:

$$f(0) = 0 , \quad f'(0) = 0 , \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1 . \quad (6.55)$$

Cette équation n'a pas de solution analytique. Elle doit donc être résolue par intégration numérique. Pour ce faire, on la réécrit sous forme d'un système de trois équations différentielles ordinaires du premier ordre:

$$\begin{aligned} f'(\eta) &= g(\eta) , \\ g'(\eta) &= h(\eta) , \\ h'(\eta) &= -f(\eta) h(\eta) . \end{aligned} \quad (6.56)$$

Le système est donc de la forme $ds/d\eta = \mathbf{F}(\mathbf{s})$ avec $\mathbf{s} = (f, g, h)^T$ et $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = (g, h, -f h)$. Pour l'intégrer numériquement, on utilise, par exemple, un schéma de Runge-Kutta. On débute l'intégration en $\eta = 0$, avec $f(0) = 0$, $g(0) = f'(0) = 0$ et $h(0) = f''(0)$ deviné (méthode de "tir", "shooting" method). On intègre numériquement jusqu'aux grandes valeurs de η , et on examine alors $f'(\eta)$. On itère la procédure sur le choix de $f''(0)$ jusqu'à ce que l'on obtienne bien que $f'(\eta) \rightarrow 1$ lorsque $\eta \rightarrow \infty$. On obtient ainsi $f''(0) = 0.4696$.

Le profil de contrainte de cisaillement est

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{u_e}{\delta} f''(\eta) . \quad (6.57)$$

On a aussi, pour la vitesse v :

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} (\eta f'(\eta) - f(\eta)) = 1.22 . \quad (6.58)$$

Etant donné qu'il y a le terme multiplicatif $\delta'(x)$, la vitesse v à la frontière de la couche limite est effectivement petite; mais néanmoins non nulle. Ceci provient du fait que,

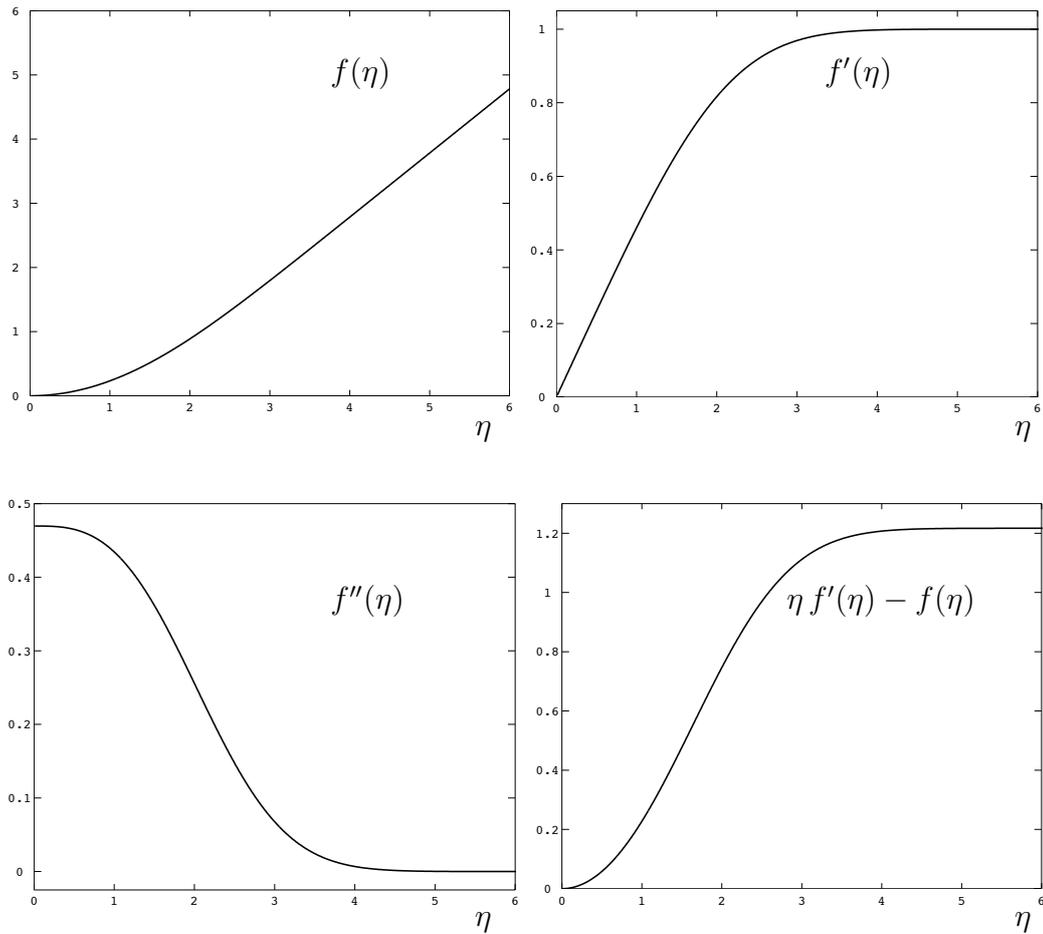


Figure 6.3: Solution de Blasius pour la couche limite avec u_e constant: profils de fonction de courant, $\psi/(u_e \delta) = f(\eta)$, de vitesse, $u/u_e = f'(\eta)$, de contrainte de cisaillement, $\tau \delta/(\mu u_e) = f''(\eta)$ et de vitesse $v/(u_e \delta') = \eta f'(\eta) - f(\eta)$.

comme la couche limite grandit lentement en x , il faut bien, par conservation de la masse, qu'il y ait un petit "débit de fuite".

Les profils de fonction de courant, $\psi/(u_e \delta) = f(\eta)$, de vitesse, $u/u_e = f'(\eta) = g(\eta)$, de contrainte de cisaillement, $\tau \delta/(\mu u_e) = f''(\eta) = g'(\eta) = h(\eta)$ et de vitesse $v/(u_e \delta') = \eta f'(\eta) - f(\eta)$ ainsi obtenus sont présentés à la Fig. 6.3.

Qu'en est-il du frottement à la paroi? La contrainte de cisaillement à la paroi, τ_w , est:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \nu \frac{u_e}{\delta} f''(0) = \frac{u_e^2}{2} f''(0) \left(\frac{u_e x}{2\nu} \right)^{-1/2}. \quad (6.59)$$

Le coefficient adimensionnel de frottement local, $C_f(x)$, est donc:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2/2} = f''(0) \left(\frac{u_e x}{2\nu} \right)^{-1/2} = 0.664 \left(\frac{u_e x}{\nu} \right)^{-1/2} = 0.664 Re^{-1/2} . \quad (6.60)$$

La force D , par unité de largeur, exercée par l'écoulement sur la plaque (i.e., la force de traînée: "Drag" en anglais), et correspondant à la partie de la plaque entre $x = 0$ à $x = X$ est obtenue par intégration:

$$D(X) = \int_0^X \tau_w(x) dx = \frac{\rho u_e^2}{2} f''(0) \int_0^X \left(\frac{u_e x}{2\nu} \right)^{-1/2} dx = \frac{u_e^2}{2} 2 f''(0) X \left(\frac{u_e X}{2\nu} \right)^{-1/2} . \quad (6.61)$$

Le coefficient de frottement moyen est donc:

$$C_{f,m}(X) = \frac{D(X)}{X \rho u_e^2/2} = 2 f''(0) \left(\frac{u_e X}{2\nu} \right)^{-1/2} = 1.328 \left(\frac{u_e X}{\nu} \right)^{-1/2} = 1.328 Re^{-1/2} . \quad (6.62)$$

Il est clair qu'on a aussi, par définition de la moyenne, que

$$C_{f,m}(X) = \frac{1}{X} \int_0^X C_f(x) dx . \quad (6.63)$$

Finalement, on note aussi que, dans le cas de la couche limite avec u_e constant, $C_{f,m} = 2 C_f$.

6.4 Epaisseurs de la couche limite

Comme expliqué précédemment, la grandeur δ n'est pas l'épaisseur de la couche limite. C'est un ordre de grandeur de cette épaisseur. Il est difficile de "définir" l'épaisseur de la couche limite: en effet, le profil de vitesse est une fonction continue qui tend asymptotiquement vers u_e . On parle souvent d'épaisseur à 99% . C'est simplement la distance à la paroi telle que $u = 0.99 u_e$, pour laquelle on a: $\eta = 3.47$. On a donc

$$\frac{\delta_{0.99}}{x} = 3.47 \left(\frac{u_e x}{2\nu} \right)^{-1/2} = 4.91 Re^{-1/2} . \quad (6.64)$$

Si on considère plutôt $u = 0.95 u_e$ comme mesure de l'épaisseur de la couche limite, on obtient $\eta = 2.77$ et donc

$$\frac{\delta_{0.95}}{x} = 2.77 \left(\frac{u_e x}{2\nu} \right)^{-1/2} = 3.92 Re^{-1/2} . \quad (6.65)$$

Par contre, si on considère $u = 0.999 u_e$, on obtient $\eta = 4.25$ et donc

$$\frac{\delta_{0.999}}{x} = 4.25 \left(\frac{u_e x}{2\nu} \right)^{-1/2} = 6.02 Re^{-1/2} . \quad (6.66)$$

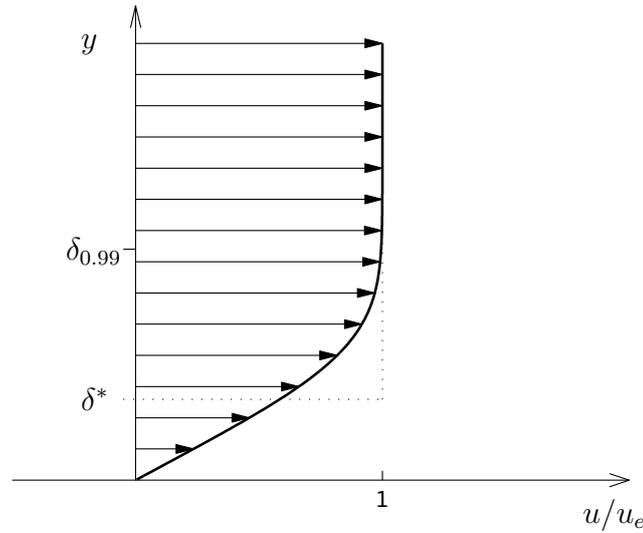


Figure 6.4: Concept d'épaisseur de déplacement, δ^* , pour une couche limite.

Le concept d'épaisseur de couche limite est donc fort peu précis. Un concept beaucoup plus précis est le concept d'épaisseur de déplacement, δ^* . C'est la distance à la paroi telle que le débit du profil de vitesse incluant la couche limite soit le même que le débit sans couche limite pour une paroi "déplacée" de l'épaisseur δ^* , voir Fig. 6.4.

On a donc, pour tout $\zeta \gg \delta$:

$$\int_0^\zeta u \, dy = (\zeta - \delta^*) u_e = u_e \int_0^\zeta dy - u_e \delta^* , \quad (6.67)$$

et donc:

$$\delta^* = \int_0^\zeta \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy . \quad (6.68)$$

Ecrire sous cette forme, l'intégrale est clairement rapidement convergente. On écrit en fait souvent:

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (6.69)$$

où l'infini sous-entend toute grandeur $\zeta \gg \delta$. Pour la couche limite avec u_e constant, on obtient:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) \frac{dy}{\delta} = \int_0^\infty (1 - f'(\eta)) \, d\eta = 1.217 , \quad (6.70)$$

et donc:

$$\frac{\delta^*}{x} = 1.721 \left(\frac{u_e x}{\nu}\right)^{-1/2} = 1.721 Re^{-1/2} . \quad (6.71)$$

Finalement, pour les couches limites, on définit aussi l'épaisseur de quantité de mouvement, θ (qui s'avérera très utile dans la formulation intégrale des équations de la couche limite, voir plus loin):

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy . \quad (6.72)$$

Pour la couche limite avec u_e constant, on obtient:

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) \frac{dy}{\delta} = \int_0^\infty f'(\eta) (1 - f'(\eta)) d\eta = 0.470 , \quad (6.73)$$

et donc:

$$\frac{\theta}{x} = 0.664 \left(\frac{u_e x}{\nu}\right)^{-1/2} = 0.664 Re^{-1/2} . \quad (6.74)$$

Pour la couche limite avec u_e constant, on a donc:

$$\frac{\theta}{x} = \frac{C_{f,m}}{2} . \quad (6.75)$$

On a en fait obtenu ici la signification "physique" de l'épaisseur de quantité de mouvement dans le cas avec u_e constant. En effet la relation,

$$C_{f,m}(X) = \frac{D(X)}{X \rho u_e^2 / 2} = 2 \frac{\theta(X)}{X} \quad (6.76)$$

entraîne l'égalité:

$$D(X) = \rho u_e^2 \theta(X) . \quad (6.77)$$

L'épaisseur de quantité de mouvement, $\theta(X)$, correspond donc à la force de traînée normalisée, $D/(\rho u_e^2)$, exercée par la plaque sur le fluide entre $x = 0$ et $x = X$. De même, pour tout couple (X_1, X_2) , la différence, $\theta(X_2) - \theta(X_1)$, correspond à la force de traînée normalisée exercée par la plaque sur le fluide entre $x = X_1$ et $x = X_2$. Le déficit de quantité de mouvement de la couche limite entre X_1 et X_2 est donc $\theta(X_2) - \theta(X_1)$, et ce déficit correspond à la force exercée par le milieu extérieur (ici, la plaque) sur le système (ici le fluide).

6.5 Approche intégrale pour le cas général

Pour les couches limites laminares, il y a peu de solutions exactes, i.e., de solutions de similitude de la forme $u/u_e = g(\eta)$ avec $\eta = y/\delta(x)$ et $\delta(x) = x (u_e(x) x/\nu)^{-1/2}$. En fait, il y a (1) la solution de Blasius développée ci-dessus pour le cas u_e uniforme, et (2) la solution de Falkner-Skan pour le cas $u_e = C x^\alpha$ (voir cours *Aérodynamique*) et dont la solution de Blasius n'est en fait que le cas particulier $\alpha = 0$. Comme il n'y a pas de solution exacte pour les autres cas (que l'on rencontre pourtant dans la réalité), il est

nécessaire de développer une approche simplifiée et qui permette encore d'obtenir des grandeurs globales telles que δ^* , θ , C_f , $C_{f,m}$.

L'approche intégrale de von Karman constitue une telle approche. Elle peut s'obtenir, soit par intégration des équations de la couche limite en y , de la paroi jusqu'à la zone de raccordement avec l'écoulement irrotationnel extérieur, soit à partir de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement appliquée à un volume de contrôle différentiel tel que présenté à la Fig. 6.5. Nous considérons ici la seconde approche car on peut l'aborder de manière plus physique et plus simple. Nous considérons le cas général des écoulements incompressibles ou compressibles.

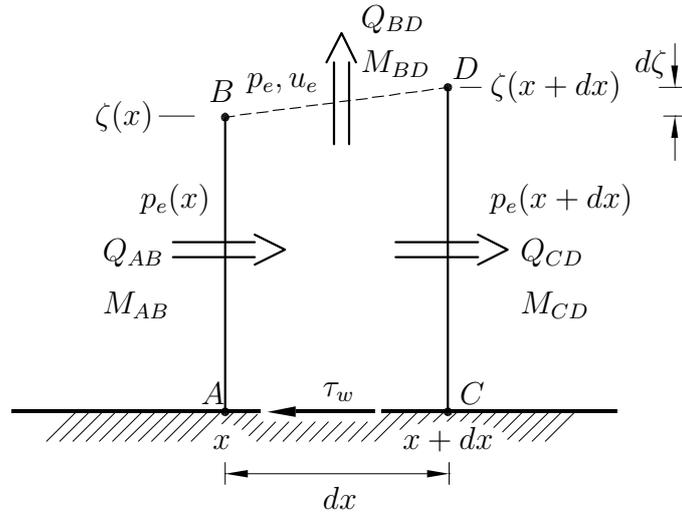


Figure 6.5: Approche intégrale de von Karman: volume de contrôle différentiel.

La conservation de la masse demande que le débit sortant soit égal au débit entrant:

$$Q_{CD} + Q_{BD} - Q_{AB} = 0 . \quad (6.78)$$

On a:

$$Q_{AB} = \left(\int_0^{\zeta} \rho u dy \right) \Big|_x \quad (6.79)$$

et:

$$Q_{CD} = \left(\int_0^{\zeta} \rho u dy \right) \Big|_{x+dx} = \left(\int_0^{\zeta} \rho u dy \right) \Big|_x + dx \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\zeta} \rho u dy \right) \Big|_x . \quad (6.80)$$

On obtient dès lors, pour le débit sortant de la couche limite par sa "frontière" extérieure:

$$Q_{BD} = -dx \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\zeta} \rho u dy \right) \Big|_x . \quad (6.81)$$

La conservation de quantité de mouvement demande que la différence entre le flux sortant et le flux entrant soit égale à la somme des forces subies par le fluide. On considère la composante en x de la quantité de mouvement. On doit donc avoir l'égalité:

$$M_{CD} + M_{BD} - M_{AB} = F_{AB} - F_{CD} + F_{BD} - F_{AC} . \quad (6.82)$$

Pour les intégrales de flux, on obtient:

$$M_{AB} = \left(\int_0^\zeta \rho u^2 dy \right) \Big|_x , \quad (6.83)$$

$$M_{CD} = \left(\int_0^\zeta \rho u^2 dy \right) \Big|_{x+dx} = \left(\int_0^\zeta \rho u^2 dy \right) \Big|_x + dx \frac{d}{dx} \left(\int_0^\zeta \rho u^2 dy \right) \Big|_x , \quad (6.84)$$

$$M_{BD} = u_e Q_{BD} = -u_e dx \frac{d}{dx} \left(\int_0^\zeta \rho u dy \right) \Big|_x . \quad (6.85)$$

Pour les forces agissant sur le volume de contrôle, on obtient:

$$F_{AB} = (p_e \zeta) \Big|_x , \quad (6.86)$$

$$F_{CD} = (p_e \zeta) \Big|_{x+dx} = (p_e \zeta) \Big|_x + dx \frac{d}{dx} (p_e \zeta) \Big|_x . \quad (6.87)$$

$$F_{BD} = p_e d\zeta \Big|_x = p_e dx \frac{d\zeta}{dx} \Big|_x \quad (6.88)$$

$$F_{AC} = dx \tau_w \Big|_x . \quad (6.89)$$

Finalement, il vient:

$$\begin{aligned} dx \frac{d}{dx} \left(\int_0^\zeta \rho u^2 dy \right) \Big|_x - u_e dx \frac{d}{dx} \left(\int_0^\zeta \rho u dy \right) \Big|_x &= -dx \frac{d}{dx} (p_e \zeta) \Big|_x + p_e dx \frac{d\zeta}{dx} \Big|_x - dx \tau_w \Big|_x , \\ &= -dx \zeta \frac{dp_e}{dx} \Big|_x - dx \tau_w \Big|_x . \end{aligned} \quad (6.90)$$

On a donc établi que, pour tout x :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_0^\zeta \rho u^2 dy \right) &= u_e \frac{d}{dx} \left(\int_0^\zeta \rho u dy \right) - \zeta \frac{dp_e}{dx} - \tau_w ; , \\ &= \frac{d}{dx} \left(u_e \int_0^\zeta \rho u dy \right) - \left(\int_0^\zeta \rho u dy \right) \frac{du_e}{dx} - \zeta \frac{dp_e}{dx} - \tau_w , \end{aligned} \quad (6.91)$$

résultat que l'on réécrit sous la forme:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^\zeta \rho u (u - u_e) dy \right) + \left(\int_0^\zeta \rho u dy \right) \frac{du_e}{dx} = -\zeta \frac{dp_e}{dx} - \tau_w . \quad (6.92)$$

Dans le cas général (écoulements incompressibles ou compressibles), l'épaisseur de déplacement est définie à partir de la relation:

$$\int_0^{\zeta} \rho u dy = \rho_e u_e (\zeta - \delta^*) , \quad (6.93)$$

qui donne:

$$\delta^* = \int_0^{\zeta} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) dy . \quad (6.94)$$

L'équation (6.92) devient donc:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\zeta} \rho u (u - u_e) dy \right) + \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} (\zeta - \delta^*) = -\zeta \frac{dp_e}{dx} - \tau_w . \quad (6.95)$$

Comme $dp_e/dx + \rho_e u_e du_e/dx = 0$ en dehors de la couche limite (Euler), les termes en ζ se simplifient. Il reste:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\zeta} \rho u (u - u_e) dy \right) - \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} \delta^* = -\tau_w . \quad (6.96)$$

L'épaisseur de quantité de mouvement est définie, dans le cas général, par:

$$\theta = \int_0^{\zeta} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy . \quad (6.97)$$

L'équation intégrale de von Karman est finalement obtenue comme:

$$\frac{d}{dx} (\rho_e u_e^2 \theta) + \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} \delta^* = \tau_w . \quad (6.98)$$

Le coefficient de frottement étant défini par l'égalité:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho_e u_e^2 / 2} , \quad (6.99)$$

la forme adimensionnelle de l'équation intégrale de von Karman s'écrit, pour le cas général, sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{\rho_e u_e^2} \frac{d}{dx} (\rho_e u_e^2) \theta + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} \delta^* &= \frac{C_f}{2} , \\ \frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} \theta + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} (2\theta + \delta^*) &= \frac{C_f}{2} . \end{aligned} \quad (6.100)$$

Le rapport $H \stackrel{\text{def}}{=} \delta^* / \theta$ constitue ce que l'on appelle le facteur de forme de la couche limite. On écrit donc aussi:

$$\frac{d\theta}{dx} + \left(\frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} + (2 + H) \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} \right) \theta = \frac{C_f}{2} . \quad (6.101)$$

Le cas des écoulements incompressibles est obtenu en prenant $\rho_e = \rho$ constant. On a alors, plus simplement:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} (2\theta + \delta^*) &= \frac{C_f}{2}, \\ \frac{d\theta}{dx} + (2 + H) \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} \theta &= \frac{C_f}{2}.\end{aligned}\quad (6.102)$$

Dans le cas de la couche limite avec u_e constant, l'équation intégrale se réduit simplement à $d\theta/dx = C_f/2$: le taux d'augmentation de l'épaisseur de quantité de mouvement est alors directement proportionnel au coefficient de frottement. L'intégration de l'équation de von Karman donne alors aussi: $\theta/x = C_{f,m}/2$ (exercice).

6.6 Couches limites thermiques

Considérons le cas général en écoulements incompressibles. L'équation de l'énergie s'exprime alors en terme d'énergie interne, U , avec $dU = c(T) dT$:

$$\begin{aligned}\rho \frac{DU}{Dt} &= \tau_{ji} d_{ij} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}, \\ &= 2\mu d_{ji} d_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right).\end{aligned}\quad (6.103)$$

Au sein de la couche limite, celle-ci se réduit à

$$\rho \left(u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right).\quad (6.104)$$

En toute généralité, μ , k et c sont fonctions de la température, T . Si on multiplie l'équation de quantité de mouvement,

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right),\quad (6.105)$$

par u , on obtient:

$$\rho \left(u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right) = -u \frac{dp_e}{dx} + u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right).\quad (6.106)$$

Si on additionne cette équation avec celle de l'énergie interne, on obtient l'équation pour l'énergie interne totale, $U_0 = U + u^2/2$:

$$\begin{aligned}
\rho \left(u \frac{\partial U_0}{\partial x} + v \frac{\partial U_0}{\partial y} \right) &= -u \frac{dp_e}{dx} + u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right), \\
&= -u \frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right), \\
&= -u \frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) + k \frac{\partial T}{\partial y} \right), \\
&= -u \frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{k}{\mu c} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right). \tag{6.107}
\end{aligned}$$

On se souvient du nombre de Prandtl, $Pr = \frac{\mu c}{k}$. Le coefficient de diffusivité thermique, $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ est donc aussi $\alpha = \frac{\nu}{Pr}$. Bien que μ , k et c sont tous fonctions de T , le nombre de Prandtl l'est relativement peu pour les gaz: en effet, c varie peu avec la température, μ et k varient significativement (ils croissent) mais presque en proportion. Par exemple, à pression atmosphérique, l'air a $Pr = 0.71$ à 20°C et $Pr = 0.69$ à 100°C . Par contre, pour les liquides, le nombre de Prandtl varie rapidement avec la température: en effet, c varie peu, la viscosité μ décroît rapidement et k croît lentement. Par exemple, l'eau a $Pr = 6.9$ à 20°C , $Pr = 3.5$ à 50°C et $Pr = 2.2$ à 80°C . L'approximation consistant à considérer que Pr n'est pas fonction de T est donc souvent très bonne pour les gaz. Elle l'est beaucoup moins pour les liquides, sauf, bien sûr, lorsque les variations de température pour le problème considéré sont faibles.

Pour la suite, on considère uniquement les cas avec u_e constant, et donc:

$$\rho \left(u \frac{\partial U_0}{\partial x} + v \frac{\partial U_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{1}{Pr} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right). \tag{6.108}$$

6.6.1 Cas $Pr = 1$ et u_e constant

Nous examinons ici plus en détail le cas avec u_e constant et $Pr = 1$. L'équation (6.108) se simplifie alors en:

$$\rho \left(u \frac{\partial U_0}{\partial x} + v \frac{\partial U_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial U_0}{\partial y} \right). \tag{6.109}$$

En comparant l'équation (6.105) avec $u_e = 0$ et l'équation (6.109), on constate que les grandeurs u et U_0 satisfont la même équation. Il s'ensuit qu'il doit y avoir une relation linéaire entre les deux profils:

$$U_0 = Au + B. \tag{6.110}$$

Cette constatation constitue la relation de Crocco en couche limite incompressible. A noter que, tant que $Pr = 1$, elle est même valable pour des fluides à grandeurs non constantes. Les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions aux limites.

Considérons d'abord le cas d'une couche limite avec paroi à température constante: $T|_{y=0} = T_w = \text{constante}$. On obtient alors que $B = U_w$. Le raccordement avec l'écoulement hors couche limite donne aussi:

$$U_{0e} = A u_e + B = A u_e + U_w, \quad (6.111)$$

et donc:

$$A = \frac{(U_{0e} - U_w)}{u_e} = \frac{(U_e - U_w) + u_e^2/2}{u_e}. \quad (6.112)$$

La relation de Crocco devient donc, finalement:

$$\begin{aligned} U_0 - U_w &= (U_{0e} - U_w) \frac{u}{u_e}, \\ (U - U_w) + \frac{u^2}{2} &= \left((U_e - U_w) + \frac{u_e^2}{2} \right) \frac{u}{u_e}. \end{aligned} \quad (6.113)$$

La signification physique de la constante A est facilement obtenue. En effet, par différentiation de la relation de Crocco, on obtient:

$$\frac{\partial U}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial y} = c \frac{\partial T}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial y} = A \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (6.114)$$

A la paroi, cette relation donne:

$$c \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = A \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad (6.115)$$

et donc, puisque $Pr = 1$,

$$\begin{aligned} k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} &= A \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}, \\ -q_w &= A \tau_w. \end{aligned} \quad (6.116)$$

La constante A constitue donc le rapport entre le flux de chaleur à la paroi et la contrainte de cisaillement à la paroi.

Dans le cas où les grandeurs caractéristiques du fluide, μ , k et c sont constantes, l'écoulement est donné par la solution de similitude exacte de Blasius, $u/u_e = f'(\eta)$. Puisque $dU = c dT$ dans ce cas, la relation de Crocco devient:

$$c (T - T_w) + \frac{u^2}{2} = \left(c (T_e - T_w) + \frac{u_e^2}{2} \right) \frac{u}{u_e}. \quad (6.117)$$

En divisant par $u_e^2/2$, on obtient

$$\frac{c (T - T_w)}{u_e^2/2} + \left(\frac{u}{u_e} \right)^2 = \left(\frac{c (T_e - T_w)}{u_e^2/2} + 1 \right) \frac{u}{u_e}. \quad (6.118)$$

Le profil de température est donc obtenu comme:

$$\frac{c (T - T_w)}{u_e^2/2} = \left(\frac{c (T_e - T_w)}{u_e^2/2} + 1 \right) f'(\eta) - (f'(\eta))^2 . \quad (6.119)$$

Un autre cas est le cas d'une couche limite sans transfert de chaleur à la paroi (cas adiabatique): $q_w = 0$ et donc $A = 0$, et donc $U_0 = \text{constante}$. L'énergie interne totale est constante au travers de la couche limite. Ce cas correspond effectivement à une solution particulière de l'équation 6.109. On a donc

$$U + \frac{u^2}{2} = U_e + \frac{u_e^2}{2} , \quad (6.120)$$

et donc

$$U - U_e = \frac{u_e^2}{2} \left(1 - \left(\frac{u}{u_e} \right)^2 \right) . \quad (6.121)$$

Dans le cas avec c constant, cette relation fournit le profil de température:

$$\frac{c (T - T_e)}{u_e^2/2} = 1 - (f'(\eta))^2 . \quad (6.122)$$

En particulier, la température de paroi est telle que:

$$\frac{c (T_w - T_e)}{u_e^2/2} = 1 . \quad (6.123)$$

6.6.2 Cas Pr général, dissipation négligeable, u_e et T_w constants

On considère ici les fluides dont le nombre de Prandtl est différent de l'unité. La relation de Crocco n'est donc plus satisfaite. Cependant, si on considère les écoulements pour lesquels le terme de dissipation visqueuse au sein de la couche limite est négligeable par rapport au terme de conduction de chaleur, on peut encore obtenir des solutions exactes.

L'ordre de grandeur des termes de dissipation visqueuse et de conduction de chaleur est:

$$\mu \left(\frac{u_e}{\delta} \right)^2 \quad \text{et} \quad k \frac{|T_e - T_w|}{\delta_T^2} \quad (6.124)$$

avec δ_T l'épaisseur caractéristique de la couche limite thermique. Pour que la dissipation visqueuse soit négligeable par rapport à la conduction de chaleur, il faut donc que:

$$\mu \left(\frac{u_e}{\delta} \right)^2 \ll k \frac{|T_e - T_w|}{\delta_T^2} , \quad (6.125)$$

ou encore:

$$\frac{\mu u_e^2}{k |T_e - T_w|} \left(\frac{\delta_T}{\delta} \right)^2 = \frac{\mu c}{k} \frac{u_e^2}{c |T_e - T_w|} \left(\frac{\delta_T}{\delta} \right)^2 = Pr Ec \left(\frac{\delta_T}{\delta} \right)^2 \ll 1 , \quad (6.126)$$

avec Ec le nombre de Eckert. On a aussi déjà obtenu, par considérations physiques (comparaison entre les termes de convection et de diffusion de u), que $\delta(x)$ varie comme $x / \left(\frac{u_e x}{\nu}\right)^{1/2}$. De la même manière, on obtient, par comparaison entre les termes de convection et de diffusion de T , que $\delta_T(x)$ varie comme $x / \left(\frac{u_e x}{\alpha}\right)^{1/2}$. On obtient donc que

$$\frac{\delta_T}{\delta} \approx \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^{1/2} = \frac{1}{Pr^{1/2}}. \quad (6.127)$$

La condition adimensionnelle pour que le terme de dissipation visqueuse soit négligeable par rapport au terme de conduction de chaleur est donc, finalement, que $Ec \ll 1$.

Dans ce cas, l'équation de l'énergie se réduit à:

$$\rho \left(u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (6.128)$$

Dans le cas d'un fluide avec propriétés constantes, cette équation devient:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (6.129)$$

Dans le cas d'une couche limite avec température de paroi, T_w , constante, on peut espérer obtenir une solution de similitude de la forme:

$$\frac{T - T_w}{T_e - T_w} = \Theta(\eta). \quad (6.130)$$

En développant les différents termes (à faire en exercice), l'équation de l'énergie se réduit à l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$\Theta''(\eta) + Pr f(\eta) \Theta'(\eta) = 0. \quad (6.131)$$

Puisque la fonction $f(\eta)$ est une fonction connue (Blasius), il s'agit en fait d'une EDO du premier ordre pour $G(\eta) = \Theta'(\eta)$. Les conditions aux limites sont $\Theta(0) = 0$ et $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Theta(\eta) = 1$. Cette équation s'écrit aussi, en utilisant un facteur d'intégration:

$$\left(G(\eta) \exp \left(Pr \int_0^\eta f(\zeta) d\zeta \right) \right)' = 0, \quad (6.132)$$

dont la solution est

$$G(\eta) \exp \left(Pr \int_0^\eta f(\zeta) d\zeta \right) = C. \quad (6.133)$$

Intégrée une fois de plus, cette relation nous donne:

$$\Theta(\eta) = C \int_0^\eta \exp \left(-Pr \int_0^\xi f(\zeta) d\zeta \right) d\xi + D. \quad (6.134)$$

Les conditions aux limites déterminent les constantes d'intégration. Le profil de température finalement obtenu est:

$$\frac{T - T_w}{T_e - T_w} = \Theta(\eta) = \frac{\int_0^\eta \exp\left(-Pr \int_0^\xi f(\zeta) d\zeta\right) d\xi}{\int_0^\infty \exp\left(-Pr \int_0^\xi f(\zeta) d\zeta\right) d\xi}. \quad (6.135)$$

La figure 6.6 montre les profils de température obtenus pour différentes valeurs de Pr . On vérifie bien que, au plus le nombre de Prandtl est grand, au plus l'épaisseur de la couche limite thermique, δ_T , est petite par rapport à l'épaisseur de la couche limite de vitesse, δ . On peut aussi vérifier, a posteriori, le résultat attendu que $\delta_T/\delta \approx 1/\sqrt{Pr}$.

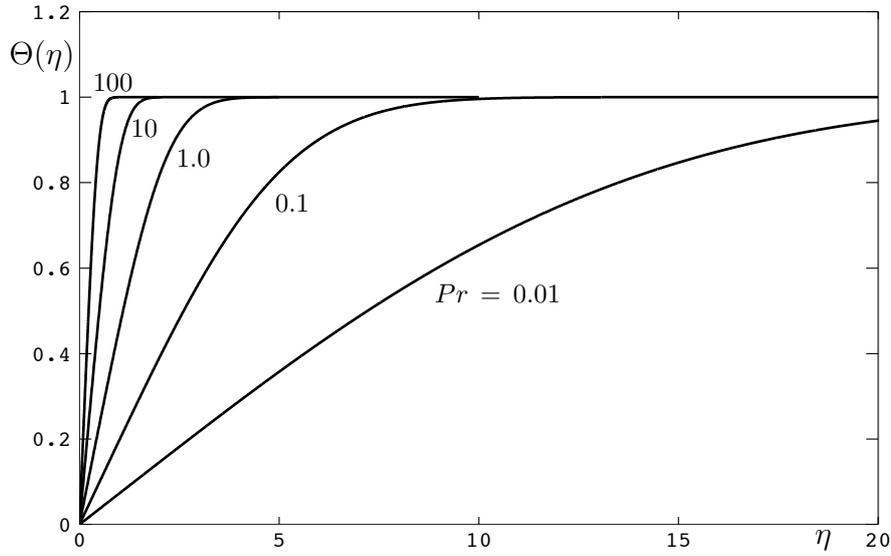


Figure 6.6: Profils de température pour le cas Pr général, dissipation négligeable, u_e et T_w constants.

Comme elles sont valables pour tout Pr avec $Ec \ll 1$, on peut réexaminer le cas $Pr = 1$ et le comparer avec la solution exacte de Crocco (qui, elle, ne néglige pas la dissipation visqueuse et est donc aussi valable pour de grandes valeurs de Ec). Avec $Pr = 1$, l'équation différentielle 6.131 se réduit à

$$\Theta''(\eta) + f(\eta) \Theta'(\eta) = 0. \quad (6.136)$$

En comparant cette équation différentielle avec celle qui a été écrite pour $f(\eta)$, Eq. (6.54), dont les conditions aux limites sont $f'(0) = 0$ et $\lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1$, on obtient immédiatement la solution: $\Theta(\eta) = f'(\eta)$ (car même EDO et même conditions aux limites). On obtient donc:

$$\frac{T - T_w}{T_e - T_w} = \frac{u}{u_e} = f'(\eta). \quad (6.137)$$

Ce résultat est à comparer avec le résultat exact de Crocco pour $Pr = 1$, Eq. (6.117). Cette concordance est logique: en effet, lorsque $Ec \ll 1$, on a $u_e^2 \ll c (T_e - T_w)$ et la relation de Crocco devient essentiellement:

$$c (T - T_w) \approx c (T_e - T_w) \frac{u}{u_e}, \quad (6.138)$$

qui correspond bien au résultat (6.137).

Retournons au cas Pr général et $Ec \ll 1$. Le flux de chaleur à la paroi est aussi obtenu:

$$q_w = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = -k (T_e - T_w) \Theta'(0) \frac{1}{\delta(x)} = -k (T_e - T_w) \Theta'(0) \left(\frac{u_e}{2\nu x} \right)^{1/2}. \quad (6.139)$$

En terme adimensionnel, on définit le nombre de Nusselt:

$$Nu = \frac{q_w x}{k (T_w - T_e)} = \Theta'(0) \frac{x}{\delta(x)} = \frac{\Theta'(0)}{\sqrt{2}} \left(\frac{u_e x}{\nu} \right)^{1/2} = \frac{\Theta'(0)}{\sqrt{2}} Re^{1/2}. \quad (6.140)$$

Le profil de température donne aussi:

$$\Theta'(0) = \frac{1}{\int_0^\infty \exp\left(-Pr \int_0^\xi f(\zeta) d\zeta\right) d\xi}. \quad (6.141)$$

Certaines valeurs numériques sont reprises dans le tableau ci-dessous. Une approximation, également rapportée dans le tableau pour comparaison, est donnée par la relation:

$$\frac{\Theta'(0)}{\sqrt{2}} \approx 0.332 Pr^{1/3}. \quad (6.142)$$

L'approximation donne alors:

$$Nu \approx 0.332 Pr^{1/3} Re^{1/2} \quad (6.143)$$

A noter que cette approximation n'est pas si bonne que cela pour les fluides avec $Pr < 0.1$.

Pr	$\Theta'(0)/\sqrt{2}$	$0.332 Pr^{1/3}$
0.01	0.0516	0.0715
0.1	0.140	0.154
1.0	0.332	0.332
10	0.728	0.715
100	1.57	1.54

Au lieu du nombre de Nusselt, on utilise souvent le nombre de Stanton:

$$St = \frac{q_w}{\rho u_e c (T_w - T_e)}. \quad (6.144)$$

Ces nombres sont liés. En effet:

$$St = \frac{q_w x}{k (T_w - T_e)} \frac{\mu}{\rho u_e x} \frac{k}{\mu c} = Nu Re^{-1} Pr^{-1} . \quad (6.145)$$

Avec l'approximation ci-dessus, on obtient:

$$St \approx 0.332 Pr^{-2/3} Re^{-1/2} . \quad (6.146)$$

Si on compare ce résultat avec celui obtenu pour le coefficient de frottement, Eq. (6.60), on obtient:

$$St \approx Pr^{-2/3} \frac{C_f}{2} . \quad (6.147)$$

Cette égalité constitue "l'analogie de Reynolds": pour les couches limites avec u_e constant, Pr général (mais $Ec \ll 1$) et T_w constant, le coefficient de transfert de chaleur exprimé en nombre de Stanton et le coefficient de frottement sont dans un rapport bien déterminé, et qui ne dépend que du nombre de Prandtl du fluide. Cette analogie s'avère très utile en ingénierie. Elle permet, par exemple, de calculer le transfert de quantité de mouvement à la paroi (i.e., le frottement) à partir d'une mesure du transfert de chaleur à la paroi. Elle peut aussi être utilisée de façon inverse. Bien que l'analogie ne soit strictement valable qu'en couche limite avec u_e constant, on l'utilise aussi souvent, en ingénierie, comme "approximation" dans le cas de couches limites avec u_e non constant.

6.7 Couches limites en écoulement compressible

Les équations de la couche limite en écoulement compressible sont facilement obtenues par extension de l'analyse développée ci-avant. En plus de la loi de constitution $p = \rho RT$, de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho d_{mm} = 0 , \quad (6.148)$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} , \quad (6.149)$$

on doit aussi considérer l'équation de l'énergie. Exprimée en enthalpie, H , avec $dH = c_p dT$, elle s'écrit:

$$\rho \frac{DH}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \tau_{ji} d_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) . \quad (6.150)$$

Au sein de la couche limite, ces équations deviennent:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 , \quad (6.151)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) , \quad (6.152)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) = u \frac{dp_e}{dx} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) . \quad (6.153)$$

En toute généralité, les grandeurs μ , k et c_p sont fonctions de la température, T . Si on multiplie l'équation de quantité de mouvement par u , on obtient:

$$\rho \left(u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right) = -u \frac{dp_e}{dx} + u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (6.154)$$

Si on additionne cette équation avec celle de l'enthalpie, on obtient l'équation pour l'enthalpie totale, $H_0 = H + u^2/2$:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial H_0}{\partial x} + v \frac{\partial H_0}{\partial y} \right) &= u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) + k \frac{\partial T}{\partial y} \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{1}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right) \end{aligned} \quad (6.155)$$

avec $Pr = \frac{\mu c_p}{k}$. A noter que, bien que μ , k et c_p soient fonctions de T , le nombre de Prandtl l'est relativement peu pour les gaz. L'approximation, consistant à considérer que le nombre de Prandtl Pr n'est pas fonction de T , est donc souvent très bonne.

6.7.1 Cas $Pr = 1$ et u_e constant

Nous examinons plus en détail le cas avec u_e constant et $Pr = 1$. L'équation 6.155 se simplifie:

$$\rho \left(u \frac{\partial H_0}{\partial x} + v \frac{\partial H_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial H_0}{\partial y} \right). \quad (6.156)$$

Les grandeurs u et H_0 satisfont alors la même équation. Il s'ensuit qu'il doit y avoir une relation linéaire entre ces deux grandeurs:

$$H_0 = A u + B. \quad (6.157)$$

Cette relation constitue la relation de Crocco pour les couche limites compressibles. Les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions aux limites.

Dans le cas d'une couche limite avec température de paroi constante, $T|_{y=0} = T_w =$ constante, on obtient finalement:

$$\begin{aligned} H_0 - H_w &= (H_{0e} - H_w) \frac{u}{u_e}, \\ (H - H_w) + \frac{u^2}{2} &= \left((H_e - H_w) + \frac{u_e^2}{2} \right) \frac{u}{u_e}. \end{aligned} \quad (6.158)$$

Dans le cas d'un fluide caloriquement parfait (c_p pas fonction de T), on a $dH = c_p dT$ et donc:

$$c_p (T - T_w) + \frac{u^2}{2} = \left(c_p (T_e - T_w) + \frac{u_e^2}{2} \right) \frac{u}{u_e} . \quad (6.159)$$

Le profil de température est dès lors obtenu comme:

$$\frac{c_p (T - T_w)}{u_e^2/2} = \left(\frac{c_p (T_e - T_w)}{u_e^2/2} + 1 \right) \frac{u}{u_e} - \left(\frac{u}{u_e} \right)^2 . \quad (6.160)$$

La constante A constitue donc le rapport entre le flux de chaleur et la contrainte de cisaillement à la paroi.

Dans la cas d'une couche limite sans transfert de chaleur à la paroi (cas adiabatique: $q_w = 0$), l'enthalpie totale est constante:

$$H + \frac{u^2}{2} = H_e + \frac{u_e^2}{2} . \quad (6.161)$$

Donc, pour un fluide caloriquement parfait, il vient:

$$\frac{c_p (T - T_e)}{u_e^2/2} = 1 - \left(\frac{u}{u_e} \right)^2 . \quad (6.162)$$

En particulier, la température de paroi est telle que:

$$\frac{c_p (T_w - T_e)}{u_e^2/2} = 1 . \quad (6.163)$$

6.8 Approche intégrale pour le transfert de chaleur

L'approche intégrale de von Karman s'applique aussi au transfert de chaleur. De nouveau, elle peut s'obtenir, soit par intégration des équations de la couche limite en y , de la paroi jusqu'à la zone de raccordement avec l'écoulement Euler extérieur, soit à partir des conservations de la masse et de l'énergie appliquées à un volume de contrôle tel que présenté à la Fig. 6.7 Nous utilisons de nouveau la seconde approche.

La conservation de l'énergie demande que la différence entre le flux sortant et le flux entrant soit égale à l'apport reçu par le fluide:

$$E_{CD} + E_{BD} - E_{AB} = E_{AC} . \quad (6.164)$$

Considérons d'abord le cas des écoulements compressibles. On travaille en enthalpie

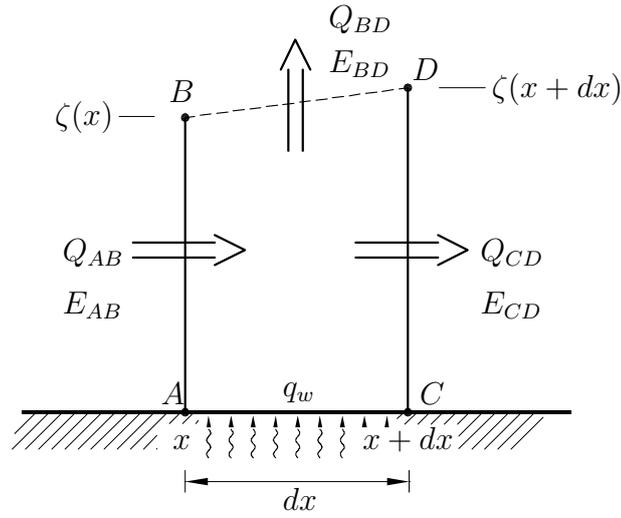


Figure 6.7: Approche intégrale de von Karman pour le transfert de chaleur: volume de contrôle différentiel.

totale, H_0 :

$$E_{AB} = \left(\int_0^{\zeta} \rho u H_0 dy \right) \Big|_x, \quad (6.165)$$

$$\begin{aligned} E_{CD} &= \left(\int_0^{\zeta} \rho u H_0 dy \right) \Big|_{x+dx} \\ &= \left(\int_0^{\zeta} \rho u H_0 dy \right) \Big|_x + dx \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\zeta} \rho u H_0 dy \right) \Big|_x, \end{aligned} \quad (6.166)$$

$$E_{BD} = H_{0e} Q_{BD} = -H_{0e} dx \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\zeta} \rho u dy \right) \Big|_x. \quad (6.167)$$

L'apport reçu par le fluide provient de l'échange de chaleur avec la paroi:

$$E_{AC} = dx q_w \Big|_x. \quad (6.168)$$

Finalement, on obtient:

$$dx \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\zeta} \rho u H_0 dy \right) \Big|_x - H_{0e} dx \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\zeta} \rho u dy \right) \Big|_x = dx q_w \Big|_x. \quad (6.169)$$

On a aussi établi que, pour tout x :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\zeta} \rho u H_0 dy \right) &= H_{0e} \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\zeta} \rho u dy \right) + q_w, \\ &= \frac{d}{dx} \left(H_{0e} \int_0^{\zeta} \rho u dy \right) + q_w. \end{aligned} \quad (6.170)$$

où la seconde égalité provient du fait que l'enthalpie H_{0e} est conservé en dehors de la couche limite: $dH_{0e}/dx = 0$. Finalement, il vient:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^\zeta \rho u (H_0 - H_{0e}) dy \right) = q_w . \quad (6.171)$$

L'épaisseur d'enthalpie totale est définie par (rappel: $H_{0w} = H_w$ puisque $u_w = 0$):

$$\begin{aligned} \theta_{H_0} &= \int_0^\zeta \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{H_0 - H_w}{H_{0e} - H_w} \right) dy = \int_0^\zeta \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(\frac{H_{0e} - H_0}{H_{0e} - H_w} \right) dy \\ &= \int_0^\zeta \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(\frac{H_0 - H_{0e}}{H_w - H_{0e}} \right) dy . \end{aligned} \quad (6.172)$$

L'équation intégrale de l'énergie est donc finalement écrite sous la forme:

$$\frac{d}{dx} (\rho_e u_e (H_w - H_{0e}) \theta_{H_0}) = q_w \quad (6.173)$$

dont la forme adimensionnelle est:

$$\frac{d\theta_{H_0}}{dx} + \left(\frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{(H_w - H_{0e})} \frac{dH_w}{dx} \right) \theta_{H_0} = \frac{q_w}{\rho_e u_e (H_w - H_{0e})} = St \quad (6.174)$$

avec la définition classique du nombre de Stanton.

Le cas des écoulements incompressibles est obtenu en prenant $\rho_e = \rho$ uniforme et en remplaçant, dans l'analyse de bilan ci-avant, l'enthalpie totale par l'énergie interne totale: $U_0 = U + u^2/2$. Si on définit l'épaisseur d'énergie interne totale par la relation:

$$\theta_{U_0} = \int_0^\zeta \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{U_0 - U_w}{U_{0e} - U_w} \right) dy = \int_0^\zeta \frac{u}{u_e} \left(\frac{U_0 - U_{0e}}{U_w - U_{0e}} \right) dy , \quad (6.175)$$

on obtient, comme équation intégrale, l'équation:

$$\rho \frac{d}{dx} (u_e (U_w - U_{0e}) \theta_{U_0}) = q_w \quad (6.176)$$

dont la forme adimensionnelle est:

$$\frac{d\theta_{U_0}}{dx} + \left(\frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{(U_w - U_{0e})} \frac{dU_w}{dx} \right) \theta_{U_0} = \frac{q_w}{\rho u_e (U_w - U_{0e})} = St . \quad (6.177)$$

De nouveau, le membre de droite est le nombre de Stanton classique.

Vérifions que l'équation intégrale de l'énergie est en accord avec les résultats précédents dans le cas simple de la couche limite d'un fluide incompressible à grandeurs constantes et avec u_e et T_w constants. L'équation intégrale de l'énergie se réduit alors à $d\theta_{U_0}/dx = St$: le taux d'augmentation de l'épaisseur d'énergie interne totale est donc directement proportionnel au coefficient de transfert de chaleur. Cette équation est semblable à l'équation

intégrale de quantité de mouvement, $d\theta/dx = C_f/2$. Jusque-là, ces résultats de l'analyse par approche intégrale sont valables pour tout Pr .

Considérons maintenant le cas $Pr = 1$. De par la relation exacte de Crocco, il vient:

$$\theta_{U_0} = \int_0^\zeta \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{U_0 - U_w}{U_{0e} - U_w} \right) dy = \int_0^\zeta \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy = \theta, \quad (6.178)$$

et donc $\theta_{U_0} = \theta$: les épaisseurs de quantité de mouvement et d'énergie sont donc égales. On obtient finalement:

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta_{U_0}}{dx} = St, \quad (6.179)$$

et on retrouve le résultat exact développé précédemment: $C_f/2 = St$ lorsque $Pr = 1$.

Pour le cas $Pr \neq 1$, on a $\theta_{U_0} \neq \theta$. L'analogie de Reynolds suppose alors d'avoir:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2} \approx Pr^{2/3} St = Pr^{2/3} \frac{d\theta_{U_0}}{dx}, \quad (6.180)$$

ou encore:

$$\theta \approx Pr^{2/3} \theta_{U_0}. \quad (6.181)$$

Chapitre 7

Transfert de masse

Dès qu'une substance chimique n'est pas uniformément répartie dans l'espace, il y a apparition d'un *transfert de masse*, de manière analogue au transfert de chaleur dans un système qui n'est pas isotherme.

Par exemple, lorsque de l'air atmosphérique (non saturé de vapeur d'eau) est en écoulement au voisinage d'eau, la mince couche d'air localisée au voisinage de la surface libre de l'eau se sature en vapeur d'eau, et cette vapeur d'eau se propage au sein de l'air : c'est un transfert de masse. Il s'y superpose un transfert de quantité de mouvement du fait de l'écart de vitesse entre les deux fluides, ainsi qu'un transfert de chaleur si le système n'est pas isotherme.

La teneur locale en vapeur d'eau peut être exprimée par la concentration massique locale ρ_V et la migration pourra être reliée au gradient local de concentration massique $\nabla\rho_V$. Cette relation est connue comme la loi de Fick.

Les problèmes à plusieurs phases sont extrêmement fréquents dans les applications : citons, en vrac, le cas des vapeurs, des émulsions, des suspensions, des mousses, des milieux poreux, des matériaux comme les polymères semi-cristallins où deux phases différentes coexistent, ou encore des milieux où des réactions chimiques entre constituants sont en cours.

7.1 Equations de continuité d'un mélange

7.1.1 Concepts de concentration, fraction et flux massiques

Dans un mélange à plusieurs constituants, les concentrations des diverses espèces peuvent être exprimées de multiples manières. Dans un premier temps, nous considérons la concentration massique ρ_I qui est la masse du constituant I par unité de volume et la fraction

massique $w_I = \rho_I/\rho$ qui est la concentration massique de l'espèce I divisée par la masse volumique du mélange. On en déduit immédiatement les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\sum_{I=1}^n \rho_I &= \rho, \\ \sum_{I=1}^n \frac{\rho_I}{\rho} &= 1.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Dans un mélange, les divers constituants peuvent a priori se déplacer à différentes vitesses \mathbf{v}_I . Dès lors, pour un mélange de n espèces, nous définissons la vitesse d'ensemble du fluide (bulk velocity) par l'expression

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \left(\sum_{I=1}^n \rho_I \mathbf{v}_I \right).\tag{7.2}$$

Il faut remarquer que $\rho \mathbf{v}$ est le taux local de passage de la masse au travers d'une section unitaire perpendiculaire au vecteur vitesse. Donc \mathbf{v} est la vitesse locale que l'on pourrait mesurer avec un tube de Pitot ou les techniques usuelles de l'anémométrie. Cette vitesse correspond donc à celle que nous avons introduite dans le cas de fluides purs. Notons que même si le mélange pris dans son ensemble est au repos ($\mathbf{v} = 0$), un transfert de masse peut s'effectuer. Il est dû à la différence entre la vitesse de chaque espèce et la vitesse d'ensemble ($\mathbf{v}_I - \mathbf{v}$), différence qui est appelée vitesse de diffusion de l'espèce I . Cette vitesse relative permet de définir la densité de flux de masse par diffusion

$$\mathbf{j}_I = \rho_I (\mathbf{v}_I - \mathbf{v}).\tag{7.3}$$

Pour chaque espèce, on peut écrire une équation locale de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho_I}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_I \mathbf{v}_I) = m_I,\tag{7.4}$$

où m_I est la densité de production de l'espèce I par réaction chimique ou changement de phase, par exemple (kg/m^3s). Si l'on récrit cette équation comme

$$\frac{\partial \rho_I}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_I \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\rho_I (\mathbf{v}_I - \mathbf{v})) + m_I,$$

on obtient, en tenant compte de la définition de la densité de flux de masse par diffusion, la forme usuelle de l'équation de continuité d'un constituant I :

$$\frac{\partial \rho_I}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_I \mathbf{v}) = -\nabla \cdot \mathbf{j}_I + m_I. \quad (7.5)$$

La somme des équations (7.5) relatives à toutes les espèces donne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underbrace{\left(\sum_{I=1}^n \rho_I \mathbf{v}_I \right)}_{\rho \mathbf{v}} = 0. \quad (7.6)$$

Le second membre est nul, qu'il y ait mobilité chimique ou non, puisque la masse totale doit être conservée. En tenant compte de la définition de la vitesse d'ensemble, on observe que l'on retrouve bien l'équation de la conservation locale de la masse (1.9.1) appliquée au mélange.

7.1.2 Concepts de concentration, fraction et flux molaires

Pour certaines applications, et en particulier pour les mélanges de gaz, il est d'usage de décrire la composition du mélange en termes de fractions et de concentrations molaires, et non plus en termes de fractions et de concentrations massiques.

Considérons donc maintenant la concentration molaire c_I qui est le nombre de moles du constituant I par unité de volume, et la fraction molaire $x_I = c_I/c$ qui est la concentration molaire de l'espèce I divisée par la concentration molaire du mélange. On a toujours les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{I=1}^n c_I &= c, \\ \sum_{I=1}^n \frac{c_I}{c} &= 1. \end{aligned} \quad (7.7)$$

De la même manière que nous avons défini la vitesse d'ensemble du fluide, nous définissons la vitesse d'ensemble molaire du fluide par l'expression

$$\mathbf{v}^* = \frac{1}{c} \left(\sum_{I=1}^n c_I \mathbf{v}_I \right). \quad (7.8)$$

Il faut maintenant remarquer que $c\mathbf{v}^*$ est le taux local de passage de moles au travers d'une section unitaire perpendiculaire au vecteur vitesse \mathbf{v}^* . La différence de la vitesse de

chaque espèce et de la vitesse d'ensemble molaire ($\mathbf{v}_I - \mathbf{v}^*$) est appelée vitesse de diffusion molaire de l'espèce I . Ce qui nous conduit naturellement à définir la densité de flux de moles par diffusion par

$$\mathbf{j}_I^* = c_I(\mathbf{v}_I - \mathbf{v}^*). \quad (7.9)$$

Si on désigne par M_I la masse molaire du constituant I et par M la masse molaire du mélange, on peut aisément lier la concentration et la fraction molaire à leur équivalent massique

$$\begin{aligned} c_I &= \frac{\rho_I}{M_I}, \\ c &= \frac{\rho}{M}, \\ x_I &= \frac{M w_I}{M_I}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Pour chaque espèce, une équation de continuité pour la concentration molaire peut être obtenue

$$\frac{\partial c_I}{\partial t} + \nabla \cdot (c_I \mathbf{v}^*) = -\nabla \cdot \mathbf{j}_I^* + \frac{m_I}{M_I}. \quad (7.11)$$

La somme des équations (7.11) fournit une équation de continuité pour la concentration molaire du mélange

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c \mathbf{v}^*) = \sum_{I=1}^n \frac{m_I}{M_I}. \quad (7.12)$$

Le second membre n'est pas nul, car en général, les nombres de moles ne sont pas conservés.

7.2 Loi de Fick

Pour introduire la loi de Fick, nous allons nous restreindre à des mélanges binaires des espèces A et B . Cette restriction couvre la plupart des problèmes pratiques où l'on analyse la diffusion d'une espèce au sein du mélange. Dans un telle approche, un mélange

à plusieurs constituants peut être modélisé comme un mélange binaire où A est l'espèce dont on souhaite étudier la diffusion et B représente toutes les autres espèces du mélange.

De la même manière que la loi de Fourier suppose que le flux de chaleur est régi par le gradient de la température, la *loi de Fick* suppose que le flux diffusif de masse est proportionnel au gradient de concentration

$$\mathbf{j}_A = -\rho D_{AB} \nabla \left(\frac{\rho_A}{\rho} \right), \quad (7.13)$$

où D_{AB} est le coefficient de diffusion de l'espèce A par rapport à B . Le coefficient de diffusion caractérise non seulement l'espèce A , mais aussi le mélange dans lequel il diffuse. Dans le cas d'un mélange binaire, les deux coefficients de diffusion D_{AB} et D_{BA} doivent être égaux et sont connus comme coefficients de diffusion mutuels. Précisons d'emblée que la loi de Fick sous cette forme n'est théoriquement valable que dans un écoulement supposé isotherme et isobare : ce qui est rarement le cas en pratique. Toutefois, elle est souvent utilisée sous cette forme comme une bonne approximation dans de nombreuses applications.

En termes de flux et concentration molaires, la loi de Fick s'énonce sous la forme

$$\mathbf{j}_A^* = -c D_{AB} \nabla \left(\frac{c_A}{c} \right), \quad (7.14)$$

où D_{AB} est le même coefficient de diffusion que celui utilisé dans l'équation (7.13). Pour démontrer l'équivalence des équations (7.13) et (7.14), il suffit de remarquer, suite à de longs calculs, d'une part que

$$\begin{aligned} \frac{c_A}{c} &= \frac{\rho_A}{\rho} \frac{M}{M_A} \\ &= \frac{\rho_A}{\rho} \frac{1}{\left(\frac{\rho_A}{\rho M_A} + \frac{\rho_B}{\rho M_B} \right) M_A} \\ &= \frac{\rho_A}{\rho} \frac{1}{\left(\frac{\rho_A}{\rho M_A} + \frac{\rho - \rho_A}{\rho M_B} \right) M_A} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{M_A}{M_B} \left(\frac{\rho}{\rho_A} - 1 \right) \right)}, \end{aligned}$$

et donc que

$$d\left(\frac{c_A}{c}\right) = d\left(\frac{\rho_A}{\rho}\right)\frac{M^2}{M_A M_B}.$$

D'autre part, on remarque que

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_A^* &= c_A(\mathbf{v}_A - \mathbf{v}) - c_A(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}) \\ &= c_A(\mathbf{v}_A - \mathbf{v}) - c_A\left(\frac{\mathbf{v}_A c_A + \mathbf{v}_B c_B}{c} + \frac{\mathbf{v} c_A + \mathbf{v} c_B}{c}\right) \\ &= \frac{\mathbf{j}_A}{M_A} - \frac{c_A}{c}\left(\frac{\mathbf{j}_A}{M_A} + \frac{\mathbf{j}_B}{M_B}\right) \\ &= \frac{\mathbf{j}_A}{M_A} - \frac{c_A}{c}\left(1 - \frac{M_A}{M_B}\right)\frac{\mathbf{j}_A}{M_A} \\ &= \frac{\mathbf{j}_A M}{M_A M_B}. \end{aligned}$$

L'équivalence entre les relations (7.13) et (7.14) découle immédiatement alors du fait que $cM = \rho$.

Les valeurs de D_{AB} sont bien connues pour des mélanges binaires, mais sont extrêmement difficiles à obtenir pour les mélanges à plus de deux composants. Afin de montrer les ordres de grandeurs, nous donnons ci-dessous les coefficients de diffusion de mélanges binaires gazeux usuels à température ambiante et à pression atmosphérique.

Mélange	$10^5 D_{AB} (m^2/s)$
air-ammoniac	2.8
air-dioxyde de carbone	1.4
air-vapeur d'eau	2.6
hydrogène-azote	7.8

(D'après A. Bejan, Heat transfer, Wiley, 93)

Dans le cas de mélanges binaires de gaz, les coefficients mutuels de diffusion ne dépendent pas de la concentration dans les conditions usuelles.

Les coefficients de diffusion de masse des liquides sont généralement 10^4 à 10^5 plus petits que les coefficients des mélanges gazeux. Dans les mélanges binaires de liquides, le coefficient de diffusion est une fonction de la concentration (contrairement aux mélanges binaires gazeux). Toutefois, la dépendance du coefficient de diffusion par rapport à la composition du mélange devient négligeable dans la limite d'une dilution presque parfaite, quand on n'incorpore que de petites quantités d'un constituant (le soluté) dans la seconde espèce (le solvant). Quelques coefficients de diffusion du soluté pour des solutions diluées usuelles à température ambiante sont donnés ci-dessous, à titre d'exemple.

Soluté-solvant	$10^9 D_{AB} (m^2/s)$
air-eau	2.5
dioxyde de carbone-eau	1.9
ethanol-eau	0.84
hydrogène-eau	4.5

(D'après A. Bejan, Heat transfer, Wiley, 93)

En substituant la loi de Fick (7.13) dans (7.5) ou (7.14) dans (7.11), on obtient finalement les équations d'évolution pour les concentrations massiques ou molaires de chaque espèce

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_I}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_I \mathbf{v}) &= \nabla \cdot (\rho D_{AB} \nabla (\frac{\rho_I}{\rho})) + m_I, & I=A,B, \\ \frac{\partial c_I}{\partial t} + \nabla \cdot (c_I \mathbf{v}^*) &= \nabla \cdot (c D_{AB} \nabla (\frac{c_I}{c})) + \frac{m_I}{M_I}, & I=A,B. \end{aligned} \quad (7.15)$$

7.2.1 Modèle du mélange binaire visqueux

Si nous considérons le cas de mélanges dans l'approche globale de la mécanique des milieux continus, tout comme nous l'avons fait pour un fluide pur, la modélisation d'un mélange binaire est obtenue par l'écriture de lois de conservation et de lois de constitution pour le tenseur des extra-tensions, le flux de chaleur et le flux de diffusion de masse. Les lois de

conservation d'un mélange binaire peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_I}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_I \mathbf{v}) &= -\nabla \cdot \mathbf{j}_I + m_I, & I=A,B, \\
\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) &= -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho_A \mathbf{g}_A + \rho_B \mathbf{g}_B, \\
\frac{\partial(\rho H)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} H) &= \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} + \mathbf{j}_A \cdot \mathbf{g}_A + \mathbf{j}_B \cdot \mathbf{g}_B,
\end{aligned} \tag{7.16}$$

L'équation de continuité du mélange qui est la somme des équations de continuité des espèces ne peut pas être considérée comme une relation de conservation indépendante pour le mélange. L'équation d'énergie peut être écrite de multiples manières pour un fluide pur. Il en est de même pour un mélange.

Le système (7.16) comprend 6 équations et 13 inconnues, si on considère les forces à distance, les apports volumiques d'énergie et les termes de production des espèces comme des données du problème. Pour considérer des problèmes mettant en jeu des réactions chimiques, il faudra donc fournir un modèle décrivant la production et la disparition des espèces ainsi que l'extraction ou la production d'énergie liée à la réaction chimique. Ceci nous amène dans le domaine de la cinétique chimique qui décrit les mécanismes des réactions chimiques et les vitesses auxquelles elles se réalisent. Dans ce chapitre, nous supposons que les mécanismes des réactions sont connus et peuvent être décrits en termes de fonctions simples des fractions massiques des espèces du mélange, de la pression et de la température.

Les équations de constitution d'un mélange peuvent être très complexes. Jusqu'à présent, la discussion sur les flux de masse et les concentrations massiques a été fortement simplifiée en nous limitant au cas à pression et à température constantes. Certes, il est vrai que la plus importante contribution au flux de masse est le résultat d'un gradient de concentration. Cependant, il est également connu que même dans un système isotherme, il existe trois effets mécaniques qui tendent à provoquer le mouvement d'une espèce par rapport à l'écoulement moyen : le gradient de concentration, des forces de volumes distinctes pour chaque espèce, et un gradient de pression.

Les flux de quantité de mouvement, d'énergie et de masse sont en général liés à un gradient qui peut en être considéré comme en étant l'origine naturelle comme indiqué sur

la diagonale du tableau ci-dessous.

	$\nabla \mathbf{v}$	∇T	$\nabla \frac{\rho_A}{\rho}$ ∇p $(\mathbf{g}_A - \mathbf{g}_B)$
$\boldsymbol{\tau}$	fluide newtonien $\mu \quad \kappa$		
\mathbf{q}		loi de Fourier k	effet Dufour D_{AB}^T
\mathbf{j}_A		effet Soret D_{AB}^T	loi de Fick D_{AB}

(D'après R.B. Bird, Transport Phenomena, Wiley, 60)

Toutefois, cela n'est pas aussi simple. En accord avec la thermodynamique des processus irréversibles, il peut exister un couplage entre chaque flux et chaque origine si les tenseurs sont d'un même ordre (ou ont une différence d'ordre égale à deux). En conséquence, le flux de quantité de mouvement ne peut dépendre que du gradient de vitesse. Le flux de chaleur dépend du gradient de température (conduction thermique) et des origines mécaniques (gradient de concentration, forces de volumes distinctes, gradient de pression). Le couplage entre gradient de concentration et flux de chaleur est connu comme l'effet Dufour. Le flux de masse dépend des origines mécaniques et du gradient de température. Le couplage entre gradient de température et flux de masse est connu comme l'effet Soret. En outre, la thermodynamique des processus irréversibles requiert que les effets Soret et Dufour soient décrits par le même paramètre matériel D_{AB}^T qui est appelé coefficient de Soret ou de diffusion thermo-massique. Ceci doit être réalisé dans les unités adéquates : ce qui explique que les ordres de grandeurs de deux effets ne sont pas semblables.

L'expression du flux de chaleur dans un mélange binaire contiendra donc le terme usuel de conduction thermique, mais également un terme reprenant le transfert de chaleur provoqué par l'interdiffusion des espèces. Il faudrait encore ajouter un terme additionnel lié au flux de chaleur par effet Dufour. Toutefois, l'expression de ce flux est complexe et il est en général négligeable.

L'expression du flux de masse se composera d'un terme proportionnel au gradient de concentration. Il contiendra également un terme proportionnel au gradient de pression, car il peut y avoir une diffusion entre les espèces due à l'imposition d'un gradient de pression sur le système. La tendance pour un mélange à se séparer sous l'effet de la pression est très faible, mais cet effet peut exister dans des séparations centrifuges où de très grands gradients de pression sont établis. L'expression du flux contiendra aussi un terme proportionnel à la différence des forces de volume agissant sur chaque espèce. C'est la diffusion forcée qui est fondamentale dans les systèmes ioniques, dans lesquels la force extérieure sur un ion est proportionnelle à la charge ionique et l'intensité du champ électrique. Si la gravité est l'unique force de volume, alors ce terme disparaît. La diffusion thermique des espèces ou effet Soret décrira la tendance d'une espèce à diffuser sous l'effet d'un gradient de température. A nouveau, cet effet est très faible, mais la mise au point de systèmes exhibant des gradients de température très raides permet de réaliser la séparation de cette manière.

Pour un mélange binaire visqueux, les équations de comportement pour le tenseur de Cauchy, le flux de chaleur et les flux de masse peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} &= -p\boldsymbol{\delta} + 3\kappa\mathbf{d}^s + 2\mu\mathbf{d}^d, \\
 \mathbf{q} &= -k\nabla T + \mathbf{j}_A \left. \frac{\partial H}{\partial w_A} \right|_{T,p} + \mathbf{j}_B \left. \frac{\partial H}{\partial w_B} \right|_{T,p} + \dots, \\
 \mathbf{j}_A &= -D_{AB}\rho \left[\nabla \left(\frac{\rho_A}{\rho} \right) - \frac{\rho_A \rho_B}{\rho p} (\mathbf{g}_A - \mathbf{g}_B) + \frac{(\rho - \rho_A)}{\rho p} \nabla p \right] \\
 &\quad - D_{AB}^T \nabla \log(T), \\
 \mathbf{j}_B &= -\mathbf{j}_A,
 \end{aligned} \tag{7.17}$$

où nous ne supposons plus que l'écoulement soit isotherme et isobare. Par contre, nous avons négligé tout effet de mobilité chimique. La contribution de l'effet Dufour a été volontairement omise dans (7.17) et remplacée par ... , car elle est de nature complexe et presque toujours négligeable. Les coefficients de viscosité, la masse volumique, le coefficient de diffusion ordinaire D_{AB} , le coefficient de Soret D_{AB}^T , ainsi que l'enthalpie et l'entropie massiques doivent être considérés comme des fonctions de la pression, de la température et de la fraction massique. Ce que l'on peut écrire de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\rho &= \hat{\rho}(p, T, w_A), \\
\kappa &= \hat{\kappa}(p, T, w_A), \\
\mu &= \hat{\mu}(p, T, w_A), \\
k &= \hat{k}(p, T, w_A), \\
D_{AB} &= \hat{D}_{AB}(p, T, w_A), \\
D_{AB}^T &= \hat{D}_{AB}^T(p, T, w_A), \\
H &= \hat{H}(p, T, w_A), \\
S &= \hat{S}(p, T, w_A).
\end{aligned}
\tag{7.18}$$

Il est ensuite possible d'obtenir une formulation en termes de pression, vitesse, température et concentration massique en suivant la procédure que nous avons suivie dans le cas d'un fluide pur.

7.2.2 Approximations usuelles

Les relations (7.15) décrivent les profils de concentration dans un mélange binaire en l'absence de diffusion thermique, de diffusion sous l'action de la pression ou de diffusion forcée. Souvent, on introduit en outre soit une hypothèse d'écoulement incompressible, soit une hypothèse de densité molaire constante, ou encore un coefficient de diffusion constant.

Hypothèse de ρ et D constants

Avec le cas d'un écoulement incompressible à coefficient de diffusion constant, l'équation (7.15.1) devient

$$\frac{D\rho_A}{Dt} = D\nabla \cdot \nabla \rho_A + m_A.
\tag{7.19}$$

Cette équation est généralement utilisée pour la diffusion de solutions liquides diluées à température et pression constantes.

Hypothèse de c et D constants

Dans ce cas, l'équation (7.15.2) devient

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \nabla \cdot (c_A \mathbf{v}^*) = D \nabla \cdot \nabla C_A + \frac{m_A}{M_A}, \quad (7.20)$$

tandis que l'équation (7.12) devient

$$c \nabla \cdot \mathbf{v}^* = \frac{m_A}{M_A} + \frac{m_B}{M_B}. \quad (7.21)$$

En combinant (7.20) et (7.21), on obtient

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla) c_A = D \nabla \cdot \nabla C_A + \frac{m_A}{M_A} - \frac{c_A}{c} \left(\frac{m_A}{M_A} + \frac{m_B}{M_B} \right). \quad (7.22)$$

Cette équation est en général utilisée pour des gaz à basse densité, à température et pression constantes. Le membre de gauche de cette équation ne peut être écrit comme la dérivée matérielle de la concentration, à cause de la présence de la vitesse d'ensemble molaire et non de la vitesse d'ensemble.

Mélange binaire au repos

Le cas le plus simple reste encore à mentionner. Lorsqu'il n'y a pas de réactions chimiques ($m_A = m_B = 0$) et lorsque \mathbf{v} vaut zéro dans (7.15.1) ou \mathbf{v}^* vaut zéro dans (7.15.2), on obtient alors

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D \nabla \cdot \nabla C_A. \quad (7.23)$$

Cette relation est parfois appelée la seconde loi de Fick ou plus fréquemment l'équation de la diffusion. Cette équation est en général utilisée pour les solides ou les liquides au repos ($\mathbf{v} = 0$) ou pour la diffusion équimolaire dans le cas de gaz ($\mathbf{v}^* = 0$). On entend par diffusion équimolaire que le flux total de moles est nul.

7.2.3 Analogie dans les phénomènes de transport

Il est remarquable d'observer l'analogie entre le transfert de masse, le transfert de chaleur et dans une moindre mesure le transfert de quantité de mouvement.

Afin de mettre mieux en valeur l'analogie, supposons que tous les paramètres matériels (viscosité, masse volumique, chaleur massique, coefficient de diffusion des espèces) soient

des constantes. Ecrivons ensuite l'équation de la concentration massique d'une espèce I , l'équation de la chaleur et l'équation de conservation de la quantité de mouvement d'un écoulement incompressible de fluide newtonien à viscosité et à chaleur massique constante :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho_I}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_I \mathbf{v}) &= D \nabla \cdot (\nabla \rho_I) + m_I, \\
 \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T \mathbf{v}) \right) &= k \nabla \cdot (\nabla T) + r, \\
 \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) \right) &= -\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g}.
 \end{aligned} \tag{7.24}$$

Au même titre que le nombre de Prandtl Pr caractérise un fluide par le rapport entre la viscosité cinématique et le coefficient de diffusivité thermique, le nombre de Schmidt Sc caractérise un fluide par le rapport entre la viscosité cinématique et le coefficient de diffusion de masse d'une espèce.

$$\begin{aligned}
 Pr &= \frac{\nu}{\alpha}, \\
 Sc &= \frac{\nu}{D}.
 \end{aligned} \tag{7.25}$$

7.3 Diffusion dans un gaz stagnant

Considérons le système de diffusion représenté sur la figure 7.1. Un liquide A s'évapore dans un gaz B et nous pouvons imaginer que le niveau du liquide est maintenu constant à la hauteur $z = 0$. A l'interface liquide-gaz, la concentration de A est exprimée comme la fraction molaire x_{A0} . Cette valeur est la concentration de gaz A correspondant à l'équilibre avec le liquide à l'interface. Dans le cas de gaz idéaux, la fraction molaire x_{A0} est alors égale au rapport entre la pression de vaporisation de A divisée par la pression ambiante. Nous supposons en outre que la diffusion de B dans le liquide A est négligeable.

Au sommet de la colonne de hauteur L , un mélange de gaz $A + B$ de concentration x_{AL} s'écoule lentement. Le système entier est supposé, en outre, être maintenu à pression et à température constantes. Les deux gaz sont supposés idéaux. Lorsque le système atteint un régime permanent, il n'y a plus qu'un mouvement de A à partir de la surface d'évaporation et le gaz B est immobile. Dès lors, l'équation de continuité de l'espèce A devient :

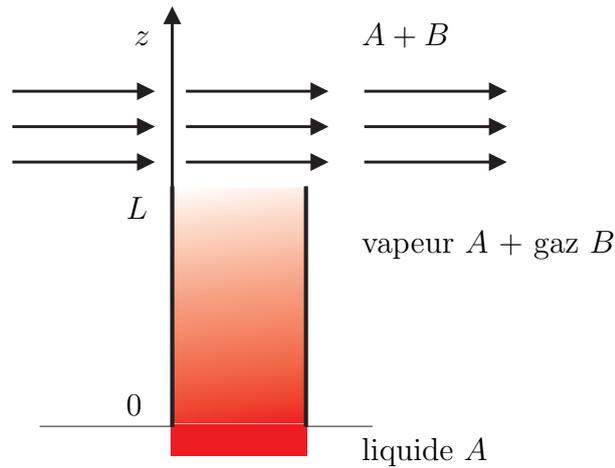


Figure 7.1: Diffusion en régime d'une vapeur A au travers d'un gaz B . Le gaz B est immobile.

$$\frac{d}{dz}(v\rho_A) = -\frac{d}{dz}(j_A). \quad (7.26)$$

Hypothèse de v , ρ et D constants

Si l'on suppose que le gaz B est immobile, on ne peut pas supposer simultanément que la vitesse d'ensemble du mélange $v = \rho_A v_A / \rho$ est également nulle, si la vapeur A est en mouvement. Par contre, on peut considérer que les termes de transport de cette équation sont petits par rapport au terme de diffusion, et approximer l'équation (7.26) par l'expression

$$\frac{d}{dz}(j_A) = 0. \quad (7.27)$$

C'est exactement le même type d'approximation que celle que l'on applique sur les équations de Navier-Stokes, lorsqu'on les remplace par le problème de Stokes dans le cas des écoulements rampants. La validité d'une telle approximation dépend naturellement de la valeur du coefficient de diffusion massique.

Si on suppose que la masse volumique du mélange et le coefficient de diffusion sont constants, l'injection de la loi de Fick dans (7.27) permet d'écrire

$$\frac{d^2 \rho_A}{dz^2} = 0. \quad (7.28)$$

Les conditions aux limites peuvent être écrites comme

- en $z = 0$, $\rho_A = \rho_{A0}$,
- en $z = L$, $\rho_A = \rho_{AL}$.

La solution se trouve immédiatement

$$\rho_A = \frac{\rho_{AL} - \rho_{A0}}{L}z + \rho_{A0}, \quad (7.29)$$

la densité de flux de masse de vapeur d'eau vaut

$$j_A = -D \frac{\rho_{AL} - \rho_{A0}}{L}. \quad (7.30)$$

Dans les expressions (7.29) et (7.30), on constate que les profils de ρ_A et de la densité de flux j_A présentent des formes analogues aux profils (3.8) et (3.9) pour la conduction de la chaleur à travers une paroi plane.

La solution (7.29) n'est qu'une approximation relativement grossière, puisque l'on a négligé le terme de transport de l'équation de continuité.

Hypothèse de ρ et D constants

D'une part, l'équation (7.6) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dz}(\rho_A v_A) = 0. \quad (7.31)$$

D'autre part, on peut extraire une expression de $\rho_A v_A$ en terme du gradient de la fraction massique à partir de la forme unidimensionnelle de la loi de Fick comme suit :

$$\begin{aligned}
j_A &= -D\rho \frac{dw_A}{dz} \\
\rho_A v_A - \rho_A v &= -D\rho \frac{dw_A}{dz} \\
\rho_A v_A - \rho_A \left(\frac{\rho_A v_A + \rho_B v_B}{\rho} \right) &= -D\rho \frac{dw_A}{dz} \\
(1 - w_A)\rho_A v_A &= -D\rho \frac{dw_A}{dz} \\
\rho_A v_A &= -\frac{D\rho}{(1 - w_A)} \frac{dw_A}{dz}
\end{aligned}$$

En injectant cette expression dans (7.31), on obtient l'équation différentielle ordinaire à résoudre

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{D\rho}{(1 - w_A)} \frac{dw_A}{dz} \right) = 0. \quad (7.32)$$

En tirant profit du fait que la masse volumique du mélange et le coefficient de diffusion sont des constantes, on obtient la forme du profil de concentration

$$-\log(1 - w_A) = Az + B. \quad (7.33)$$

Les conditions aux limites peuvent être écrites comme

- en $z = 0$, $w_A = w_{A0}$,
- en $z = L$, $w_A = w_{AL}$.

La solution se trouve immédiatement

$$\left(\frac{1 - w_A}{1 - w_{A0}} \right) = \left(\frac{1 - w_{AL}}{1 - w_{A0}} \right)^{\frac{z}{L}}. \quad (7.34)$$

La solution (7.34) est toujours une approximation, car on a fait l'hypothèse d'une masse volumique constante du mélange selon la hauteur, ce qui n'est pas encore l'hypothèse adéquate pour l'exemple considéré. Pour des mélanges de gaz idéaux à pression et température constantes, c'est la concentration molaire du mélange qui peut être supposée constante : ce qui est une conséquence directe du fait que la pression est supposée constante.

Par contre, cette approximation peut se révéler être excellente dans le cas de mélanges de liquides, ou d'un gaz au sein d'un liquide.

Hypothèse de c et D constants

On peut effectuer un raisonnement exactement semblable au cas précédent et obtenir, en terme de fraction molaire, le problème suivant

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{Dc}{(1-x_A)} \frac{dx_A}{dz} \right) = 0. \quad (7.35)$$

En tirant profit du fait que la concentration du mélange et le coefficient de diffusion sont des constantes, on obtient la forme du profil de concentration

$$-\log(1-x_A) = Az + B. \quad (7.36)$$

Les conditions aux limites peuvent être écrites comme

- en $z = 0$, $x_A = x_{A0}$,
- en $z = L$, $x_A = x_{AL}$.

La solution se trouve immédiatement

$$\left(\frac{1-x_A}{1-x_{A0}} \right) = \left(\frac{1-x_{AL}}{1-x_{A0}} \right)^{\frac{z}{L}}. \quad (7.37)$$

Il est important de remarquer que supposer constante la concentration molaire ou supposer constant le volume massique du mélange n'est pas équivalent. On remarque que leur rapport vaut la masse molaire du mélange $M = x_A M_A + x_B M_B$ qui n'est pas une constante. En d'autres mots, les deux hypothèses sont incompatibles sauf si les deux composants du mélanges ont la même masse molaire.

Chapitre 8

Ecoulements turbulents

8.1 Transition vers la turbulence

La plupart des écoulements laminaires deviennent instables à partir d'une certaine valeur du paramètre adimensionnel qui les caractérise.

Par exemple, la couche limite laminaire avec vitesse externe, u_e , constante devient instable à certaines perturbations de faible amplitude à partir d'une certaine valeur (dite "critique") du nombre de Reynolds local, $Re_{\delta^*} = u_e \delta^* / \nu \approx 400$. On se rappelle aussi la relation entre Re_{δ^*} et le nombre de Reynolds global, Re_x :

$$Re_{\delta^*} = \frac{u_e \delta^*}{\nu} = 1.721 \frac{u_e x}{\nu} / \sqrt{\frac{u_e x}{\nu}} = 1.721 \sqrt{Re_x} \iff Re_x = 0.338 (Re_{\delta^*})^2. \quad (8.1)$$

La distance x le long de la plaque à partir de laquelle la couche limite devient instable correspond donc à $Re_x \approx 54,000$. L'instabilité apparaît comme une onde qui se propage en x et qui grandit exponentiellement en x : ce sont les ondes de "Tollmien-Schlichting" (ou ondes T-S) car ce sont Tollmien (1923) et Schlichting (1933) qui les ont étudiées en premier.

Si on considère plutôt un écoulement de Poiseuille plan (écoulement laminaire et établi entre deux plaques séparées par une distance d), on obtient, par analyse linéaire de stabilité, qu'il devient instable à partir de $Re_d = u_m d / \nu \geq 7,690$. Au nombre de Reynolds critique, le nombre d'onde, $k = 2\pi/\lambda$, du mode T-S instable est $k d = 2.04$; la longueur d'onde correspondante est donc grande en comparaison avec la distance entre les plaques: $\lambda = 3.08 d$.

On peut aussi considérer l'instabilité fondamentale des écoulements cisailés à grand nombre de Reynolds, appelée l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (K-H). C'est l'instabilité d'une couche séparant deux écoulements à vitesse relative différente, avec saut de vitesse ΔU . On peut également appliquer l'analyse linéaire de stabilité. Par exemple, si on

prend un modèle de profil de vitesse de la forme $\tanh(y/\delta)$, on obtient, dans le cas non-visqueux, que tous les modes dans la plage $0 \leq k\delta \leq 1$ sont instables. Le mode le plus instable (i.e., celui avec taux de croissance maximum) correspond à $k\delta \approx 0.44$; sa longueur d'onde est donc grande comparée à l'épaisseur caractéristique de la couche de cisaillement: $\lambda = 14.3\delta$. Si on inclut la contribution de la viscosité dans l'analyse de stabilité, on obtient alors que la contribution visqueuse est "stabilisante": la plage des modes instables se réduit à mesure que le nombre de Reynolds, $\Delta U \delta/\nu$, diminue. La valeur $k\delta$ du mode le plus instable varie aussi en fonction du nombre de Reynolds, et son taux de croissance diminue. En dessous d'un certain nombre de Reynolds, tous les modes sont stables.

La stabilité linéaire des écoulements permet de déterminer le début de l'instabilité d'un écoulement: elle ne permet pas de déterminer le développement subséquent de l'écoulement vers un écoulement "turbulent". Après l'amplification, initialement exponentielle, des petites perturbations, l'écoulement passe par une séquence fort complexe de changements. Le résultat final est un écoulement instationnaire, désordonné et persistant appelé "turbulence". La transition vers la turbulence est un sujet fort complexe qui dépasse largement ce cours et qui fait encore l'objet de recherches intensives.

8.2 Caractéristiques générales de la turbulence

La turbulence peut être caractérisée par les points suivants:

- *Fluctuations temporelles et spatiales de grande amplitude* de toutes les grandeurs physiques (composantes de vitesse, pression, etc.).
- *Structures tourbillonnaires* de tailles caractéristiques fort différentes, imbriqués les uns dans les autres, et interagissant entre eux. La taille des tourbillons constitue un spectre continu: cela va de grands tourbillons, d'une taille comparable à la grandeur caractéristique globale de l'écoulement (e.g. l'épaisseur de la couche limite), à des petits tourbillons, de taille correspondant à la "longueur de Kolmogorov", $\eta = (\nu^3/\bar{\epsilon})^{1/4}$ (où $\bar{\epsilon}$ est le taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence), et qui dissipent l'énergie mécanique en chaleur, par effets visqueux. Il n'existe donc pas de tourbillons beaucoup plus petits que η . Par exemple, en "simulation numérique directe" d'écoulements turbulents (i.e., des simulations où on capture correctement toutes les échelles, de la plus grande à la plus petite), on doit typiquement utiliser un maillage numérique de taille $h \approx \eta$ (on peut utiliser $h \approx 2\eta$ dans le cas des méthodes de très grande précision, telles les "méthodes spectrales").
- Chaque grandeur physique a un spectre d'énergie (i.e., spectre du carré de la fluctuation) qui est continu et qui tend vers zéro aux grands nombres d'ondes (i.e., aux plus petites échelles spatiales).

- *Persistence* de la turbulence. Une fois amorcé, un écoulement turbulent a tendance à se maintenir: il continue à produire des tourbillons pour remplacer ceux dissipés. C'est particulièrement vrai pour les écoulements turbulents avec paroi et pour les couches de cisaillement. Cette persistance n'est en rien reliée aux mécanismes d'instabilité des ondes T-S en écoulement laminaire.
- *Mélange*: le mélange en écoulement turbulent est beaucoup plus efficace que le mélange en écoulement laminaire (i.e., par diffusion moléculaire). Les tourbillons turbulents 3-D sont d'excellents promoteurs de mélange: ils causent donc des transferts rapides et efficaces de masse, de quantité de mouvement et d'énergie entre les différentes zones de l'écoulement turbulent. En conséquence, les transferts de chaleur et de masse sont aussi grandement augmentés par la turbulence, ce qui, bien sûr, a des implications et utilisations majeures en ingénierie. Finalement, le fluide d'une zone laminaire de l'écoulement est aussi entraîné efficacement par la zone turbulente (e.g., entraînement du fluide en dehors de la couche limite turbulente par celle-ci; entraînement du fluide en dehors de la couche de cisaillement turbulente par celle-ci).

8.3 Approche statistique de Reynolds

Pour la suite, nous considérons l'approche statistique de Reynolds pour la compréhension et modélisation des effets moyens de la turbulence. Considérons une grandeur physique $\phi(x, y, z, t)$ en écoulement turbulent complètement développé (e.g., une composante de vitesse, la pression, etc). Plaçons nous en un point fixe de l'espace: (x, y, z) fixé. "Mesurons" la grandeur, ϕ , en ce point. Le signal de mesure sera alors une fonction du temps, $\phi(t)$, avec des fluctuations rapides et de large amplitude, dues à la turbulence, voir Fig. 8.1.

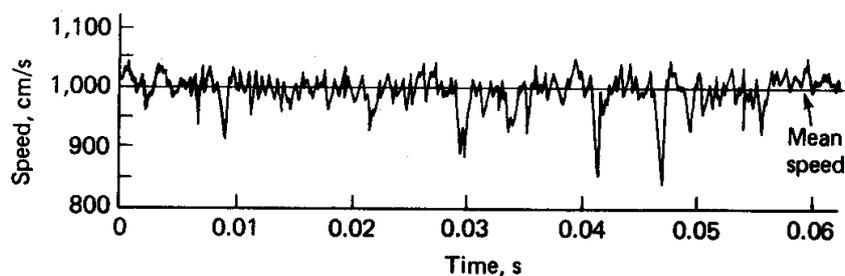


Figure 8.1: Mesures, au fil chaud, d'une composante de vitesse en un point d'un écoulement turbulent (figure tirée de *F. M. White, Viscous Fluid Flow, second ed., MacGraw-Hill*).

On suppose que la méthode de mesure est de qualité. On peut, bien sûr, faire la

moyenne temporelle du signal sur un temps, T , beaucoup plus long que le temps caractéristique, T_f , des fluctuations turbulentes significatives. Comme les fluctuations turbulentes n'ont pas un seul temps caractéristique mais plutôt un spectre continu, on prendra, pour T_f , le temps caractéristique correspondant aux fluctuations turbulentes les plus lentes. On utilisera alors, pour définir la moyenne:

$$\bar{\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \phi(t) dt \quad T \gg T_f . \quad (8.2)$$

Pour des écoulements "statistiquement stationnaires", cette procédure fournira la même valeur de $\bar{\phi}$ quel que soit le temps t_0 utilisé: c'est pour cela que nous avons écrit $\bar{\phi}$ et non $\bar{\phi}(t_0)$. Bien sûr, strictement parlant, il faudrait un temps T infini pour définir exactement la moyenne, i.e.:

$$\bar{\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \phi(t) dt . \quad (8.3)$$

Dans la pratique, il est clair que $T \gg T_f$ suffit amplement (par exemple T de l'ordre de 100 fois T_f).

On définit aussi la fluctuation, ϕ' , de toute grandeur physique comme la différence entre sa valeur instantanée et sa valeur moyenne:

$$\phi' \stackrel{\text{def}}{=} \phi - \bar{\phi} \quad \iff \quad \phi \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\phi} + \phi' . \quad (8.4)$$

Finalement, on définit la variance par:

$$\overline{\phi'^2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} (\phi'(t))^2 dt \quad T \gg T_f , \quad (8.5)$$

et l'écart-type moyen par sa racine:

$$\phi'_{rms} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\overline{\phi'^2}} . \quad (8.6)$$

On définit aussi la covariance de deux fonctions ϕ et ψ :

$$\overline{\phi' \psi'} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \phi'(t) \psi'(t) dt \quad T \gg T_f , \quad (8.7)$$

Les règles suivantes découlent alors des définitions:

$$\begin{aligned} \overline{\phi'} &= 0 , \\ \overline{\bar{\phi}} &= \bar{\phi} , \\ \overline{\bar{\phi} \bar{\psi}} &= \bar{\phi} \bar{\psi} , \\ \overline{\phi' \bar{\psi}} &= 0 , \\ \overline{\bar{\phi} + \psi} &= \bar{\phi} + \bar{\psi} , \\ \overline{\bar{\phi} \psi} &= \bar{\phi} \bar{\psi} + \overline{\phi' \psi'} . \end{aligned} \quad (8.8)$$

L'avantage de la définition Eq. (8.2) est qu'elle permet aussi de considérer des écoulements turbulents dont la "moyenne temporelle" dépend lentement du temps: des écoulements qui ne sont pas "statistiquement stationnaires". Plus spécifiquement, soit un écoulement turbulent avec des fluctuations turbulentes de temps caractéristique T_f et des variations beaucoup plus lentes, de temps caractéristique T_v . On suppose aussi que ces échelles de temps sont très différentes: $T_f \ll T_v$. Si on utilise alors, comme temps de moyenne, $T_f \ll T \ll T_v$, on pourra définir, comme valeur moyenne,

$$\bar{\phi}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \phi(\tau) d\tau \quad T_v \gg T \gg T_f, \quad (8.9)$$

moyenne qui varie lentement dans le temps, avec un temps caractéristique T_v . Ce concept sera utilisé dans la suite, lorsque nous présenterons les équations utilisées en turbulence.

8.4 Equations moyennées de Reynolds

Un écoulement turbulent d'un fluide visqueux newtonien satisfait, bien sûr, les équations de Navier-Stokes. Pour la suite, on considère uniquement (aussi pour simplifier) le cas des écoulements incompressibles. Les équations de conservation sont alors, en notation indicielle:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (8.10)$$

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (8.11)$$

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho c \frac{DT}{Dt} = \Phi - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}, \quad (8.12)$$

avec, pour le tenseur des contraintes visqueuses:

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij}, \quad (8.13)$$

et donc, pour la fonction de dissipation,

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{ij} d_{ij} = 2\mu d_{ij} d_{ij}. \quad (8.14)$$

Pour le flux de chaleur, on a:

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (8.15)$$

Considérons, de plus, que le fluide a des propriétés physiques constantes (ou que les variations de température sont telles qu'on peut négliger la variation des propriétés du fluide).

Pour toute grandeur physique ϕ , on peut aussi écrire, du fait de l'incompressibilité,

$$\frac{D\phi}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial\phi}{\partial t} + v_j \frac{\partial\phi}{\partial x_j} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi v_j) . \quad (8.16)$$

Appliquons alors l'opérateur de moyenne temporelle aux équations de conservation. Clairement, les opérateurs de moyenne et de dérivation spatiale commutent:

$$\overline{\frac{\partial\phi}{\partial x_i}} = \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_i} . \quad (8.17)$$

Pour des écoulements avec moyenne variant lentement dans le temps, on suppose que les opérateurs de moyenne et de dérivation temporelle commutent aussi:

$$\overline{\frac{\partial\phi}{\partial t}} = \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t} . \quad (8.18)$$

On obtient alors les équations de conservation pour la moyenne des grandeurs physiques:

$$\frac{\partial\bar{v}_j}{\partial x_j} = 0 , \quad (8.19)$$

$$\rho \left[\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_i \bar{v}_j + \overline{v'_i v'_j}) \right] = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial\bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} , \quad (8.20)$$

$$\rho c \left[\frac{\partial\bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{T} \bar{v}_j + \overline{T' v'_j}) \right] = \bar{\Phi} - \frac{\partial\bar{q}_j}{\partial x_j} , \quad (8.21)$$

avec

$$\bar{\tau}_{ij} = 2 \mu \bar{d}_{ij} , \quad (8.22)$$

$$\bar{\Phi} = \tau_{ij} \overline{d_{ij}} = 2 \mu \overline{d_{ij} d_{ij}} = 2 \mu (\overline{d_{ij} d_{ij}} + \overline{d'_{ij} d'_{ij}}) , \quad (8.23)$$

$$\bar{q}_j = -k \frac{\partial\bar{T}}{\partial x_j} . \quad (8.24)$$

L'écoulement moyen est donc, lui aussi, incompressible. Si on définit la “dérivée matérielle moyenne” (i.e., celle en se déplaçant à la vitesse moyenne) par:

$$\frac{\bar{D}\bar{\phi}}{\bar{D}t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_j} = \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\phi} \bar{v}_j) , \quad (8.25)$$

on obtient que l'équation de quantité de mouvement se réduit à:

$$\rho \frac{\bar{D}\bar{v}_i}{\bar{D}t} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij}^t) , \quad (8.26)$$

avec un tenseur de contraintes effectives additionnelles dues à la turbulence:

$$\bar{\sigma}_{ij}^t \stackrel{\text{def}}{=} -\rho \overline{v'_i v'_j} . \quad (8.27)$$

C'est le "tenseur de Reynolds". L'équation de quantité de mouvement pour l'écoulement moyen est donc une équation classique, mais avec un terme additionnel de contraintes dues à la turbulence. La trace du tenseur de Reynolds est liée à l'énergie cinétique des fluctuations de turbulence, \bar{k} , (ou, de manière équivalente, à la vitesse caractéristique des fluctuations de turbulence, \bar{q}):

$$\bar{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{q}^2}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overline{v'_k v'_k}}{2} = -\frac{\bar{\sigma}_{kk}^t}{2\rho} \quad \Longrightarrow \quad \bar{\sigma}_{kk}^t = -2\rho\bar{k}. \quad (8.28)$$

On a donc toujours:

$$\bar{\sigma}_{ij}^t - \frac{1}{3}\bar{\sigma}_{kk}^t \delta_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}^t + \frac{2}{3}\rho\bar{k}\delta_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\tau}_{ij}^t. \quad (8.29)$$

Pour l'équation de l'énergie, on obtient:

$$\rho c \frac{D\bar{T}}{Dt} = \bar{\Phi} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{q}_j + \bar{q}_j^t), \quad (8.30)$$

avec un flux de chaleur effectif additionnel dû à la turbulence:

$$\bar{q}_j^t \stackrel{\text{def}}{=} \rho c \overline{T' v'_j}. \quad (8.31)$$

L'équation de température pour l'écoulement moyen est donc aussi une équation classique, mais avec un terme additionnel de flux de chaleur dû à la turbulence, et avec la complexité additionnelle que la dissipation effective est en fait la somme de deux termes:

$$\bar{\Phi} = 2\mu \overline{d_{ij} d_{ij}} = 2\mu (\overline{d_{ij} d_{ij}} + \overline{d'_{ij} d'_{ij}}). \quad (8.32)$$

Les contraintes additionnelles et le flux de chaleur additionnel, ainsi que la dissipation, dûs à la turbulence sont des termes qu'il faut modéliser. C'est là le grand problème de la "fermeture des équations" en turbulence. Les modèles les plus simples consistent en une fermeture de type "viscosité effective de turbulence": ce sont ceux là que nous allons considérer.

8.5 Modèles de fermeture de type "viscosité effective de turbulence"

Ces modèles utilisent, par analogie avec le modèle du fluide visqueux newtonien, une fermeture faisant appel à une viscosité effective de turbulence, μ_t (ou, ce qui revient au même $\nu_t = \mu_t/\rho$). La partie déviatoire du tenseur des contraintes de Reynolds est alors modélisé comme simplement proportionnel au tenseur des taux de déformation de l'écoulement moyen, le coefficient de proportionnalité étant la viscosité effective due à la turbulence:

$$\bar{\tau}_{ij}^t \stackrel{\text{mod}}{=} 2\mu_t \bar{d}_{ij}. \quad (8.33)$$

Il s'agit donc d'un modèle isotrope simple, du même type que le modèle moléculaire classique:

$$\bar{\tau}_{ij} = 2\mu\bar{d}_{ij}. \quad (8.34)$$

La contrainte effective totale est alors écrite comme:

$$\bar{\sigma}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij}^t = -\left(\bar{p} + \frac{2}{3}\rho\bar{k}\right)\delta_{ij} + 2(\mu + \mu_t)\bar{d}_{ij}, \quad (8.35)$$

le terme $\frac{2}{3}\rho\bar{k}$ constituant un terme de pression effective additionnelle à \bar{p} .

On modélise aussi la dissipation visqueuse due à la turbulence en utilisant μ_t :

$$2\mu\overline{d'_{ij}d'_{ij}} = 2\mu_t\bar{d}_{ij}\bar{d}_{ij}. \quad (8.36)$$

Le flux de chaleur effectif dû à la turbulence, \bar{q}_j^t , est aussi modélisé simplement, en le prenant proportionnel au gradient de température de l'écoulement moyen, le coefficient de proportionnalité étant la conductibilité thermique effective due à la turbulence, k_t :

$$\bar{q}_j^t \stackrel{\text{mod}}{=} -k_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}. \quad (8.37)$$

La conductibilité thermique effective, k_t , est elle-même liée à la viscosité dynamique effective, μ_t par un "nombre de Prandtl turbulent" effectif:

$$Pr_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu_t c}{k_t}. \quad (8.38)$$

Les modèles que nous allons considérer dans la suite s'attachent à modéliser le champ μ_t (variation dans l'espace et, éventuellement, dans le temps) et supposent que Pr_t est une constante (de l'ordre de l'unité: on trouve, dans la littérature, des valeurs de Pr_t de 0.6 à 1.0). Il en découle que le champ de k_t est totalement déterminé par le champ de μ_t :

$$k_t \stackrel{\text{mod}}{=} c \frac{\mu_t}{Pr_t} = \rho c \frac{\nu_t}{Pr_t} \implies \frac{k_t}{\rho c} \stackrel{\text{mod}}{=} \frac{\nu_t}{Pr_t}. \quad (8.39)$$

Avec ces modèles de fermeture simple, les équations moyennées deviennent:

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (8.40)$$

$$\frac{D\bar{v}_i}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{P} + \frac{2}{3}\bar{k} \right) + g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (2(\nu + \nu_t)\bar{d}_{ij}), \quad (8.41)$$

$$\frac{D\bar{T}}{Dt} = \frac{2(\nu + \nu_t)}{c} \bar{d}_{ij}\bar{d}_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right). \quad (8.42)$$

avec la notation classique pour la pression réduite, $\bar{P} = \bar{p}/\rho$. Clairement, on peut aussi définir une "pression effective de calcul", $\bar{P}^* = \bar{P} + \frac{2}{3}\bar{k}$, et se contenter de résoudre pour la grandeur \bar{P}^* , sans se soucier de la décomposer.

A noter aussi que le problème de la dynamique des fluides représenté par les équations ci-dessus (conservation de la masse et de la quantité de mouvement) est encore découplé du problème de la thermique des fluides: on peut s'attaquer à le résoudre sans résoudre le problème thermique. L'inverse n'est bien sûr pas vrai: la thermique des fluides dépend toujours de la dynamique des fluides.

Reste, bien sûr, le problème épineux de la modélisation de la viscosité effective de turbulence (μ_t ou ν_t)!

8.6 Écoulements turbulents en conduite ou en canal

Le cas des écoulements turbulents et établis en conduite ou en canal est certainement fondamental en ingénierie: perte de charge en conduite, transfert de chaleur.

On se souvient de la théorie cinétique des gaz: elle permet de déterminer la viscosité moléculaire d'un gaz à partir du libre parcours moyen des molécules, λ , et de la vitesse thermique d'agitation des molécules, v_{therm} (pour rappel, la vitesse du son, c , est aussi liée à cette vitesse). Le résultat est $\nu = C v_{\text{therm}} \lambda$ avec C une constante. Le modèle de fermeture pour ν_t doit se baser sur l'analyse dimensionnelle et être calculable en termes de grandeurs moyennes. Nous considérons ici l'approche proposée par von Karman (1930) et Prandtl (1933).

8.6.1 Généralités pour les écoulements turbulents établis en conduite ou en canal

Considérons tout d'abord un écoulement turbulent permanent et établi en conduite de section circulaire de diamètre $D = 2R$, voir Fig. 8.2. La distance à la paroi est notée y . On s'intéresse au profil de vitesse moyen, $\bar{u}(y)$, avec $0 \leq y \leq R$. Le profil est symétrique par rapport au centre de la conduite, donc pas besoin de dépasser la valeur $y = R$ pour l'analyse. On a, bien sûr, que $y = R - r$ et donc $r = R - y$. La seule contrainte de cisaillement additionnelle due à la turbulence est $\bar{\tau}_{xy}^t(y) = -\rho \overline{u'v'}$ que nous noterons plus simplement $\bar{\tau}^t(y)$: elle est responsable de l'échange de quantité de mouvement moyen entre les couches successives de l'écoulement turbulent.

Avant même de s'intéresser au modèle de fermeture pour $\bar{\tau}^t(y)$, considérons, plus simplement, le bilan de quantité de mouvement sur un volume de contrôle différentiel de longueur dx et de rayon $r = R - y$, voir Fig. 8.2. L'écoulement étant établi, le flux de quantité de mouvement entrant en x est le même que le flux de quantité de mouvement sortant en $x + dx$. Il faut donc que la somme des forces qui s'exercent sur le volume de contrôle soit nulle. La pression effective en x est uniforme dans toute la section (car un écoulement établi ne peut supporter de gradient de pression transversal). La pression effective en $x + dx$ est aussi uniforme. La différence est $\bar{p}(x + dx) - \bar{p}(x) = \frac{d\bar{p}}{dx}(x) dx$. L'écoulement étant établi, le gradient de pression effective est constant: $\frac{d\bar{p}}{dx}$ est le même pour tous les x . D'ailleurs, lors d'expériences, on le détermine en mesurant la différence de pression effective sur une distance $L = x_2 - x_1$:

$$-\frac{d\bar{p}}{dx} = -\frac{(\bar{p}_2 - \bar{p}_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{\Delta\bar{p}}{L} > 0. \quad (8.43)$$

La contribution en x des forces de pression agissant sur le volume de contrôle est donc égale à $-\frac{d\bar{p}}{dx} dx \pi (R - y)^2$. La contrainte de cisaillement totale (moléculaire + turbulent), $\bar{\tau}(y) + \bar{\tau}^t(y)$, agit sur la surface $2\pi (R - y) dx$. La résultante en x est donc

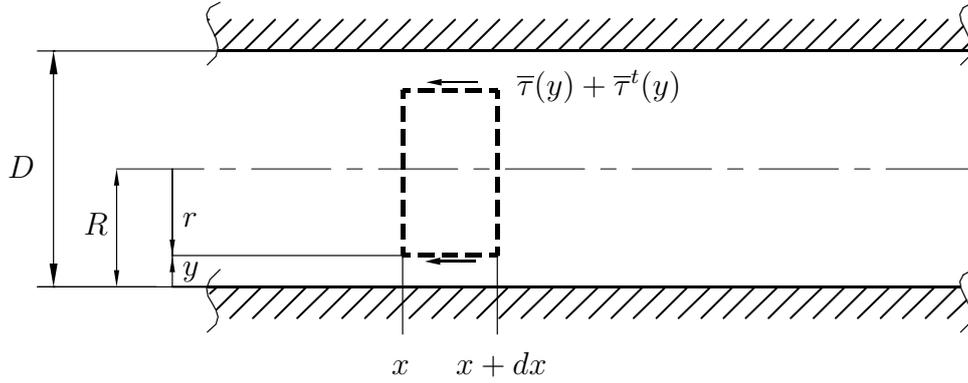


Figure 8.2: Ecoulement établi en conduite de section circulaire: volume de contrôle utilisé pour effectuer le bilan de quantité de mouvement.

$-(\bar{\tau}(y) + \bar{\tau}^t(y)) 2 \pi (R - y) dx$. Le bilan de quantité de mouvement donne donc finalement:

$$-(\bar{\tau}(y) + \bar{\tau}^t(y)) 2 \pi (R - y) dx - \frac{d\bar{p}}{dx} dx \pi (R - y)^2 = 0, \quad (8.44)$$

ce qui, en simplifiant, donne:

$$2 (\bar{\tau}(y) + \bar{\tau}^t(y)) = -\frac{d\bar{p}}{dx} (R - y). \quad (8.45)$$

Cette équation est fondamentale. Encore plus fondamentale est l'équation obtenue pour un volume de contrôle englobant tout le fluide: ce cas correspond à $r = R$ et donc à $y = 0$. La contrainte de cisaillement effective est alors la contrainte effective totale à la paroi, $\bar{\tau}_w$ (i.e., celle qui détermine les pertes de charges):

$$2 \bar{\tau}_w = -\frac{d\bar{p}}{dx} R. \quad (8.46)$$

En divisant les deux résultats ci-dessus, on obtient aussi que:

$$\bar{\tau}(y) + \bar{\tau}^t(y) = \bar{\tau}_w \left(1 - \frac{y}{R}\right). \quad (8.47)$$

Le profil de la contrainte moyenne totale (moléculaire + turbulent) est donc une ligne droite avec maximum à la paroi et zéro au centre de la conduite: aussi un résultat fondamental, voir Fig. 8.3.

En passant, on fait aussi le lien entre le coefficient de frottement pariétal, C_f , et le coefficient de perte de charges, λ . On se souvient d'abord de leur définition:

$$C_f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{\tau}_w}{\rho \bar{u}_m^2 / 2}, \quad (8.48)$$

et

$$-\frac{d\bar{p}}{dx} = \frac{\Delta\bar{p}}{L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\rho \bar{u}_m^2}{2} \lambda \frac{1}{D} \quad (8.49)$$

avec \bar{u}_m la vitesse de débit. On obtient donc que:

$$\begin{aligned} -\frac{d\bar{p}}{dx} &= \frac{\Delta\bar{p}}{L} = \bar{\tau}_w \frac{2}{R} = \bar{\tau}_w \frac{4}{D} \\ &= \frac{\rho \bar{u}_m^2}{2} \frac{\bar{\tau}_w}{\rho \bar{u}_m^2 / 2} \frac{4}{D} = \frac{\rho \bar{u}_m^2}{2} C_f \frac{4}{D}, \end{aligned} \quad (8.50)$$

et donc que $\lambda = 4 C_f$ pour un écoulement en conduite de section circulaire.

Le même type d'analyse que ci-dessus peut être fait pour un écoulement turbulent permanent et établi entre deux plaques planes séparées par une distance $d = 2h$: le cas du canal plan (i.e., une "conduite" plane). La distance à la paroi est, comme dans l'analyse présente, notée y . On s'intéresse de nouveau au profil de vitesse moyen, $\bar{u}(y)$, avec $0 \leq y \leq h$. Le profil étant symétrique par rapport au milieu du canal, on se limite à $0 \leq y \leq h$. On obtient alors, par bilan sur un volume de contrôle (exercice):

$$\bar{\tau}(y) + \bar{\tau}^t(y) = -\frac{d\bar{p}}{dx} (h - y), \quad (8.51)$$

$$\bar{\tau}_w = -\frac{d\bar{p}}{dx} h, \quad (8.52)$$

et donc

$$\bar{\tau}(y) + \bar{\tau}^t(y) = \bar{\tau}_w \left(1 - \frac{y}{h}\right). \quad (8.53)$$

Donc, le profil de la contrainte moyenne totale (moléculaire + turbulente) est aussi une droite dans le cas du canal plan. Pour la relation entre λ et C_f , on obtient par contre (exercice) que $\lambda = 2 C_f$.

Conclusion: que ce soit en conduite ou en canal, on a obtenu que la contrainte totale (moléculaire + turbulente) est une ligne droite. En divisant par ρ , on écrit aussi

$$\nu \frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{u'v'} = \nu \frac{d\bar{u}}{dy} + \nu_t \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{\bar{\tau}_w}{\rho} \left(1 - \frac{y}{R}\right) \quad (8.54)$$

pour la conduite et

$$\nu \frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{u'v'} = \nu \frac{d\bar{u}}{dy} + \nu_t \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{\bar{\tau}_w}{\rho} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (8.55)$$

pour le canal.

Si on considère, par exemple, des écoulements turbulents avec parois "hydrauliquement lisses" (un autre concept à préciser plus tard) et que l'on mesure le profil de $-\overline{u'v'}$, on obtient des résultats tels que ceux présentés à la Fig. 8.3. Le complément entre $-\overline{u'v'}$ et la relation linéaire est nécessairement dû à la contrainte moléculaire, $\nu \frac{d\bar{u}}{dy}$. On constate

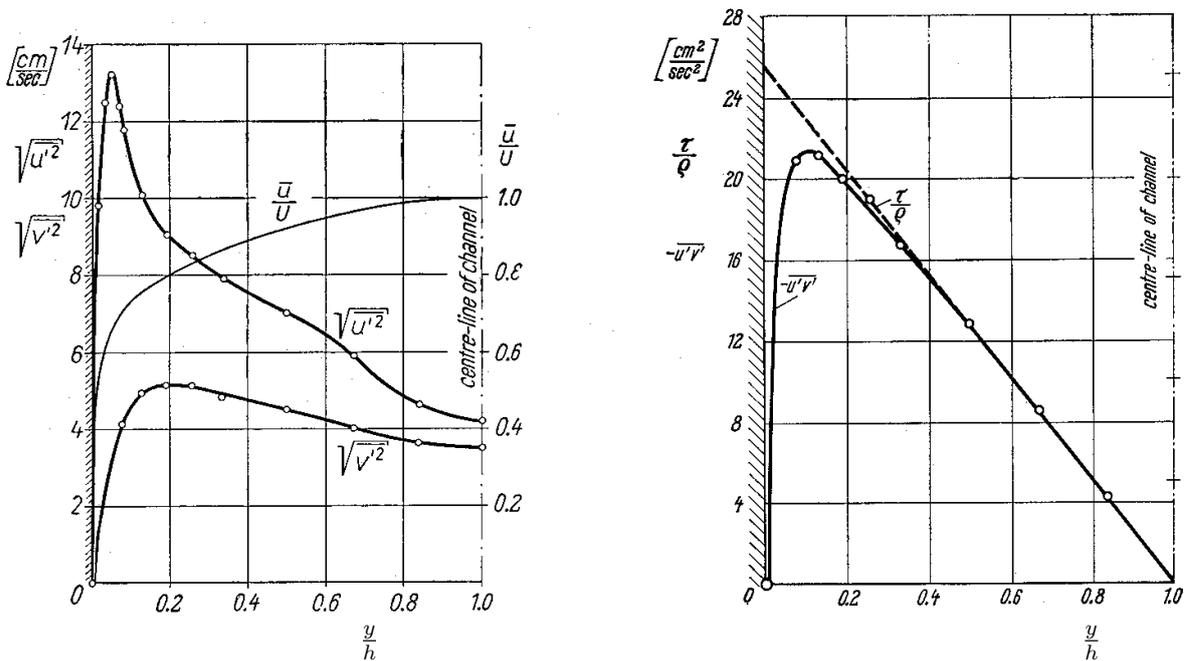


Figure 8.3: Mesures du profil de vitesse, $\frac{\bar{u}}{u_c}$, et de ses fluctuations en écoulement turbulent en canal: composantes $\sqrt{u' u'}$, $\sqrt{v' v'}$ et $\bar{\tau}^t/\rho = -\overline{u' v'}$; la vitesse au centre est $\bar{u}_c = 100$ cm/s et est notée U (figure d'après Reichart, 1938); figure tirée de H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, sixth ed., MacGraw-Hill).

que l'effet de la viscosité moléculaire n'est dominant que dans une toute petite région proche de la paroi (zone I, appelée sous-couche laminaire dans la suite). Il est dominé par l'effet de la viscosité effective de turbulence dans la partie complètement turbulente de l'écoulement (zone III dans la suite). Il y a, bien sûr, une zone de transition où $\bar{\tau}$ et $\bar{\tau}^t$ sont du même ordre de grandeur (zone II dans la suite). Ces concepts seront précisés et quantifiés dans la suite.

Finalement, on notera qu'on peut toujours, que ce soit en conduite ou en canal, clairement définir le profil de viscosité effective de turbulence:

$$\nu_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-\overline{u' v'}}{\frac{d\bar{u}}{dy}}. \quad (8.56)$$

On peut donc aussi l'obtenir à partir des mesures expérimentales des profils de \bar{u} et de $-\overline{u' v'}$. A noter aussi que la viscosité effective de turbulence n'est pas nulle au centre de la conduite ou du canal: le numérateur et le dénominateur s'annulent mais leur rapport reste fini.

8.6.2 Modélisation de la viscosité effective de turbulence pour la zone proche de la paroi

Jusqu'à présent, nous n'avons toujours pas proposé de modèle pour $\mu_t = \rho \nu_t$.

Par analogie avec la théorie cinétique des gaz, la viscosité cinématique de turbulence peut être prise comme:

$$\nu_t \sim l \bar{q} \quad (8.57)$$

avec l une "longueur caractéristique de mélange turbulent" et \bar{q} une vitesse caractéristique locale de la turbulence. On se souvient aussi de la définition liée à l'énergie cinétique de la turbulence: $\bar{q} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2\bar{k}}$; donc, si on a \bar{k} , on peut l'utiliser comme ingrédient pour modéliser ν_t .

Considérons d'abord l'approche proposée par von Karman et Prandtl dans les années 30, et pour la zone turbulente proche de la paroi. Elle consiste à aussi modéliser \bar{q} : en utilisant le gradient de vitesse moyenne et, de nouveau, la longueur de mélange l , soit:

$$\bar{q} \sim l \frac{d\bar{u}}{dy} . \quad (8.58)$$

On obtient alors:

$$\nu_t \sim l^2 \frac{d\bar{u}}{dy} . \quad (8.59)$$

A noter que $\frac{d\bar{u}}{dy} > 0$ partout: on aura donc bien \bar{q} positif. Le modèle ci-dessus pour \bar{q} n'est clairement pas valable dans la zone loin de la paroi et proche du centre de la conduite ou du canal: en effet, le gradient de vitesse y est faible, et même s'annule au centre, alors que l'énergie cinétique de la turbulence \bar{k} (et donc la vitesse de turbulence, \bar{q}) y est clairement significative, et non-nulle! Ce modèle ne pourra donc pas être utilisé dans cette zone.

Poursuivons donc néanmoins avec ce modèle, mais en se limitant à la zone turbulente proche de la paroi. A ce stade, on peut aussi fixer les choses et écrire, après von Karman et Prandtl, que

$$\nu_t \stackrel{\text{mod}}{=} l^2 \frac{d\bar{u}}{dy} , \quad (8.60)$$

toute constante étant absorbée dans la définition de la longueur de mélange, l , qui est encore à déterminer/modéliser.

Von Karman (1930) a proposé le modèle:

$$l \stackrel{\text{mod}}{=} \kappa \frac{d\bar{u}}{dy} / \left(-\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right) . \quad (8.61)$$

avec κ une constante (appelée depuis la "constante de von Karman") déterminée à partir des résultats expérimentaux. A noter que $\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} < 0$ partout, d'où le signe $-$ pour assurer une longueur positive. Ce modèle produit, pour la partie de la zone turbulente qui est

proche de la paroi (appelée zone III-a dans la suite) un profil de vitesse qui correspond bien aux mesures expérimentales. Prandtl (1933) a ensuite indiqué que ce profil est aussi obtenu en prenant simplement que la longueur de mélange est proportionnelle à la distance à la paroi:

$$l \stackrel{\text{mod}}{=} \kappa y . \quad (8.62)$$

Autrement dit: dans la zone turbulente proche de la paroi, les deux modèles sont équivalents (comme on va le voir ci-dessous).

8.6.3 Profil universel de vitesse pour la zone proche de la paroi: conduite ou canal avec paroi hydrauliquement lisse

Considérons d'abord le cas des écoulements en conduite ou en canal, et avec paroi lisse (plus précisément, avec paroi "hydrauliquement lisse": un concept à préciser plus tard).

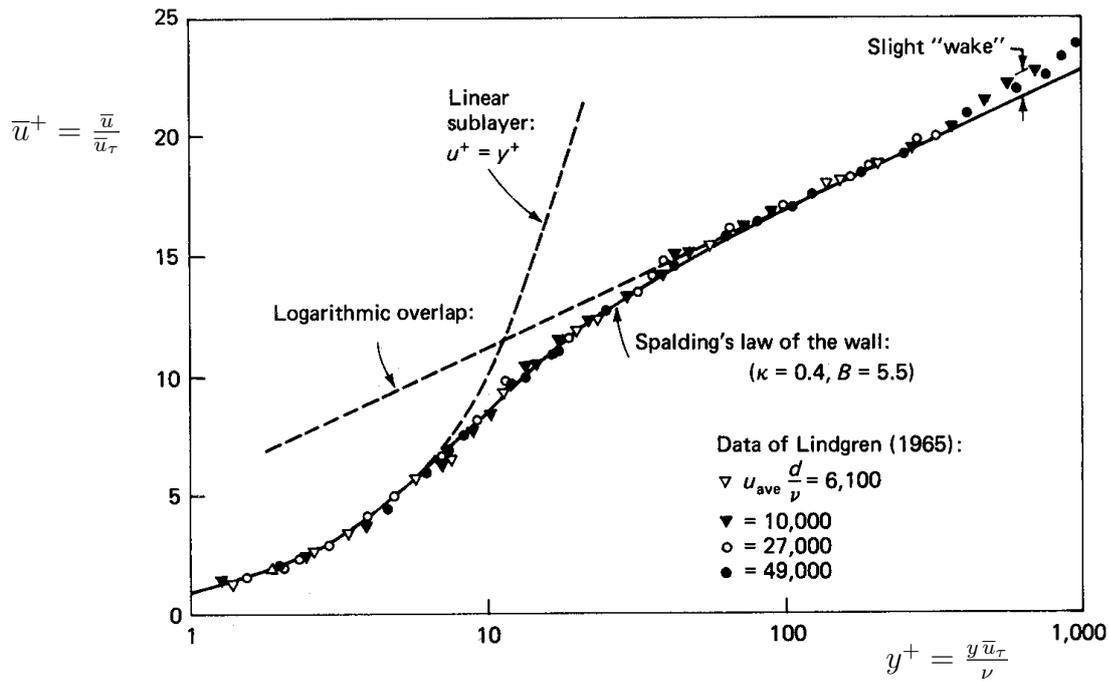


Figure 8.4: Profil universel de vitesse, $\frac{\bar{u}}{u_\tau}$ en conduite lisse, exprimé en coordonnée interne, $y^+ = \frac{y \bar{u}_\tau}{\nu}$: théorie et résultats expérimentaux (figure d'après les résultats de Lindgren (1965); figure tirée de *F. M. White, Viscous Fluid Flow, second ed., MacGraw-Hill*).

L'équation (EDO) pour le profil de vitesse est (pour un canal, simplement remplacer

R par h):

$$\frac{1}{\rho} (\bar{\tau} + \bar{\tau}^t) = (\nu + \nu_t) \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{\bar{\tau}_w}{\rho} \left(1 - \frac{y}{R}\right). \quad (8.63)$$

On constate que le terme $\bar{\tau}_w/\rho$ a les dimensions du carré d'une vitesse. On définit alors la "vitesse de frottement" par:

$$\bar{u}_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\bar{\tau}_w}{\rho}}. \quad (8.64)$$

Les zones proches de la paroi sont les zones I, II et III-a, la "fin" de la zone III-a étant à $y/R \approx 0.1$. La contrainte totale étant essentiellement égale à la contrainte de paroi, on écrit alors, pour la région proche de la paroi:

$$\frac{1}{\rho} (\bar{\tau} + \bar{\tau}^t) = (\nu + \nu_t) \frac{d\bar{u}}{dy} = \bar{u}_\tau^2. \quad (8.65)$$

La zone I est la zone à dominance laminaire: celle toute proche de la paroi. On y a $\bar{\tau} \gg \bar{\tau}^t$ et donc l'EDO qui détermine le profil de vitesse est

$$\nu \frac{d\bar{u}}{dy} = \bar{u}_\tau^2 \quad (8.66)$$

Le profil, obtenu par intégration, est linéaire:

$$\bar{u} = \frac{y}{\nu} \frac{\bar{\tau}_w}{\rho}. \quad (8.67)$$

Ce profil s'écrit aussi sous la forme "universelle":

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau} = \frac{y \bar{u}_\tau}{\nu}. \quad (8.68)$$

Le profil de vitesse est donc naturellement normalisé par la vitesse de frottement (i.e., par la contrainte de paroi réduite, $\frac{\bar{\tau}_w}{\rho}$). Il en va de même de la coordonnée y : elle est normalisée sous la forme d'un nombre de Reynolds faisant intervenir la vitesse de frottement et la viscosité cinématique): on dira que y est ici normalisé en terme de coordonnée adimensionnelle "interne" (i.e., proche de la paroi). On définit d'ailleurs les notations:

$$\bar{u}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau}, \quad y^+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y \bar{u}_\tau}{\nu}. \quad (8.69)$$

Dans la sous-couche laminaire, l'EDO qui détermine le profil universel de vitesse est donc aussi écrite comme $\frac{d\bar{u}^+}{dy^+} = 1$ et sa solution est

$$\bar{u}^+ = y^+. \quad (8.70)$$

La "fin" de la zone I se situe en $y^+ \approx 5$.

La zone II est la zone avec $\bar{\tau}$ et $\bar{\tau}^t$ du même ordre de grandeur. C'est une zone de transition entre la zone laminaire (zone I) et la zone turbulente (zone III). On y reviendra plus tard.

La zone III est la zone à dominance turbulente, et donc avec $\bar{\tau} \ll \bar{\tau}^t$. Elle s'étend jusqu'au centre de la conduite. On y a donc:

$$\nu_t \frac{d\bar{u}}{dy} = \bar{u}_\tau^2 \left(1 - \frac{y}{R}\right). \quad (8.71)$$

La zone III est divisée en deux sous-zones: la partie III-a proche de la paroi et la partie III-b loin de la paroi.

Le "début" de la zone III-a se situe en $y^+ \approx 70$ (i.e., en terme de coordonnée adimensionnelle interne car encore proche de la paroi). Elle s'étend jusque $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y}{R} \approx 0.1$ (i.e., en terme de coordonnée adimensionnelle externe η faisant intervenir la dimension globale du problème, R). On peut donc écrire, pour la zone III-a:

$$\nu_t \frac{d\bar{u}}{dy} = \bar{u}_\tau^2. \quad (8.72)$$

On peut en obtenir la solution en utilisant le modèle de viscosité de turbulence de von Karman ou de Prandtl:

$$\begin{aligned} l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 &= \bar{u}_\tau^2, \\ l \frac{d\bar{u}}{dy} &= \bar{u}_\tau, \end{aligned} \quad (8.73)$$

Considérons d'abord l'approche de Prandtl (1933). On continue alors avec Eq. (8.62) comme modèle pour l , ce qui donne:

$$\begin{aligned} \kappa y \frac{d\bar{u}}{dy} &= \bar{u}_\tau, \\ \kappa \frac{y \bar{u}_\tau}{\nu} \frac{d\left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau}\right)}{d\left(\frac{y \bar{u}_\tau}{\nu}\right)} &= 1, \\ \kappa y^+ \frac{d\bar{u}^+}{dy^+} &= 1, \end{aligned} \quad (8.74)$$

et donc, par intégration,

$$\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \log y^+ + C. \quad (8.75)$$

C'est le célèbre "profil logarithmique" de vitesse: il est universel en ce sens que tous les résultats expérimentaux sur les écoulements turbulents en conduite ou en canal (aussi en couche limite, voir plus loin) et à grand nombre de Reynolds montrent une zone proche de la paroi avec un profil de vitesse logarithmique, voir par exemple Fig. 8.4.

Considérons ensuite l'approche de von Karman (1930). On vérifie que le profil logarithmique, Eq. (8.75), donne bien que Eq. (8.61) produit $l = \kappa y$. Les modèles de von Karman et de Prandtl sont donc bien équivalents en zone III-a.

Les coefficients κ et C varient quelque peu. Les valeurs en conduite calibrées sur les anciens résultats expérimentaux de Nikuradse donnent: $\kappa = 0.40$ et $C = 5.5$: voir Fig. 8.4. Une analyse par Zanoun, Durst et Nagib (2004) de résultats expérimentaux récents pour des profils de vitesse en canal donne plutôt $\kappa = 0.37$ et $C = 3.7$. Une analyse par Winckelmans et Bricteux (2008) de résultats de simulations numériques directes d'écoulements turbulents en canal donne aussi $\kappa = 0.37$, et $C = 3.7$, mais avec aussi un shift $y_0^+ \approx 6$ dans la loi logarithmique: voir plus loin. Il y a donc une variabilité significative dans la valeur "acceptée" de la "constante de von Karman", κ , et donc aussi dans le C , et encore beaucoup d'investigations et de discussions sur ce sujet; néanmoins, la valeur de κ est clairement plutôt 0.37 que 0.40!

Conclusion: Dans la région proche de la paroi (zones I, II et III-a), le profil de vitesse est exprimable en coordonnée "interne", $y^+ = \frac{y\bar{u}_\tau}{\nu}$. l'EDO pour la zone interne s'écrit donc toujours, en adimensionnel, comme:

$$(1 + \nu_t^+) \frac{d\bar{u}^+}{dy^+} = 1, \quad (8.76)$$

où on a aussi introduit une nouvelle définition,

$$\nu_t^+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\nu_t}{\nu}, \quad (8.77)$$

et sa solution est donc toujours de la forme:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau} = f\left(\frac{y\bar{u}_\tau}{\nu}\right), \quad \bar{u}^+ = f(y^+). \quad (8.78)$$

C'est ce qu'on appelle la "loi de la paroi".

On note aussi que, moyennant la définition,

$$l^+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{l\bar{u}_\tau}{\nu}, \quad (8.79)$$

on a que

$$\nu_t^+ = \frac{\nu_t}{\nu} = \frac{l^2}{\nu} \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{l^2 \bar{u}_\tau^2}{\nu^2} \frac{d\bar{u}^+}{dy^+} = l^{+2} \frac{d\bar{u}^+}{dy^+} \quad (8.80)$$

et donc que l'EDO en zone III-a,

$$\nu_t^+ \frac{d\bar{u}^+}{dy^+} = 1, \quad (8.81)$$

est aussi

$$l^{+2} \left(\frac{d\bar{u}^+}{dy^+}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad l^+ \frac{d\bar{u}^+}{dy^+} = 1, \quad (8.82)$$

qui, avec $l^+ = \kappa y^+$, donne bien, après intégration, le profil

$$\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \log y^+ + C . \quad (8.83)$$

Il est aussi très important de remarquer que l’approche avec longueur de mélange n’est vraiment pas nécessaire! On peut tout aussi bien (et même mieux!) modéliser directement la viscosité de turbulence, sans passer par le concept de longueur de mélange. La zone logarithmique (zone III-a) correspond simplement à l’hypothèse que la viscosité de turbulence grandit linéairement avec la distance à la paroi. L’analyse dimensionnelle donne alors:

$$\nu_t = \kappa y \bar{u}_\tau \quad \Rightarrow \quad \nu_t^+ = \kappa y^+ . \quad (8.84)$$

Si on introduit ce modèle dans l’EDO pour la zone III-a, on obtient bien le même profil logarithmique. On note aussi que $\nu_t^+ = l^+$ en zone III-a.

Il est aussi utile d’ajouter que de récentes investigations (Spalart et al. (2008), Winckelmans et Bricteux (2008) sur base des résultats DNS en canal de Moser (1999) et de Hoyas, del Alamo et Jimenez (2003, 2004 et 2006), voir plus loin) ont démontré qu’il faut aussi un léger “shift” dans la loi logarithmique de la zone III-a. La loi est plutôt:

$$\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \log(y^+ + y_0^+) + C , \quad (8.85)$$

ce qui correspond au modèle

$$\nu_t^+ = l^+ = \kappa (y^+ + y_0^+) . \quad (8.86)$$

Donc, dans la zone III-a, la viscosité de turbulence (où la longueur de mélange) grandit linéairement avec la distance à la paroi mais avec un shift y_0^+ ! Il n’y a effectivement aucune raison pour qu’il n’y en ait pas! La valeur du “shift” est petite mais elle n’est pas négligeable: $y_0^+ \approx 6$ (les valeurs calibrées étant obtenues dans la fourchette 5 à 8). En effet, $y_0^+ \approx 6$ est significatif, du moins en début de zone logarithmique car on se souvient que le début de cette est $y^+ \approx 70$. De plus, lorsqu’on prend en compte le shift, Winckelmans et Bricteux (2008) obtiennent alors, comme valeur calibrée, que $\kappa = 0.37$ et que $C = 3.7$: la présence du shift implique donc aussi une valeur différente pour la calibration de la constante de von Karman, κ , et donc aussi de C .

Finalement, on peut aussi se poser la question de savoir si il existe aussi une “bonne” formule du profil de vitesse qui soit valable pour toute la région interne (zones I, II et III-a)? Il y a la formule de Spalding, qui est une formule “ad hoc”. Une meilleure approche consiste à se baser sur une “bonne” modélisation de la viscosité de turbulence pour toute la zone proche de la paroi, et à ensuite intégrer Eq. (8.76). A cet égard, on note l’approche de Musker (1979):

$$\frac{1}{\nu_t^+} = \frac{1}{(\sigma y^+)^3} + \frac{1}{(\kappa y^+)} . \quad (8.87)$$

Ce modèle fait varier ν_t^+ de $(\sigma y^+)^3$ pour y^+ petit (ce qui est physiquement correct, basé sur des arguments théoriques que nous ne présentons pas ici; la constante valant environ

$\sigma = 0.10$) à κy^+ pour $y^+ \geq 70$. Si on met ce modèle dans Eq. (8.76), on obtient une EDO qu'on peut intégrer numériquement (et même analytiquement). Malheureusement, le modèle de Musker ne produit pas non plus un bon fit du profil de vitesse. En fait, un modèle qui produit un bon fit, et aussi avec le “shift”, est obtenu en utilisant une modification du modèle de Musker (Winckelmans et Duponcheel, 2008):

$$\left(\frac{1}{\nu_t^+}\right)^p = \left(\frac{1}{(\sigma y^+)^3}\right)^p + \left(\frac{1}{(\gamma y^+)^2}\right)^p + \left(\frac{1}{(\kappa(y^+ + y_0^+))}\right)^p \quad (8.88)$$

avec $\sigma = 0.10$, $\gamma = 0.10$, $\kappa = 0.37$, $y_0^+ = 6$ et $p = 5$ comme valeurs calibrées.

Des résultats de simulations numériques directes (DNS, Direct Numerical Simulations) récentes d'écoulements turbulent en canal sont aussi présentés en Fig. 8.5. Les courbes présentées correspondent à des cas avec nombre de Reynolds de plus en plus grand: voir Table 8.1 pour les valeurs de $Re_\tau = h^+ = \frac{h\bar{u}_\tau}{\nu}$ et de $Re_d = \frac{d\bar{u}_m}{\nu}$. Ce sont ces profils qui ont été utilisé dans l'analyse par Winckelmans et Bricteux. En particulier, le dernier profil est a suffisamment grand nombre de Reynolds qu'on y distingue clairement une zone III-a de type logarithmique.

h^+	Re_d
180	5600
395	13800
590	22000
950	37500
2000	87200

Table 8.1: Nombres de Reynolds correspondants aux profils montrés pour les DNS en canal de Moser et al à $h^+ = 180, 395$ et 590 (1999), et de Hoyas, del Alamo et Jimenez à $h^+ = 550$ (2003, non utilisés ici), 950 (2004) et 2000 (2006).

Les profils de contrainte effective de turbulence, $\frac{-\overline{u'v'}}{\bar{u}_\tau^2} = \frac{\nu_t d\bar{u}/dy}{\bar{u}_\tau^2}$, sont présentés à la Fig. 8.6 en variable globale, η , et le zoom en variable de paroi, y^+ , est présenté à la Fig. 8.7. On voit bien que le maximum se déplace vers la paroi à mesure que le nombre de Reynolds augmente. On note aussi, en passant, que le cas expérimental de la Fig. 8.3 est clairement un cas à nombre de Reynolds relativement modeste: il compare bien avec le cas de la DNS à $h^+ = 590$ (qui correspond à $Re_d = 22000$). On vérifie aussi que le cas de la DNS à $h^+ = 2000$ (qui correspond à $Re_d = 87200$) est clairement un cas à suffisamment grand nombre de Reynolds que pour avoir une zone logarithmique bien définie. On vérifie aussi que le cas de la DNS “facile” à $h^+ = 180$ (qui correspond à $Re_d = 5600$) est un cas à faible nombre de Reynolds et peu turbulent.

Pour information complémentaire, les profils des fluctuations de turbulence, $\frac{u'_{rms}}{\bar{u}_\tau}$, $\frac{v'_{rms}}{\bar{u}_\tau}$ et $\frac{w'_{rms}}{\bar{u}_\tau}$ sont présentés aux Figs. 8.8 et 8.9, et les profils de l'énergie cinétique de turbulence,

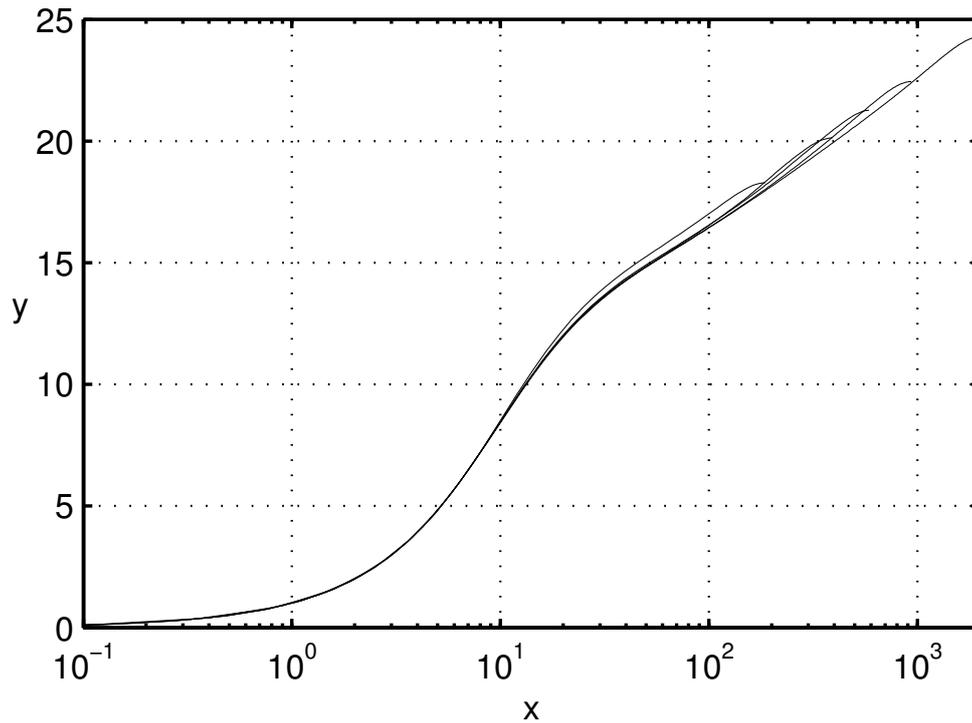


Figure 8.5: Canal turbulent avec paroi hydrauliquement lisse: profil universel de vitesse, $\frac{\bar{u}}{u_\tau}$ en fonction de y^+ ; résultats de simulation numérique directe (DNS) à $h^+ = 180, 395, 590, 950$ et 2000 . Figure produite à partir de résultats obtenus par Moser et al à $h^+ = 180, 395$ et 590 (1999), et par Hoyas, del Alamo et Jimenez à $h^+ = 950$ (2004) et 2000 (2006).

$\frac{\bar{k}}{u_\tau^2}$, aux Figs. 8.10 et 8.11. Nous ne les commenterons pas ici, sauf de souligner que la turbulence est effectivement très anisotrope dans la zone proche de la paroi et est presque isotrope (mais néanmoins pas tout à fait) dans la zone proche du centre du canal. Finalement, on présente aussi, à la Fig. 8.12, les profil de vitesse, $\frac{\bar{u}}{u_c}$, qui ne sont pas universels: on obtient effectivement un profil différent pour chaque nombre de Reynolds!.

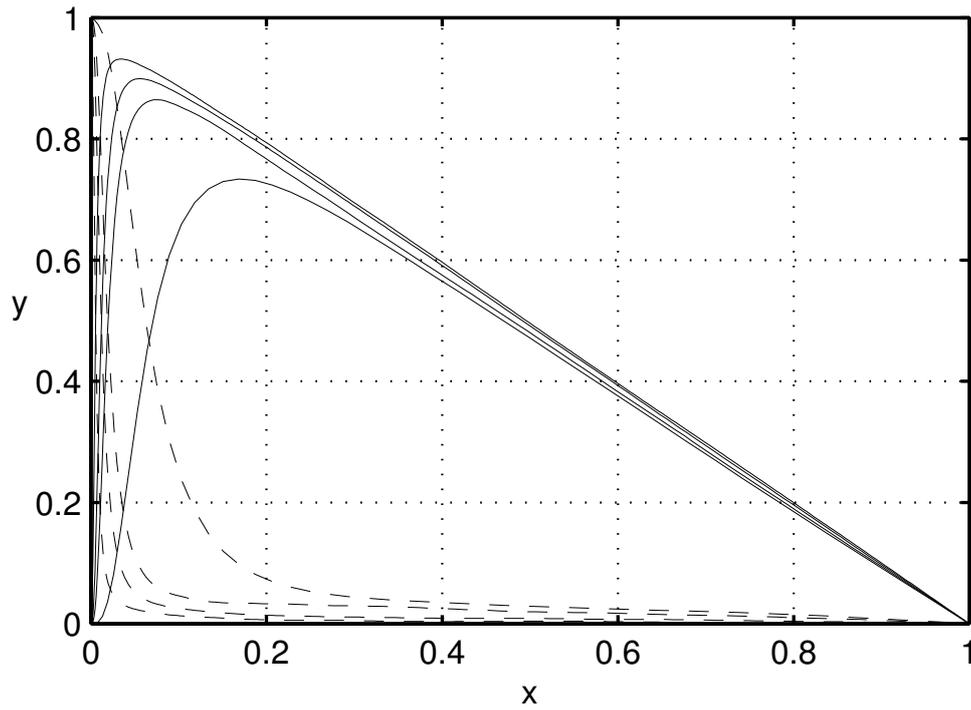


Figure 8.6: DNS de canal avec paroi hydrauliquement lisse à $h^+ = 180, 590, 950$ et 2000 : profils de contrainte effective de turbulence, $\frac{-\overline{u'v'}}{\overline{u_\tau^2}} = \frac{\nu_t d\overline{u}/dy}{\overline{u_\tau^2}}$, (solid) et de contrainte moléculaire, $\frac{\nu d\overline{u}/dy}{\overline{u_\tau^2}}$, (dash) en fonction de $\eta = \frac{y}{h}$.

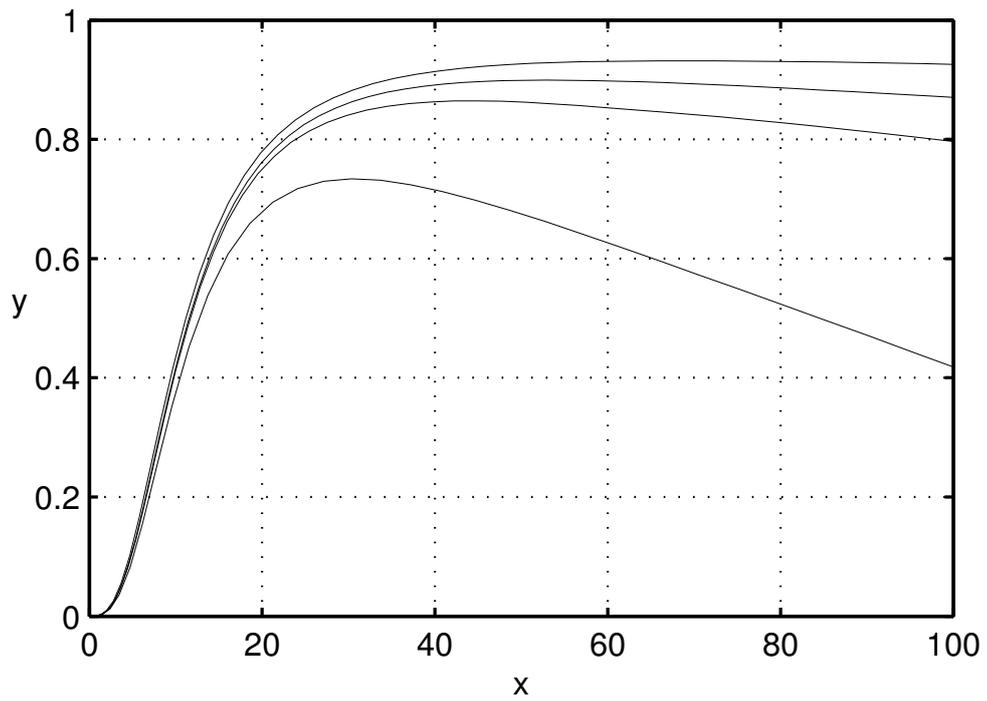


Figure 8.7: DNS de canal avec paroi hydrauliquement lisse à $h^+ = 180, 590, 950$ et 2000 : profils de contrainte effective de turbulence, $\frac{-\overline{u'v'}}{\overline{u_\tau}^2} = \frac{\nu_t d\overline{u}/dy}{\overline{u_\tau}^2}$, en fonction de y^+ et dans la région proche de la paroi.

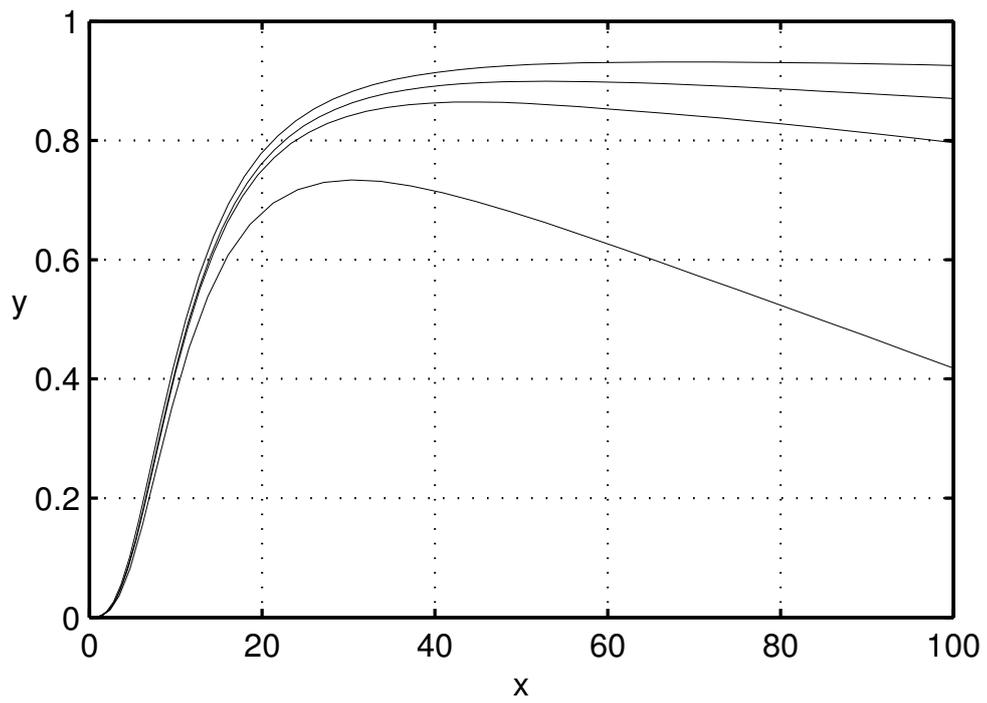


Figure 8.8: DNS de canal avec paroi hydrauliquement lisse à $h^+ = 180, 590, 950$ et 2000 .: profils des fluctuations de turbulence, $\frac{u'_{rms}}{u_{\tau}}$ (dash-dot), $\frac{v'_{rms}}{u_{\tau}}$ (dash) et $\frac{w'_{rms}}{u_{\tau}}$ (solid), en fonction de y .

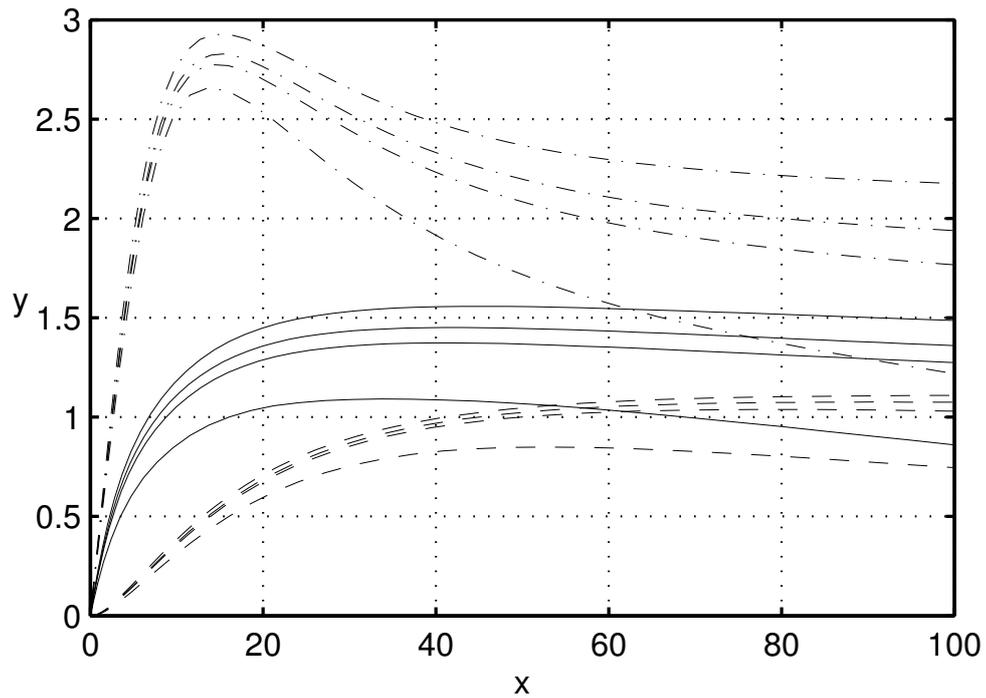


Figure 8.9: DNS de canal avec paroi hydrauliquement lisse à $h^+ = 180, 590, 950$ et 2000 .: profils des fluctuations de turbulence, $\frac{u'_{rms}}{u_{\tau}}$ (dash-dot), $\frac{v'_{rms}}{u_{\tau}}$ (dash) et $\frac{w'_{rms}}{u_{\tau}}$ (solid), en fonction de y^+ et dans la région proche de la paroi.

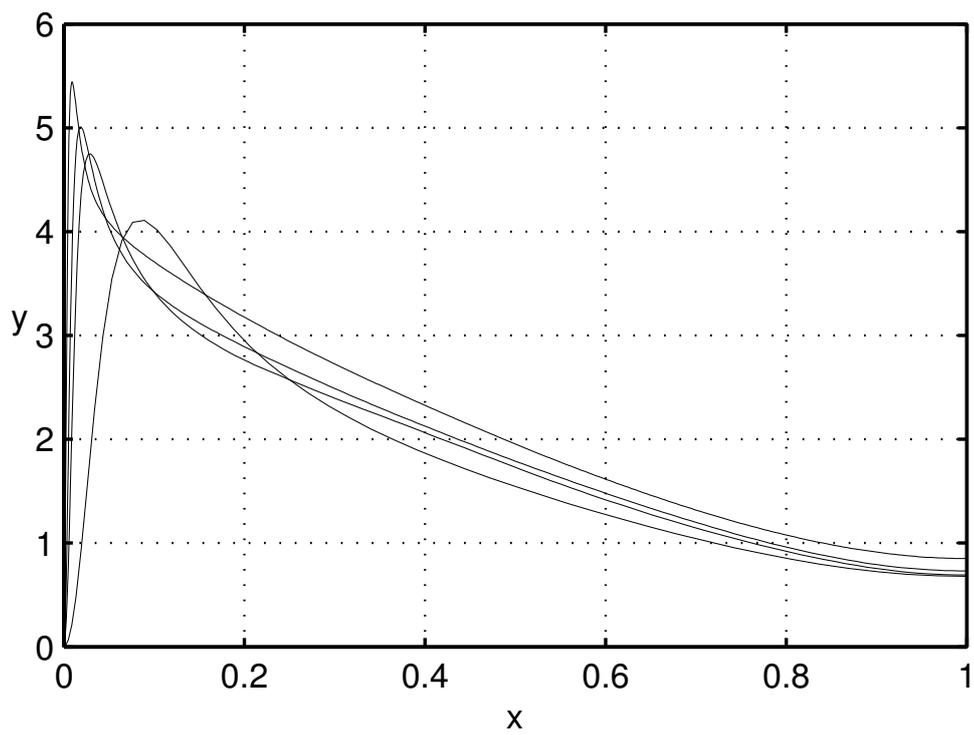


Figure 8.10: DNS de canal avec paroi hydrauliquement lisse à $h^+ = 180, 590, 950$ et 2000 .: profils de l'énergie cinétique de turbulence, $\frac{\bar{k}}{u_\tau^2}$, en fonction de η .

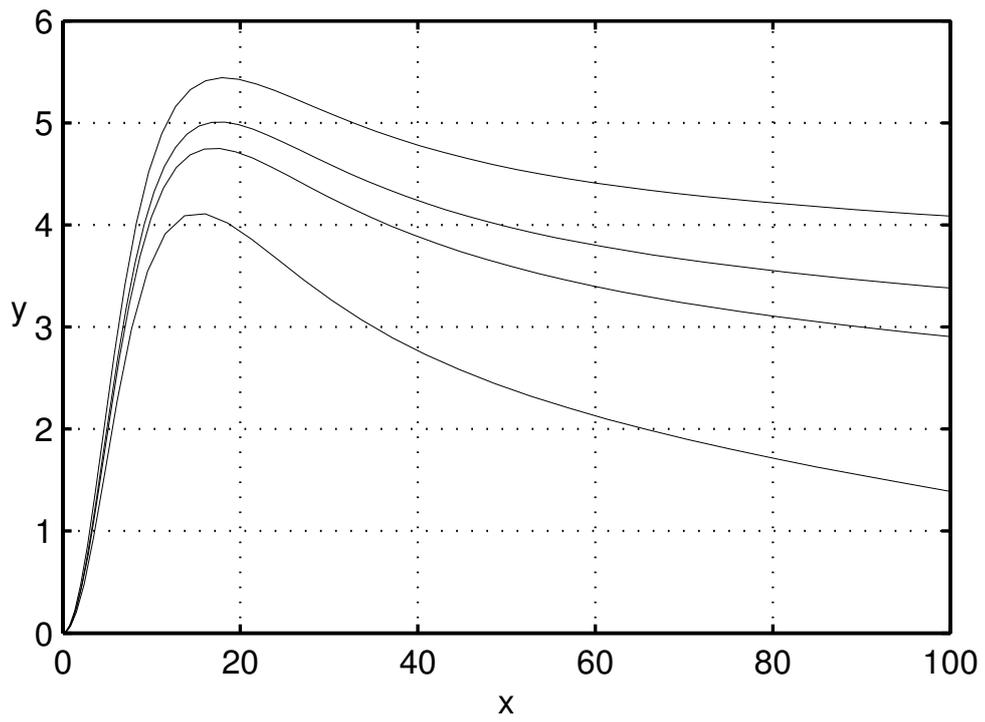


Figure 8.11: DNS de canal avec paroi hydrauliquement lisse à $h^+ = 180, 590, 950$ et 2000 .: profils de l'énergie cinétique de turbulence, $\frac{\bar{k}}{\bar{u}_\tau^2}$, en fonction de y^+ et dans la région proche de la paroi.

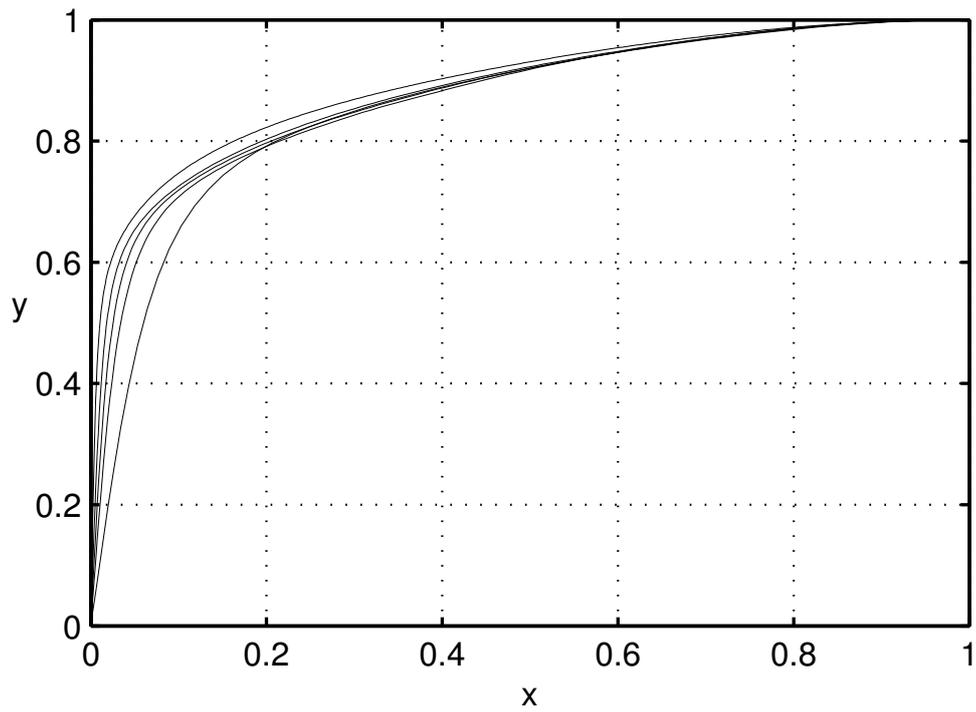


Figure 8.12: DNS de canal avec paroi hydrauliquement lisse à $h^+ = 180, 395, 590, 950$ et 2000 : profils de vitesse, $\frac{\bar{u}}{u_c}$, en fonction de y .

8.6.4 Profil universel de vitesse pour toute la zone turbulente

Considérons ensuite le profil de vitesse valable pour toute la zone turbulente (zone III), et exprimé en terme de variable “externe” (i.e., globale): $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y}{R}$. On a alors:

$$\frac{\bar{u}_c - \bar{u}}{\bar{u}_\tau} = F\left(\frac{y}{R}\right) = F(\eta) \quad (8.89)$$

avec \bar{u}_c la vitesse au centre de la conduite. A noter qu’un tel profil est aussi valable dans la zone III-a: il est valable pour toute la zone turbulente.

La zone III-a est en fait la zone qui est à la fois interne et externe: c’est une “zone tampon” (“buffer zone”). Dans cette zone, le profil de vitesse peut être exprimé en coordonnée interne ou en coordonnée externe:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau} = f(y^+) \quad \text{et} \quad \frac{\bar{u}_c - \bar{u}}{\bar{u}_\tau} = F(\eta) . \quad (8.90)$$

Pourquoi doit on aussi utiliser \bar{u}_τ pour adimensionaliser le profil de vitesse externe? Parce que la contrainte de paroi est aussi une grandeur globale (e.g.: elle gère les pertes de charges globales, λ , etc.): l’externe et l’interne sont liés.

On note aussi, en passant, que le terme $\frac{\bar{u}_\tau}{\bar{u}_m}$ est lié au coefficient de pertes de charge. En effet:

$$\frac{\bar{u}_\tau^2}{\bar{u}_m^2} = \frac{\bar{\tau}_w}{\rho \bar{u}_m^2} = \frac{C_f}{2} = \frac{\lambda}{8} . \quad (8.91)$$

Pour un écoulement turbulent en canal, on aura aussi le profil universel exprimé en variable interne pour les zones I, II et III-a, et exprimé en variable externe pour les zones III-a et III-b:

$$\frac{\bar{u}_c - \bar{u}}{\bar{u}_\tau} = F\left(\frac{y}{h}\right) = F(\eta) . \quad (8.92)$$

Le terme $\frac{\bar{u}_\tau}{\bar{u}_m}$ est alors

$$\frac{\bar{u}_\tau^2}{\bar{u}_m^2} = \frac{\bar{\tau}_w}{\rho \bar{u}_m^2} = \frac{C_f}{2} = \frac{\lambda}{4} . \quad (8.93)$$

La fonction F en canal n’est cependant pas la même que celle en conduite.

A noter aussi que la définition de viscosité effective de turbulence est toujours possible. On a en effet:

$$\nu \frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{u'v'} \stackrel{\text{def}}{=} (\nu + \nu_t) \frac{d\bar{u}}{dy} = \bar{u}_\tau^2 \left(1 - \frac{y}{R}\right) . \quad (8.94)$$

On peut donc toujours déterminer, sur base de résultats expérimentaux ou de simulation numérique, le profil réel de viscosité de turbulence. On obtient alors effectivement, pour les écoulements à grand nombre de Reynolds, une zone III-a avec un profil linéaire et légèrement “shifté” du type:

$$\nu_t = \kappa (y^+ + y_0^+) \nu = \kappa (y \bar{u}_\tau + y_0^+ \nu) , \quad \frac{\nu_t}{R \bar{u}_\tau} = \kappa \left(\frac{y}{R} + \frac{y_0^+}{R^+} \right) \approx \kappa \eta . \quad (8.95)$$

Effectivement, la contribution du “shift”, $y_0^+/R^+ \approx 6/R^+ \ll 1$, n’est pratiquement pas visible lorsqu’on examine les résultats en variable externe, η , sauf tout près de la paroi. Le profil de $\nu_t/(R\bar{u}_\tau)$ en fonction de η s’applatit ensuite et il tend même vers un plateau approximatif dans la région proche du centre de la conduite.

Sur base des résultats expérimentaux de Nikuradse, von Karman a aussi proposé une loi de profil de vitesse valable pour la zone proche du centre de la conduite. C’est la “loi du milieu” de von Karman:

$$\frac{\bar{u}_c - \bar{u}}{\bar{u}_\tau} = 7.2 (1 - \eta)^2 . \quad (8.96)$$

On vérifie (exercice) que cela correspond effectivement au profil obtenu proche du centre, et avec comme valeur plateau de la viscosité effective: $\nu_t/(R\bar{u}_\tau) = 1/14.4 = 0.069$.

Finalement, il y a également le modèle composite de profil universel de vitesse de type “Coles” (voir plus loin, les couches limites). Ici appliqué aux conduites, le profil en zone turbulente s’écrit alors

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau} = f(y^+) + G(\eta) = \left[\frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{y\bar{u}_\tau}{\nu} \right) + C \right] + \frac{\Pi}{\kappa} 2 \sin^2 \left(\alpha \frac{\pi}{2} \frac{y}{R} \right) , \quad (8.97)$$

avec $\kappa = 0.40$, $C = 5.5$, $\Pi = 0.20$ et $\alpha = 1.35$ comme valeurs calibrées en conduite (sans le shift). Évalué au centre de la conduite, cela donne

$$\frac{\bar{u}_c}{\bar{u}_\tau} = \left[\frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{R\bar{u}_\tau}{\nu} \right) + C \right] + \frac{\Pi}{\kappa} 2 \sin^2 \left(\alpha \frac{\pi}{2} \right) . \quad (8.98)$$

On obtient bien alors par différence, et car

$$\log \left(\frac{y}{a} \right) - \log \left(\frac{R}{a} \right) = \log \left(\frac{y}{R} \right) \quad (8.99)$$

quel que soit a , un profil exprimé uniquement en variable externe:

$$\frac{\bar{u}_c - \bar{u}}{\bar{u}_\tau} = -\frac{1}{\kappa} \log \eta + \frac{\Pi}{\kappa} 2 \left[\sin^2 \left(\alpha \frac{\pi}{2} \right) - \sin^2 \left(\alpha \frac{\pi}{2} \eta \right) \right] = F(\eta) . \quad (8.100)$$

C’est effectivement un “relativement bon modèle” pour toute la zone III. Pour la partie proche paroi (zone III-a), il produit le profil logarithmique en conduite exprimé en variable externe:

$$\frac{\bar{u}_c - \bar{u}}{\bar{u}_\tau} = -2.5 \log \eta + 0.73 . \quad (8.101)$$

A noter que la fonction $\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} s \right)$ n’a rien de magique: c’est simplement une fonction commode en forme de “S” (avec valeur nulle et pente nulle en $s = 0$, valeur unitaire et pente nulle en $s = 1$). D’autres auteurs utilisent d’ailleurs plutôt la fonction $3s^2 - 2s^3$ qui a les mêmes propriétés.

En canal (donc $\eta = y/h$), un bon profil composite de type Coles, ici avec le shift y_0^+ en plus, est

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau} = \left[\frac{1}{\kappa} \log (y^+ + y_0^+) + C \right] + \frac{\Pi}{\kappa} 2 (3(\alpha\eta)^2 - 2(\alpha\eta)^3) \quad (8.102)$$

avec $\kappa = 0.37$, $C = 3.75$, $\Pi = 0.07$ (donc très faible) et $\alpha = \alpha(\Pi) = 1.52$ calculé tel que $\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau}$ est maximum (pente nulle) en $\eta = 1$, selon la calibration par Winckelmans et Bricteux (2008) sur base des résultats de DNS. On obtient alors aussi:

$$\frac{\bar{u}_c}{\bar{u}_\tau} = \left[\frac{1}{\kappa} \log (R^+ + y_0^+) + C \right] + \frac{\Pi}{\kappa} 2 (3\alpha^2 - 2\alpha^3) \quad (8.103)$$

De plus, et puisque $y_0^+/h^+ \ll 1$, on a aussi que

$$\frac{y^+ + y_0^+}{h^+ + y_0^+} = \frac{y^+ + y_0^+}{h^+ (1 + y_0^+/h^+)} \approx \frac{y^+ + y_0^+}{h^+} \approx \frac{y^+}{h^+} = \frac{y}{h} = \eta . \quad (8.104)$$

On obtient donc, par différence, que le profil de vitesse exprimé en variable externe est:

$$\frac{\bar{u}_c - \bar{u}}{\bar{u}_\tau} = -\frac{1}{\kappa} \log \eta + \frac{\Pi}{\kappa} 2 [(3\alpha^2 - 2\alpha^3) - (3(\alpha\eta)^2 - 2(\alpha\eta)^3)] = F(\eta) . \quad (8.105)$$

Finalement, Winckelmans et Bricteux (2008) ont aussi proposé, sur base des mêmes résultats de DNS, un profil plus simple et encore meilleur:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau} = \left[\frac{1}{\kappa} \log (y^+ + y_0^+) + C \right] - \frac{\eta}{\kappa} + \frac{\Pi}{\kappa} 2 (3\eta^2 - 2\eta^3) , \quad (8.106)$$

avec $\kappa = 0.37$, $C = 3.9$ et $\Pi = 0.47$ comme bonnes valeurs calibrées en canal. On remarque que $\frac{1}{\kappa}$ multiplie ici deux termes: le terme logarithmique mais aussi un terme en η . Ce profil a une pente nulle en $\eta = 1$ sans besoin de facteur α . On obtient aussi facilement le profil de vitesse exprimé en variable externe:

$$\frac{\bar{u}_c - \bar{u}}{\bar{u}_\tau} = -\frac{1}{\kappa} [\log \eta + (1 - \eta)] + \frac{\Pi}{\kappa} 2 [1 - (3\eta^2 - 2\eta^3)] = F(\eta) . \quad (8.107)$$

Ce modèle de profil de vitesse correspond en fait à l'intégrale exacte de l'EDO valable pour toute la zone III (III-a et III-b),

$$\nu_t \frac{d\bar{u}}{dy} = \bar{u}_\tau^2 (1 - \eta) , \quad (8.108)$$

avec, comme modèle,

$$\frac{\nu_t}{h\bar{u}_\tau} = \frac{\kappa \eta}{(1 + 12\Pi \eta^2)} \quad (8.109)$$

qui lui même constitue effectivement un excellent fit du profil exact de la viscosité effective de turbulence obtenu à partir des résultats de DNS. Ce profil a aussi l'avantage qu'il reste valable pour des écoulements turbulents à relativement faible nombre de Reynolds (e.g., $Re_d = 10^4$ et même moins), ce qui n'est pas le cas des autres profils présentés ci-dessus. Le formalisme proposé peut aussi s'appliquer aux écoulements en conduite.

8.6.5 Profil de vitesse simplifié en exposant pour toute la zone turbulente

Bien que l'approche qui suit n'est pas fondée sur une base solide, elle a son histoire et son utilité: nous nous devons donc de la présenter brièvement. Nikuradse a d'abord réduit ses résultats expérimentaux en utilisant, pour la zone turbulente (zone III) un simple "fit" en loi de puissance (i.e., en exposant) de la forme, voir Fig. 8.13:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_c} = \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{1}{n}} = \eta^{\frac{1}{n}}. \quad (8.110)$$

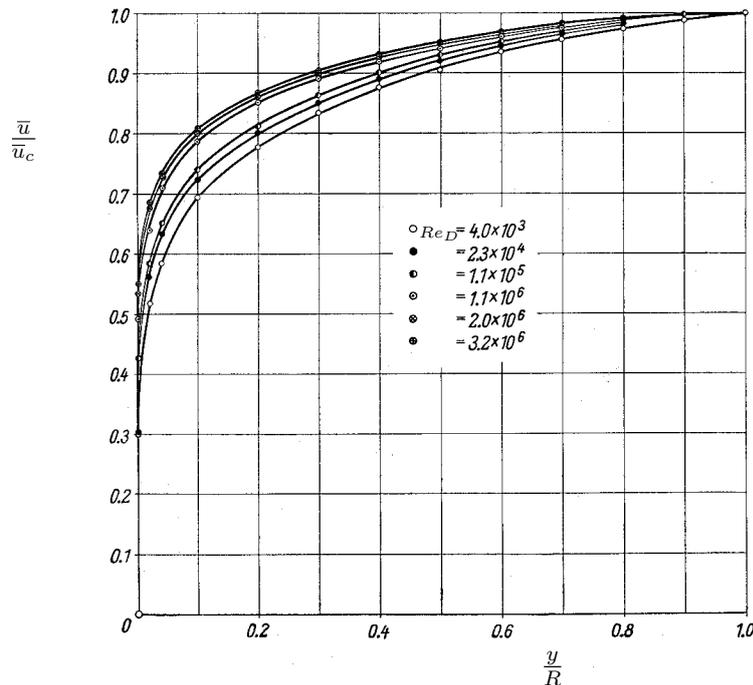


Figure 8.13: Conduites lisses: profils de vitesse, $\frac{\bar{u}}{\bar{u}_c}$, en fonction de $\frac{y}{R}$ pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, Re_D : théorie avec loi en exposant et résultats expérimentaux (figure d'après Nikuradse (1932); figure tirée de H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, sixth ed., MacGraw-Hill).

Ce profil a quelques "problèmes":

1. la pente du profil en $\eta = 0$ est infinie. Ce n'est pas un problème car on l'utilise uniquement dans la zone turbulente (zone III).
2. la pente du profil en $\eta = 1$ n'est pas nulle: elle vaut $1/n$. Ce n'est pas trop grave car n est grand.

3. le paramètre n n'est pas universel: il varie en fonction de Re_D .

Au vu des sections précédentes, il est clair qu'il est difficile d'accepter le "fit" de Nikuradse. Même si on l'accepte, le moins que l'on puisse dire est que le paramètre n ne peut pas être universel: il doit dépendre du coefficient de perte de charge, $\lambda = 4C_f$, ou, ce qui revient aussi au même en conduites hydrauliquement lisses, du nombre de Reynolds global, $Re_D = \frac{\bar{u}_m D}{\nu}$ (rappel: pour les écoulements turbulents en conduites lisses, $\lambda = \lambda(Re_D)$). Nikuradse a en effet déterminé les valeurs de n en fonction de Re_D , voir Fig. 8.14. La plage de variation de n est de 6 à 10. Pour les écoulements turbulents "typiques" (i.e., avec $Re_D \approx 10^5$), on retient la valeur $n = 7$.

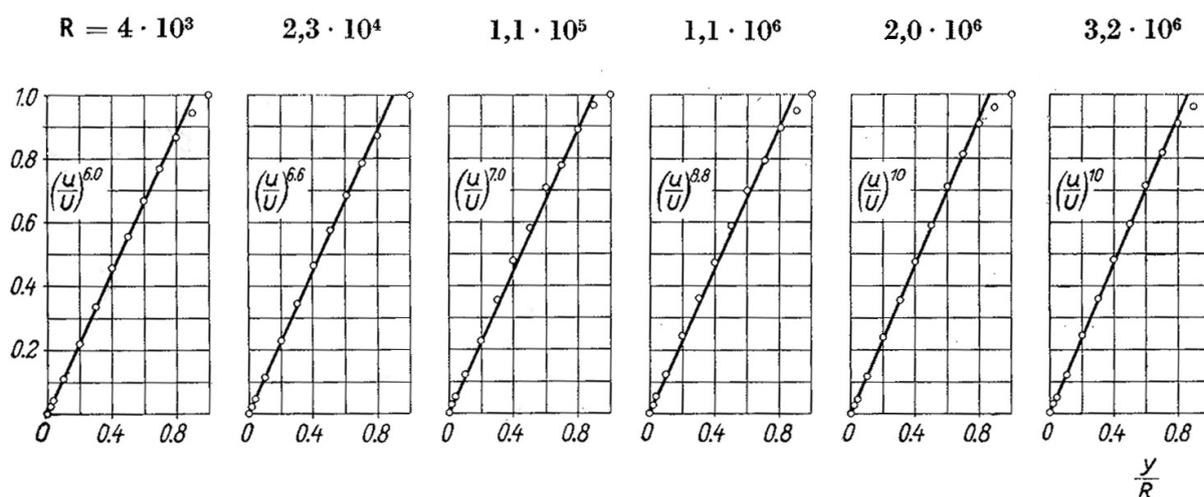


Figure 8.14: Profils de vitesse en exposant: détermination de n en fonction de Re_D sur base de résultats expérimentaux en conduite hydrauliquement lisse (figure d'après Nikuradse (1932); figure tirée de H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory, sixth ed.*, MacGraw-Hill).

Débit et flux de quantité de mouvement

Bien que le profil a ses problèmes, il demeure intégrable et produit des résultats utiles. Considérons d'abord la vitesse moyenne (vitesse de débit) associée à ce type de profil:

$$\bar{u}_m = \frac{\int \bar{u} dA}{A} \quad (8.111)$$

avec $A = \pi R^2$. Utilisant $dA = r d\theta dr$, on obtient:

$$\begin{aligned} \int \bar{u} dA &= \bar{u}_c \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left(\frac{R-r}{R} \right)^{\frac{1}{n}} r dr = \bar{u}_c 2\pi R^2 \int_0^1 (1-s)^{\frac{1}{n}} s ds \\ &= -\bar{u}_c 2A \int_1^0 \eta^{1/n} (1-\eta) d\eta = \bar{u}_c 2A \int_0^1 \eta^{\frac{1}{n}} - \eta^{\frac{1}{n}+1} d\eta \\ &= \bar{u}_c 2A \left(\frac{1}{\frac{1}{n}+1} - \frac{1}{\frac{1}{n}+2} \right) = \bar{u}_c 2A \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)}, \end{aligned} \quad (8.112)$$

et donc:

$$\frac{\bar{u}_m}{\bar{u}_c} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}, \quad (8.113)$$

ce qui donne 0.817 lorsque $n = 7$. Pour le flux de quantité de mouvement, on obtient:

$$\int \bar{u}^2 dA = 2 \frac{n^2}{(n+2)(2n+2)} \bar{u}_c^2 A = \frac{(n+1)(2n+1)^2}{4n^2(n+2)} \bar{u}_m^2 A, \quad (8.114)$$

ce qui donne $1.020 \bar{u}_m^2 A$ lorsque $n = 7$.

A noter que le profil simplifié en exposant mène aussi à:

$$\frac{\bar{u}_c - \bar{u}}{\bar{u}_\tau} = \frac{\bar{u}_c}{\bar{u}_\tau} \left(1 - \left(\frac{y}{R} \right)^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2} \frac{\bar{u}_m}{\bar{u}_\tau} \left(1 - \left(\frac{y}{R} \right)^{\frac{1}{n}} \right) \quad (8.115)$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2} \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \left(1 - \left(\frac{y}{R} \right)^{\frac{1}{n}} \right). \quad (8.116)$$

La comparaison avec le profil universel, $\frac{\bar{u}_c - \bar{u}}{\bar{u}_\tau} = F\left(\frac{y}{R}\right)$, nous montre qu'il y a un clairement une relation entre n et $\sqrt{\lambda}$. On l'obtient en comparant leurs intégrales. Si on intègre le profil simplifié, on obtient

$$\int \frac{\bar{u}_c - \bar{u}}{\bar{u}_\tau} dA = \frac{\bar{u}_c - \bar{u}_m}{\bar{u}_\tau} A = \frac{\bar{u}_m}{\bar{u}_\tau} \left(\frac{\bar{u}_c}{\bar{u}_m} - 1 \right) A = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \frac{(3n+1)}{2n^2} A. \quad (8.117)$$

Si on intègre le profil universel composite de Coles, on obtient

$$\int \frac{\bar{u}_c - \bar{u}}{\bar{u}_\tau} dA = 4.06 A. \quad (8.118)$$

La comparaison donne alors la relation

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} \frac{3}{2} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{3n} \right) = 4.06. \quad (8.119)$$

Comme $\frac{1}{3n} \ll 1$ (puisque $n \geq 6$), cette relation se simplifie encore. On obtient, finalement,

$$n = \frac{1.05}{\sqrt{\lambda}} \approx \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (8.120)$$

On a donc obtenu, pour les écoulements turbulent en conduite, une relation très simple, et très utile, entre n et $\sqrt{\lambda}$.

Loi empirique de Blasius pour les pertes de charges en conduite hydrauliquement lisse

La loi empirique de Blasius (1913) pour les pertes de charges des écoulements turbulents en conduites lisses est:

$$\lambda = 0.3164 Re_D^{-1/4}, \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.778 Re_D^{1/8}, \quad (8.121)$$

pour $Re_D \leq 5 \cdot 10^4$. Cette loi est consistante avec le profil en exposant. En effet, il en découle que

$$\lambda = 4 C_f = 4 \frac{\bar{\tau}_w}{\rho \bar{u}_m^2 / 2} = 8 \left(\frac{\bar{u}_\tau}{\bar{u}_m} \right)^2 = 0.3164 \left(\frac{\nu}{\bar{u}_m D} \right)^{1/4}, \quad (8.122)$$

et donc que

$$\left(\frac{\bar{u}_\tau}{\bar{u}_m} \right)^{7/4} = 0.03326 \left(\frac{\nu}{R \bar{u}_\tau} \right)^{1/4}. \quad (8.123)$$

On obtient alors la relation

$$\frac{\bar{u}_m}{\bar{u}_\tau} = 6.992 \left(\frac{R \bar{u}_\tau}{\nu} \right)^{1/7} \approx 7 \left(\frac{R \bar{u}_\tau}{\nu} \right)^{1/7}. \quad (8.124)$$

On voit déjà apparaître l'exposant $1/n$ avec $n = 7$. Comme on a que $\bar{u}_m = 0.817 \bar{u}_c$ lorsque $n = 7$, on peut aussi écrire:

$$\frac{\bar{u}_c}{\bar{u}_\tau} = 8.56 \left(\frac{R \bar{u}_\tau}{\nu} \right)^{1/7}. \quad (8.125)$$

La formule de Blasius équivaut en fait à une relation en puissance entre \bar{u}_c/\bar{u}_τ et $R^+ = R \bar{u}_\tau/\nu$. On peut la comparer avec ce que l'on obtient si on applique le formalisme universel avec la forme composite de Coles

$$\frac{\bar{u}_c}{\bar{u}_\tau} = \frac{1}{\kappa} \log R^+ + C + 0.73. \quad (8.126)$$

Par exemple, à $Re_D = 5 \cdot 10^4$, la formule empirique de Blasius pour les pertes de charge donne $\lambda = 0.0212$. En utilisant alors

$$R^+ = \frac{R \bar{u}_\tau}{\nu} = \frac{R \bar{u}_m}{\nu} \frac{\bar{u}_\tau}{\bar{u}_m} = \frac{Re_D}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{8}}, \quad (8.127)$$

on déduit que $R^+ = 1286$. La formule Eq. (8.125) donne alors $\bar{u}_c/\bar{u}_\tau = 23.8$ et celle de Coles donne $\bar{u}_c/\bar{u}_\tau = 24.1$: les résultats sont donc fort proches; c'est cohérent puisque que nous sommes dans la zone de validité de la formule de Blasius: $Re_D = 5 \cdot 10^4$.

A noter qu'il existe aussi une formule empirique valable pour $5 \cdot 10^4 \leq Re_D \leq 10^6$, soit:

$$\lambda = 0.184 Re_D^{-1/5}, \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.33 Re_D^{1/10}. \quad (8.128)$$

8.6.6 Formule générale de Prandtl pour les pertes de charge en conduite hydrauliquement lisse

Retournons au profil universel de vitesse pour les écoulements turbulents en conduites lisses. Si on intègre le profil universel logarithmique (zone III-a),

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau} = \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{y \bar{u}_\tau}{\nu} \right) + C, \quad (8.129)$$

dans toute la section, on obtiendra une formule pour les pertes de charge. C'est ce qu'a fait Prandtl en 1935. L'erreur que l'on commet est faible car les zones I et II sont fort proches de la paroi et donc ne participent pas beaucoup à l'intégrale de débit. La contribution de la composante additionnelle de Coles en zone III-b ne sera pas complètement négligeable et peut aussi être prise en compte. Rappelons que son amplitude est assez faible ($\Pi = 0.20$). De toute façon, la formulation de Coles n'était pas connue en 1935. Intégrons donc simplement le profil logarithmique sur toute la section, comme l'a fait Prandtl:

$$\begin{aligned} \pi R^2 \bar{u}_m &= 2\pi \int_0^R \bar{u}(r) r dr = 2\pi \bar{u}_\tau \int_0^R \left[\frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{(R-r) \bar{u}_\tau}{\nu} \right) + C \right] r dr \\ &= 2\pi R^2 \bar{u}_\tau \int_0^R \left[\frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{R\bar{u}_\tau}{\nu} \left(1 - \frac{r}{R}\right) \right) + C \right] \frac{r}{R} d\left(\frac{r}{R}\right) \\ &= 2\pi R^2 \bar{u}_\tau \int_0^1 \left[\frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{R\bar{u}_\tau}{\nu} (1-s) \right) + C \right] s ds \\ &= 2\pi R^2 \bar{u}_\tau \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{R\bar{u}_\tau}{\nu} \right) + C \right) + \frac{1}{\kappa} \log(1-s) \right] s ds \\ &= 2\pi R^2 \bar{u}_\tau \left[\left(\frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{R\bar{u}_\tau}{\nu} \right) + C \right) \int_0^1 s ds + \frac{1}{\kappa} \int_0^1 \log(1-s) s ds \right]. \end{aligned} \quad (8.130)$$

Les deux intégrales valent respectivement $1/2$ et $\int_0^1 \log \eta (1-\eta) d\eta = -3/4$. On obtient donc:

$$\frac{\bar{u}_m}{\bar{u}_\tau} = \left(\frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{R\bar{u}_\tau}{\nu} \right) + C \right) - \frac{3}{2\kappa} = \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{R\bar{u}_\tau}{\nu} \right) + \left(C - \frac{3}{2\kappa} \right). \quad (8.131)$$

Cette expression se traduit en une formule pour les pertes de charge:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{8}{\lambda}} &= \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{Re_D}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \right) + \left(C - \frac{3}{2\kappa} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= \frac{1}{\sqrt{8}\kappa} \log \left(Re_D \sqrt{\lambda} \right) + \frac{1}{\sqrt{8}} \left(C - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{3}{2} + \log(2\sqrt{8}) \right) \right). \end{aligned} \quad (8.132)$$

Avec les valeurs utilisées par Prandtl ($\kappa = 0.40$ et $C = 5.5$), on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= 0.8839 \log \left(Re_D \sqrt{\lambda} \right) - 0.9129 \\ &= 2.035 \log_{10} \left(Re_D \sqrt{\lambda} \right) - 0.9129 \\ &= -2.035 \log_{10} \left(\frac{2.81}{Re_D} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) . \end{aligned} \quad (8.133)$$

Un meilleur “fit” des résultats expérimentaux sur les pertes de charge en conduites lisses a été obtenu, par Prandtl, en changeant quelques peu les coefficients, voir Fig. 8.15 (n’oublions pas que Prandtl a négligé une partie du profil en effectuant l’intégrale: il peut donc s’autoriser à devoir changer quelque peu le résultat final):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{2.51}{Re_D} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) . \quad (8.134)$$

C’est la formule que l’on utilise à ce jour pour les pertes de charge en conduites hydrauliquement lisses: elle donne de très bon résultats dans une très large gamme de nombres de Reynolds. Elle a en tout cas été validée expérimentalement jusque $Re_D = 3.5 \cdot 10^6$, et il est fort probable qu’elle reste valable au delà. Elle a le petit désavantage d’être une formule implicite mais ce n’est vraiment pas un problème: il suffit d’itérer sur le paramètre $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ et d’utiliser la formule de Blasius pour déterminer sa première valeur. Il existe aussi des “approximations” explicites; ce ne sont cependant que des approximations.

8.6.7 Conduites hydrauliquement lisses et conduites hydrauliquement rugueuses

Jusqu’à présent, nous n’avons considéré que des conduites avec parois lisses. Toute paroi réelle a sa “rugosité”, voir Fig. 8.16. On peut caractériser la rugosité d’une surface avec “rugosité uniformément répartie” par la hauteur moyenne (rms) de ses aspérités (i.e., l’écart-type moyen). Si on considère que $h(x, z)$ est la fonction qui décrit les variations de hauteur de surface (par rapport à la surface moyenne), on définira la rugosité par la hauteur moyenne (rms) des aspérités:

$$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{S} \int_S h^2(x, z) dx dz \right)^{1/2} . \quad (8.135)$$

Dans le cas de surface avec une rugosité non-uniformément répartie, on utilise le concept de “rugosité uniforme équivalente” en y associant un “ ϵ équivalent”. Des valeurs typiques de rugosité sont données dans la Table 8.2.

Pour la suite, la coordonnée y est considérée comme mesurée à partir de la position de la surface moyenne.

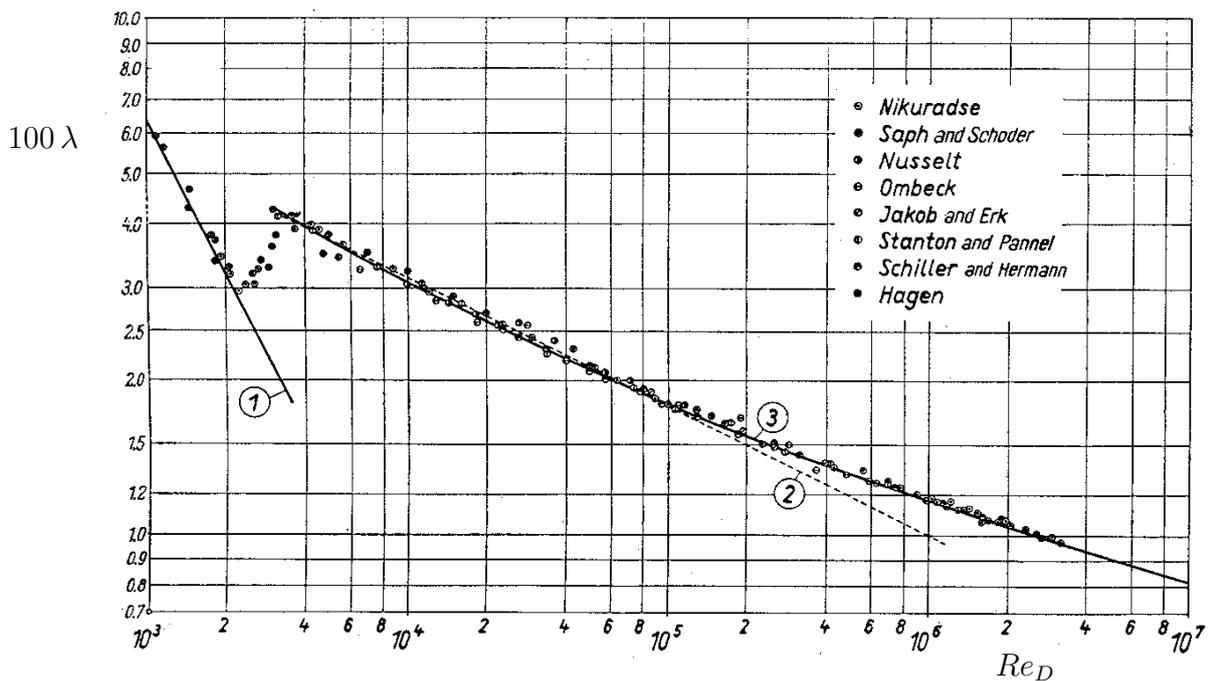


Figure 8.15: Pertes de charge en conduites hydrauliquement lisses: λ en fonction de Re_D ; courbe 1: écoulement laminaire: $\lambda = 64/Re_D$; formule de Prandtl (solid) et formule empirique de Blasius (dash) (figure tirée de *H. Schlichting, Boundary-Layer Theory, sixth ed., MacGraw-Hill*).

L'adimensionalisation de la rugosité en utilisant la vitesse de frottement est:

$$\epsilon^+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\epsilon \bar{u}_\tau}{\nu} . \quad (8.136)$$

Si on a $\epsilon^+ \leq 3$, la hauteur des aspérités est plus petite que la hauteur caractéristique qu'aurait une zone I de type sous-couche laminaire. Une sous-couche laminaire peut alors exister près de la paroi. Le régime est dit "hydrauliquement lisse": il y a une zone I suivie d'une zone II de transition suivie d'une zone III complètement turbulente.

Si on a $\epsilon^+ \geq 70$, la hauteur des aspérités est plus grande que la hauteur caractéristique qu'aurait une zone I suivie d'une zone II. L'écoulement est alors turbulent partout: il n'y a qu'une zone III. Le régime est dit "hydrauliquement rugueux".

A noter que ces valeurs limites 3 et 70, qui sont assez précises, sont en fait déterminées sur base de résultats expérimentaux: voir validation plus plus loin.

Dire qu'une conduite est lisse ou rugueuse n'a pas vraiment de sens. Une même conduite (ϵ donné) peut, en effet, être en régime hydrauliquement lisse ou hydrauliquement

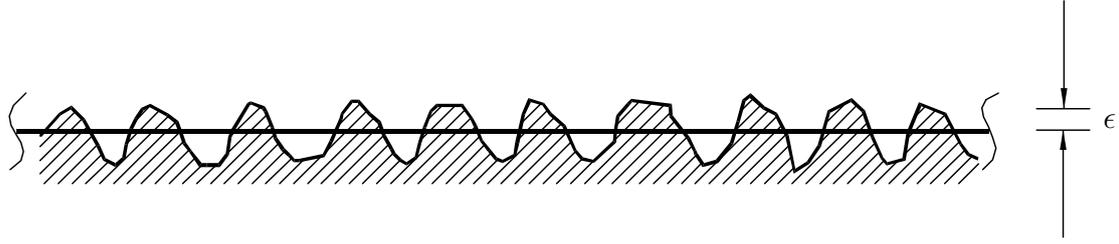


Figure 8.16: Surface rugueuse et concept de hauteur moyenne des aspérités, ϵ .

rugueux ou même mixte: cela dépend de \bar{u}_τ et de ν . La grandeur “décisionnelle” est la grandeur adimensionnelle ϵ^+ , et non la grandeur dimensionnelle ϵ ou même la grandeur adimensionnelle ϵ/D . On dit cependant souvent “conduite lisse” ou “conduite rugueuse”, mais on sous-entend toujours “conduite en régime hydrauliquement lisse” ou “conduite en régime hydrauliquement rugueux”.

Bien sûr, que ce soit en régime hydrauliquement lisse ou hydrauliquement rugueux, le concept de viscosité effective de turbulence reste valable pour la zone turbulente, zone III. Le fait que, pour la partie proche de la paroi (zone III-a), cette viscosité est directement proportionnelle à la distance à la paroi, $\nu_t = \kappa y \bar{u}_\tau$, reste tout aussi valable. Le profil de vitesse dans la zone III-a sera donc aussi logarithmique. Seule l’adimensionalisation et la constante d’intégration seront différentes. On observe alors, comme profil de vitesse, voir Fig. 8.17:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau} = \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{y}{\epsilon} \right) + B \quad (8.137)$$

avec $B = 8.5$ déterminé sur base de résultats expérimentaux. C’est donc la hauteur des aspérités qui intervient naturellement dans l’adimensionalisation de la coordonnée y . On peut aussi écrire ce profil comme:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau} = \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{y}{e^{-\kappa B} \epsilon} \right) = \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{y}{y_0} \right) \quad (8.138)$$

avec $y_0 = e^{-\kappa B} \epsilon = 0.033 \epsilon$ (et donc $y_0 \ll \epsilon$). Il est clair que la petite zone $0 \leq y < y_0$ est à exclure car elle correspond à des vitesses négatives. On peut facilement éviter ce petit problème en écrivant plutôt:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau} = \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{y + e^{-\kappa B} \epsilon}{\epsilon} \right) + B = \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{y + e^{-\kappa B} \epsilon}{e^{-\kappa B} \epsilon} \right) = \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{y + y_0}{y_0} \right), \quad (8.139)$$

ce qui donne alors bien $\bar{u} = 0$ en $y = 0$.

Dans la discipline des sciences de l'ingénieur mécanicien, on utilise ϵ pour caractériser la rugosité d'une surface (e.g., voir Table 8.2). En sciences de la Terre (atmosphères et océans), on utilise plutôt y_0 (par exemple, $y_0 \approx 1.0$ mm pour du sable fin, $y_0 \approx 1.0$ cm pour du gazon court, $y_0 \approx 1.0$ dm pour un champ de blé, etc.). C'est aussi une question de culture scientifique. Il est important de souligner qu'on peut toujours passer de l'un à l'autre.

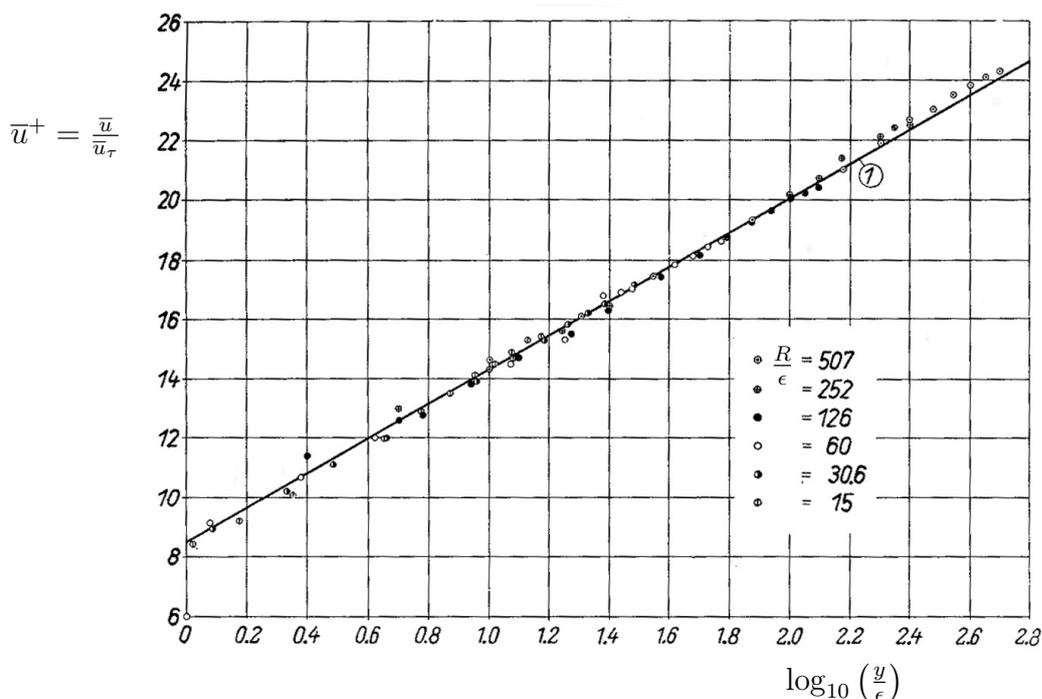


Figure 8.17: Conduite hydrauliquement rugueuse: profil universel de vitesse, $\frac{\bar{u}}{u_\tau}$, en fonction de $\frac{y}{\epsilon}$; théorie et résultats expérimentaux (figure tirée de H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, sixth ed., MacGraw-Hill).

Pour comparer les profils de vitesse lisses et rugueux, on peut aussi réécrire l'une et l'autre formules sous une forme équivalente:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}}{u_\tau} &= \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{y \bar{u}_\tau}{\nu} \right) + C = \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{y}{\epsilon} \right) + \left(C + \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{\epsilon \bar{u}_\tau}{\nu} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{y}{\epsilon} \right) + B (\log \epsilon^+) , \end{aligned} \quad (8.140)$$

Si, sur base de résultats expérimentaux, on fait un graphe de B en fonction de $\log \epsilon^+$, ce qu'a fait Nikuradse, voir Fig. 8.18, on observe effectivement une courbe $B = B(\log \epsilon^+)$. La partie à gauche avec $B = C + \frac{1}{\kappa} \log \epsilon^+$ correspond au régime hydrauliquement lisse; la partie à droite avec $B = 8.5$ correspond au régime hydrauliquement rugueux. C'est en

fait ce graphe qui détermine les limites annoncées ci-dessus: hydrauliquement lisse tant que $\epsilon^+ \leq 3$ et hydrauliquement rugueux dès que $\epsilon^+ \geq 70$.

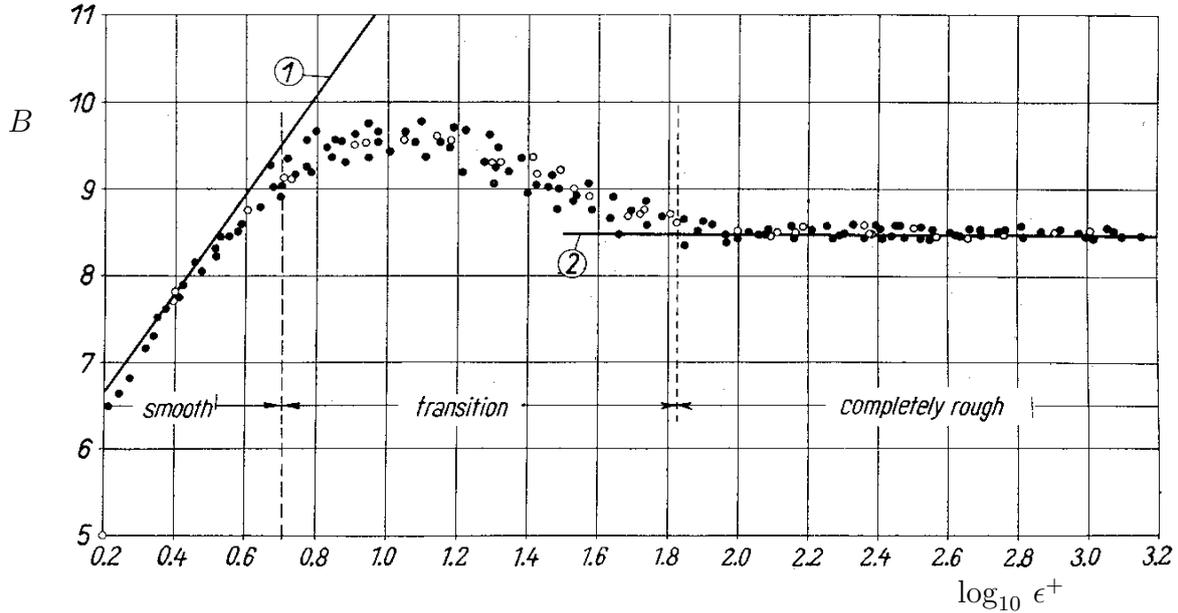


Figure 8.18: Détermination de B en fonction de $\log(\epsilon^+)$ sur base des résultats expérimentaux de Nikuradse (figure tirée de *H. Schlichting, Boundary-Layer Theory, sixth ed., MacGraw-Hill*).

Finalement, on note aussi les profils simplifiés en exposant exprimé en variable externe $\eta = y/R$, mais ici pour des conduites hydrauliquement rugueuses, voir Fig. 8.19. De nouveau, le paramètre n n'est pas universel: à Re_D fixé, il dépend de la rugosité relative $\frac{\epsilon}{R}$.

En toute généralité, il dépend donc de Re_D et de $\frac{\epsilon}{R}$. Au vu de ce que l'on a obtenu avant, c'est en fait plus simple: il ne dépend que de $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, lequel est bien sûr fonction de Re_D et de $\frac{\epsilon}{R}$. Le profil en exposant s'applique en régime hydrauliquement lisse ou rugueux, et avec le même profil si on a les mêmes pertes de charges.

Il en va de même pour le profil composite de Coles pour la zone turbulente, et exprimé en variable externe: il est le même que ce soit en conduite hydrauliquement lisse ou en conduite hydrauliquement rugueuse. En effet, dans le cas hydrauliquement rugueux, le profil est

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau} = \left[\frac{1}{\kappa} \log\left(\frac{y}{\epsilon}\right) + B \right] + \frac{\Pi}{\kappa} 2 \sin^2\left(\alpha \frac{\pi}{2} \frac{y}{R}\right) \quad (8.141)$$

et donc, exprimé en variable externe,

$$\frac{\bar{u}_c - \bar{u}}{\bar{u}_\tau} = -\frac{1}{\kappa} \log\left(\frac{y}{R}\right) + \frac{\Pi}{\kappa} 2 \left[\sin^2\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) - \sin^2\left(\alpha \frac{\pi}{2} \frac{y}{R}\right) \right], \quad (8.142)$$

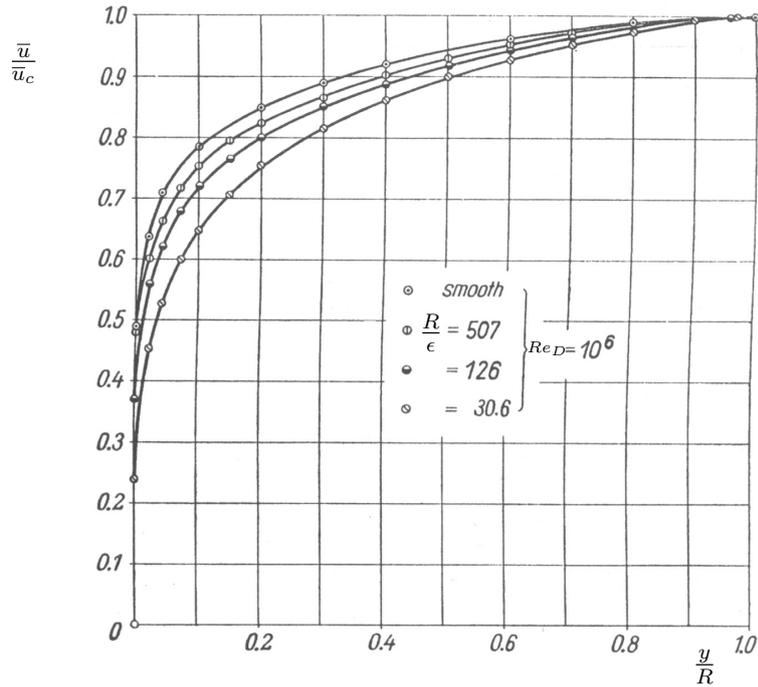


Figure 8.19: Conduites hydrauliquement rugueuses: profils de vitesse, $\frac{\bar{u}}{\bar{u}_c}$, en fonction de $\frac{y}{R}$ pour différentes valeurs de $\frac{\epsilon}{R}$ et à Re_D fixé; théorie avec loi en exposant et résultats expérimentaux (figure d'après Nikuradse (1933); figure tirée de *H. Schlichting, Boundary-Layer Theory, sixth ed., MacGraw-Hill*).

soit le même profil $F(y/R)$ que dans le cas hydrauliquement lisse. En ce qui concerne les profils universels de vitesse exprimé en variable externe, il n'y a donc aucune distinction entre les cas lisses ou rugueux: à même \bar{u}_τ (i.e., à même pertes de charge), même profil.

Il en va aussi de même si on utilise plutôt le profil composite de Winckelmans et Bricteux:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau} = \left[\frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{y}{\epsilon} \right) + B \right] - \frac{\eta}{\kappa} + \frac{\Pi}{\kappa} 2 (3\eta^2 - 2\eta^3) , \quad (8.143)$$

et donc

$$\frac{\bar{u}_c - \bar{u}}{\bar{u}_\tau} = -\frac{1}{\kappa} [\log \eta + (1 - \eta)] + \frac{\Pi}{\kappa} 2 [1 - (3\eta^2 - 2\eta^3)] = F(\eta) . \quad (8.144)$$

8.6.8 Formule générale des pertes de charge en conduite hydrauliquement rugueuse

Considérons le profil universel de vitesse pour les écoulements turbulents en conduites hydrauliquement rugueuses. Si on intègre le profil logarithmique

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau} = \frac{1}{\kappa} \log\left(\frac{y}{\epsilon}\right) + B, \quad (8.145)$$

dans toute la section, on obtiendra une formule pour les pertes de charge. Comme il n'y a pas ici de zones I et II, l'erreur que l'on commet sur l'intégrale de débit sera uniquement due à l'absence de composante complémentaire de Coles (de nouveau, on pourra facilement en tenir compte). Intégrons donc le profil logarithmique sur toute la section, comme l'a fait Prandtl:

$$\begin{aligned} \pi R^2 \bar{u}_m &= 2\pi \bar{u}_\tau \int_0^R \left[\frac{1}{\kappa} \log\left(\frac{R-r}{\epsilon}\right) + B \right] r \, dr \\ &= 2\pi R^2 \bar{u}_\tau \int_0^R \left[\frac{1}{\kappa} \log\left(\frac{R}{\epsilon} \left(1 - \frac{r}{R}\right)\right) + B \right] \frac{r}{R} d\left(\frac{r}{R}\right) \\ &= 2\pi R^2 \bar{u}_\tau \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{\kappa} \log\left(\frac{R}{\epsilon}\right) + B\right) + \frac{1}{\kappa} \log(1-s) \right] s \, ds. \end{aligned} \quad (8.146)$$

On obtient donc:

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \frac{1}{\kappa} \log\left(\frac{R}{\epsilon}\right) + \left(B - \frac{3}{2\kappa}\right). \quad (8.147)$$

La formule des pertes de charges est donc aussi obtenue. Avec $\kappa = 0.40$ et $B = 8.5$, cela donne:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= 0.8839 \log\left(\frac{R}{\epsilon}\right) + 1.679 \\ &= 2.035 \log_{10}\left(\frac{R}{\epsilon}\right) + 1.679 \\ &= -2.035 \log_{10}\left(\frac{\epsilon/D}{3.34}\right). \end{aligned} \quad (8.148)$$

De nouveau, un meilleur "fit" aux résultats expérimentaux, voir Fig. 8.20, est obtenu en changeant un peu le deuxième coefficient:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \log_{10}\left(\frac{\epsilon/D}{3.71}\right). \quad (8.149)$$

8.6.9 Formule générale des pertes de charge en conduite

Des résultats expérimentaux en conduites hydrauliquement lisses, hydrauliquement rugueuses, et hydrauliquement "mixtes" sont présentés à la Fig. 8.20. On a aussi reporté sur le graphe

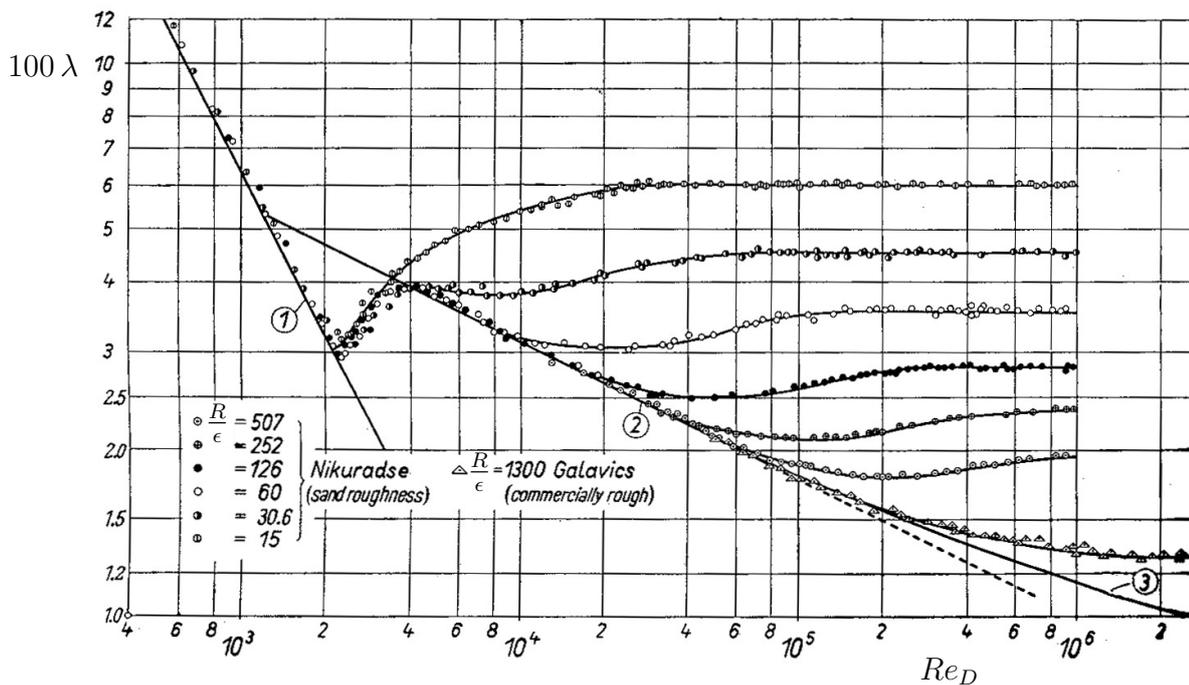


Figure 8.20: Pertes de charge en conduites, avec régimes hydrauliquement lisses, mixtes, et rugueux: résultats expérimentaux de λ en fonction de Re_D pour différentes valeurs de ϵ/R ; (figure tirée de H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, sixth ed., MacGraw-Hill).

la formule empirique de Blasius pour les pertes de charges en conduites lisses: on constate que c'est effectivement une bonne formule si $Re_D \leq 5 \cdot 10^4$. On a aussi reporté le cas des écoulements laminaires: $\lambda = 64/Re_D$.

On note que, à rugosité fixée, le coefficient de perte de charge λ n'a pas un comportement monotone décroissant à mesure que le nombre de Reynolds augmente.

Une formule "générale" a été proposée par Colebrook (1939): elle est simplement constituée d'un amalgame des formules pour les conduites hydrauliquement lisses et hydrauliquement rugueuses:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{2.51}{Re_D} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon/D}{3.71} \right). \quad (8.150)$$

Elle reproduit assez bien les résultats expérimentaux et est souvent utilisée. Elle n'est cependant pas capable de reproduire le bon comportement dans le régime mixte: à rugosité fixée, λ est monotone décroissant à mesure que Re_D augmente.

La mise sous forme graphique de la formule de Colebrook constitue la partie "écoulements turbulents" du diagramme de Moody (1944) pour les pertes de charges en conduites, voir

Fig. 8.21. A noter qu'on a ici supposé que $Re_D < 2000$ correspond aux écoulements laminaires et que $Re_D > 5000$ correspond aux écoulements turbulents (ces "bornes" ne sont, en fait, pas bien définies).

La formule de Colebrook est implicite, ce qui n'est pas un problème. Il existe des "approximations explicites" de cette formule. Citons, par exemple, la formule de Swamee & Jain (1976):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{5.74}{Re_D^{0.9}} + \frac{\epsilon/D}{3.71} \right). \quad (8.151)$$

Citons aussi la formule de Haaland (1983):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1.8 \log_{10} \left(\frac{6.9}{Re_D} + \left(\frac{\epsilon/D}{3.71} \right)^{1.11} \right). \quad (8.152)$$

Finalement, il existe aussi la formule de Churchill (1977), qui est en fait une amélioration de celle de Swamee & Jain de façon à aussi comprendre tous les régimes (régime laminaire, transition du régime laminaire au régime turbulent et régime turbulent):

$$\lambda^{12} = \left(\frac{64}{Re_D} \right)^{12} + \left[\left(-2.0 \log_{10} \left(\left(\frac{7.0}{Re_D} \right)^{0.9} + \frac{\epsilon/D}{3.71} \right) \right)^{16} + \left(\frac{13270}{Re_D} \right)^{16} \right]^{-3/2}. \quad (8.153)$$

La mise sous forme graphique des diverses formules est présentée à la Fig. 8.22: les résultats produit par les formules explicites (Haaland et Swamee & Jain) sont effectivement fort proches de ceux produit par la formule implicite de Colebrook; la formule de Churchill capture bien toute la plage des Re_D .

Type de conduite	Rugosité uniforme équivalente ϵ (mm)
Tuyau étiré en verre, cuivre, laiton	0.001
Tuyau industriel en laiton	0.025
Tuyau en acier laminé neuf	0.05
Tuyau en acier laminé rouillé	0.15 à 0.25
Tuyau en acier laminé incrusté	1.5 à 3.0
Tuyau en acier laminé bitumé intérieurement	0.015
Tuyau en acier soudé neuf	0.03 à 0.1
Tuyau en acier soudé rouillé	0.4
Tuyau en fer galvanisé	0.15 à 0.20
Tuyau en fonte usuelle moulée neuf	0.25
Tuyau en fonte usuelle moulée rouillée	1.0 à 1.5
Tuyau en fonte usuelle moulée bitumé intér.	0.1
Tuyau recouvert intér. de fortes incrustations	jusqu'à 3
Tuyau ciment lisse	0.3 à 0.8
Tuyau ciment brut	jusqu'à 3
Tuyau acier rivé	0.9 à 9
Pierre de taille brute de percement	8 à 15
Galerie	80 à 600

Table 8.2: Valeurs typiques de rugosité uniforme équivalente.

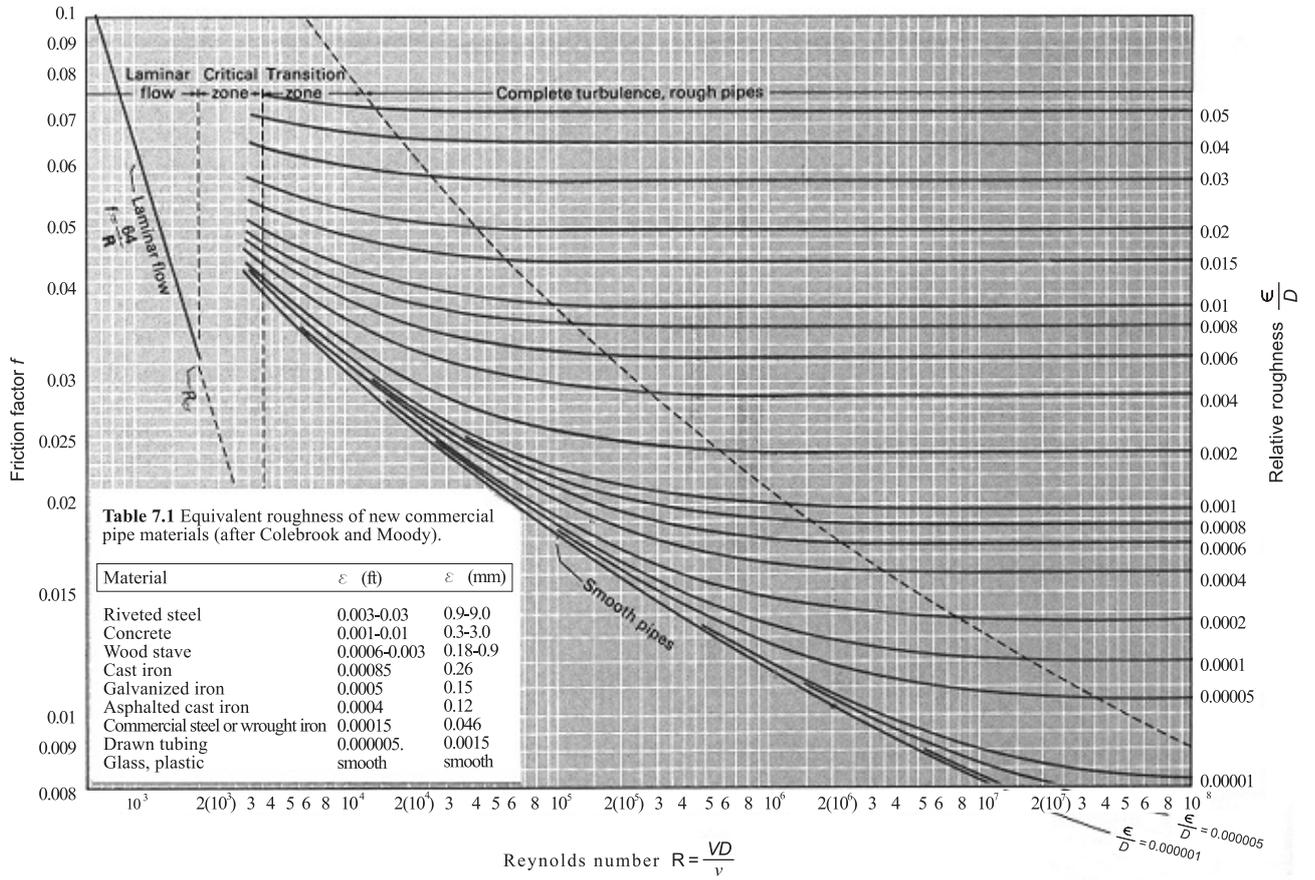


Figure 8.21: Diagramme de Moody pour les pertes de charge en conduites: formule de Colebrook et cas laminaire avec $\lambda = 64/Re_D$ (figure tirée de P.M. Gerhart, R.J. Gross, J.I. Hochstein, *Fundamentals of fluid mechanics, second ed., Addison Wesley*).

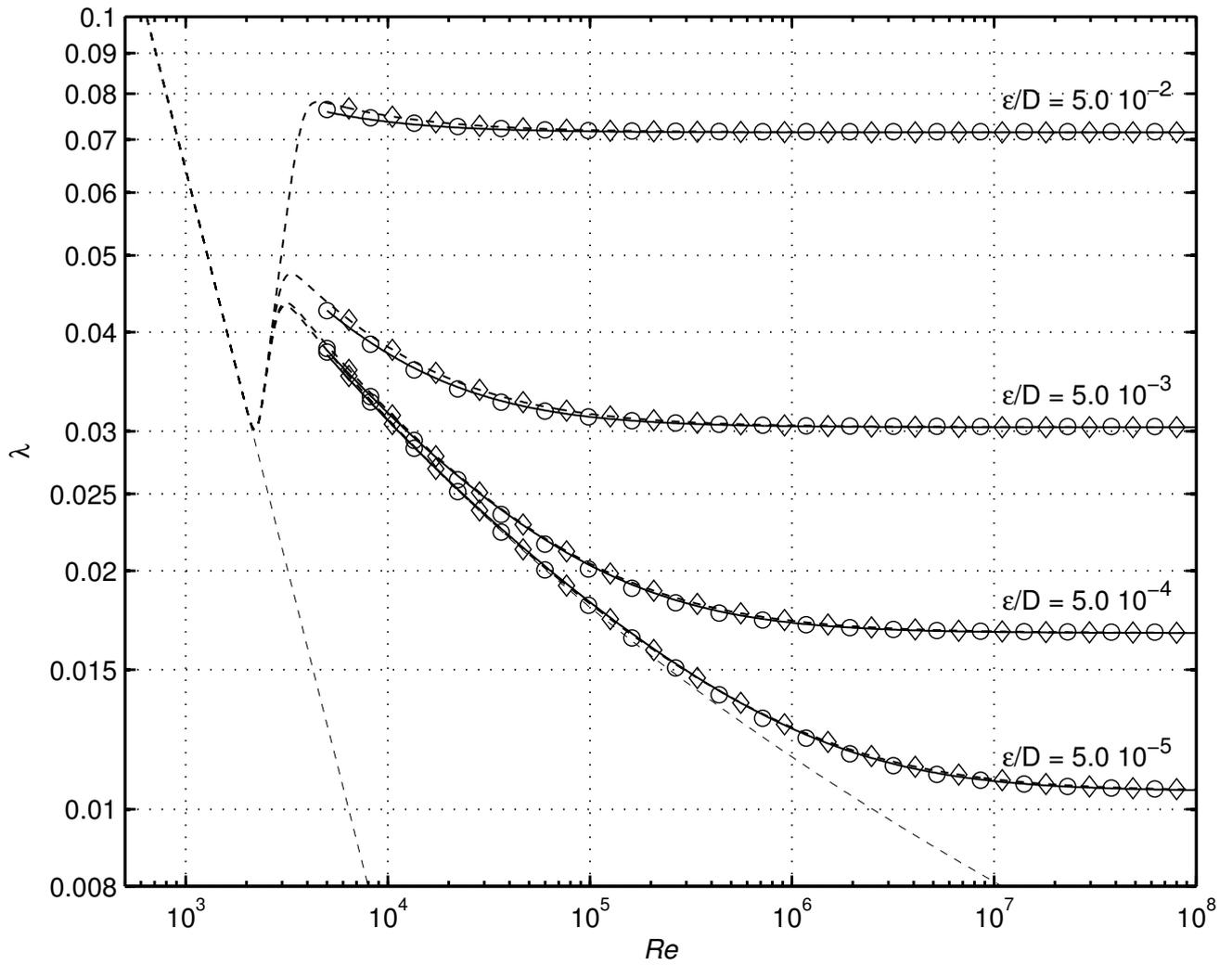


Figure 8.22: Diagramme des pertes de charge en conduites: formule de Colebrook (solid), de Haaland (circle), de Swamee & Jain (diamond), et de Churchill (dash).

8.7 Couches limites turbulentes

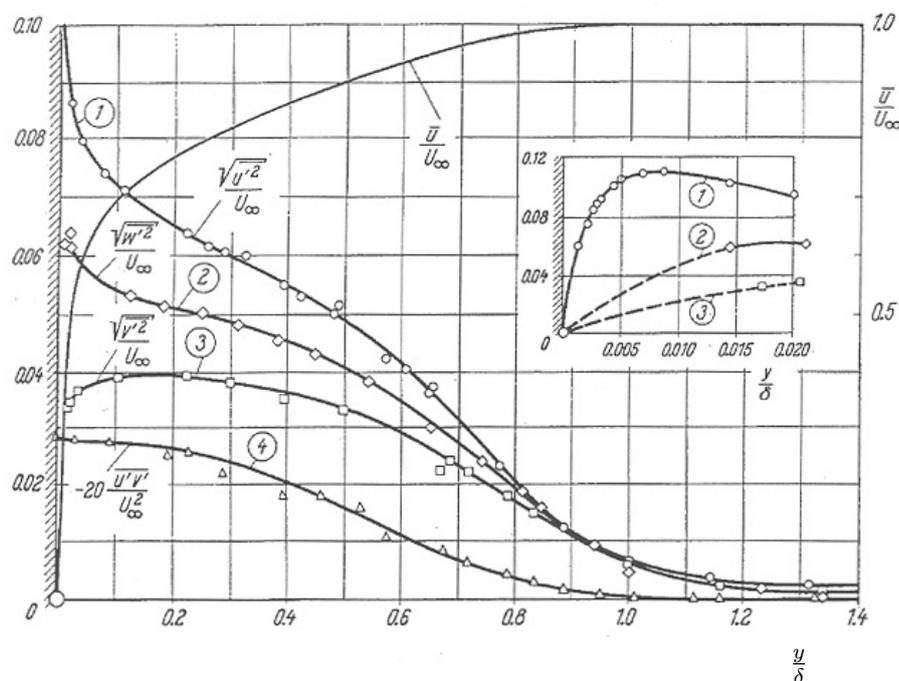


Figure 8.23: Mesures du profil de vitesse, $\frac{\bar{u}}{u_e}$, et de ses fluctuations en couche limite turbulente sur paroi hydrauliquement lisse: composantes $\sqrt{u'u'}$, $\sqrt{v'v'}$, $\sqrt{w'w'}$ et $\bar{\tau}^t/\rho = -u'v'$; la vitesse externe est ici notée U_∞ (figure d'après Klebanoff (1955); figure tirée de H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, sixth ed., MacGraw-Hill).

A quoi peut-on s'attendre en couche limite turbulente? On considère ici uniquement les couches limites avec vitesse externe \bar{u}_e constante (et donc $d\bar{p}_e/dx = 0$). Le cas des couches limites avec \bar{u}_e non constant (couche limite accélérée avec gradient de pression favorable: $d\bar{u}_e/dx > 0$ et $d\bar{p}_e/dx < 0$; couche limite décélérée avec gradient de pression défavorable: $d\bar{u}_e/dx < 0$ et $d\bar{p}_e/dx > 0$, menant éventuellement au décrochage de la couche limite) est couvert dans le cours *MECA 2323 Aérodynamique* dans les deux cas: couches limites laminares et couches limites turbulentes.

8.7.1 Profils universel de vitesse

On considère d'abord le cas avec paroi hydrauliquement lisse. Comme c'est un écoulement avec paroi qui est non-établi mais qui grandit doucement, on aura aussi une zone exprimable en variable interne et une zone exprimable en variable externe. En couche limite,

la contrainte totale (moléculaire + turbulent) n'est plus une droite, voir Fig. 8.23. Cependant, la zone proche de la paroi est encore à contrainte totale essentiellement uniforme: $\bar{\tau}(y) + \bar{\tau}^t(y) \approx \bar{\tau}_w$. On obtient donc nécessairement les mêmes résultats qu'en conduite ou canal, pour la partie du profil universel de vitesse exprimable en variable interne (zones I, II et III-a), voir Fig. 8.24,

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau} = f\left(\frac{y\bar{u}_\tau}{\nu}\right), \quad \bar{u}^+ = f(y^+), \quad (8.154)$$

avec les mêmes formules que précédemment. Cependant, selon les travaux de Coles en couches limites (une analyse sans le shift, voir ci-dessous), les valeurs à utiliser pour le profil logarithmique sont plutôt $\kappa = 0.41$ et $C = 5.0$.

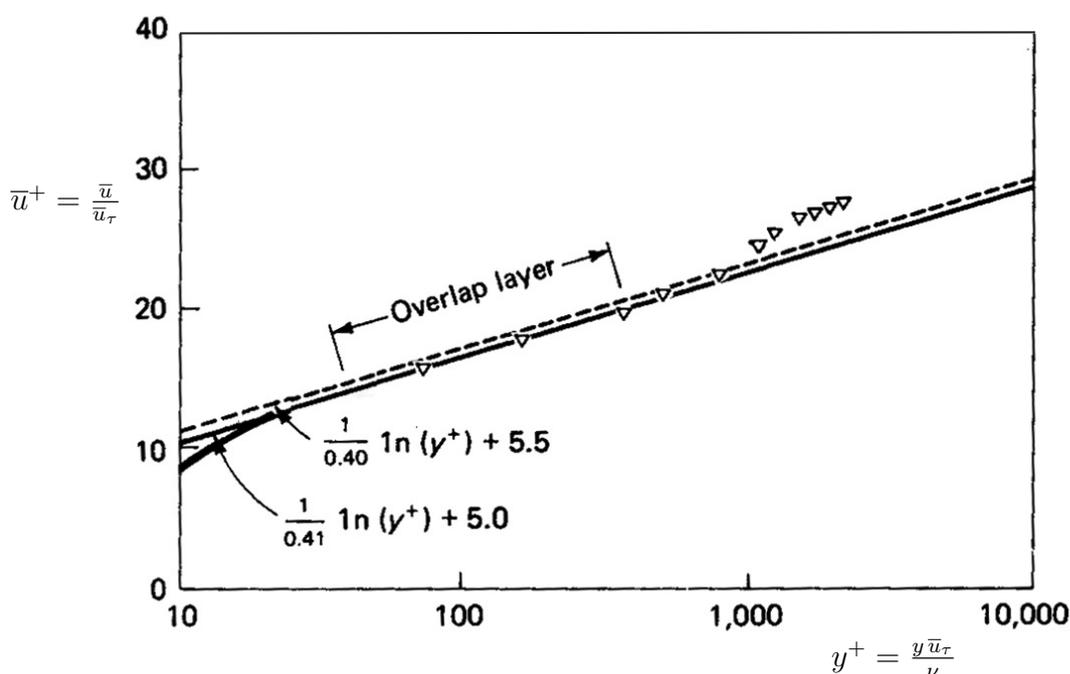


Figure 8.24: Couche limite sur paroi hydrauliquement lisse: profil universel de vitesse, $\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau}$ en fonction de y^+ ; résultats expérimentaux et profil logarithmique (figure tirée de *F. M. White, Viscous Fluid Flow, second ed., MacGraw-Hill*).

Pour la partie turbulente (zone III), exprimée en variable externe, on aura:

$$\frac{\bar{u}_e - \bar{u}}{\bar{u}_\tau} = F\left(\frac{y}{\delta}\right) = F(\eta), \quad (8.155)$$

avec δ l'épaisseur "effective" de la couche limite et $\eta = \frac{y}{\delta}$. Ici, L'épaisseur effective est celle telle que, en $y = \delta$ et avec le modèle mathématique utilisé pour le profil de \bar{u} (voir

plus loin), on obtient effectivement une pente nulle pour le profil, et donc on écrit que $\bar{u} = \bar{u}_e$ en ce y . Au delà, donc pour $y > \delta$, on n'utilise plus de modèle mathématique et on écrit simplement que $\bar{u} = \bar{u}_e$.

En couche limite, il n'y a bien sûr pas de vitesse de débit; on définit C_f en utilisant la vitesse externe, \bar{u}_e . On obtient donc aussi:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} = 1 - \sqrt{\frac{C_f}{2}} F(\eta) \quad (8.156)$$

Coles a aussi montré, sur base de nombreux résultats expérimentaux en couches limites turbulentes (avec \bar{u}_e constant et non constants), que le profil de vitesse peut, dans tous les cas, s'exprimer sous une "forme composite": la combinaison linéaire d'un profil universel exprimé en variable interne et d'une fonction complément exprimée en variable externe:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau} = \bar{u}^+ = f(y^+) + G(\tilde{\eta}) \quad (8.157)$$

avec

$$G(\tilde{\eta}) = \frac{\Pi}{\kappa} 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \tilde{\eta} \right) \quad (8.158)$$

où $\tilde{\eta} = \frac{y}{\delta}$ avec δ la position de y telle que la "fonction complément", G , est maximale. Si on considère la zone turbulente (zone III), cela donne donc:

$$\bar{u}^+ = \left[\frac{1}{\kappa} \log y^+ + C \right] + \frac{\Pi}{\kappa} 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \tilde{\eta} \right) . \quad (8.159)$$

avec, selon Coles, $\Pi \approx 0.55$ dans le cas de la couche limite avec \bar{u}_e constant, et avec aussi $\kappa = 0.41$ et $C = 5.0$ (valeurs calibrées par Coles, sans le shift).

Si on considère le modèle de Coles ci-dessus, on obtient aussi que ce modèle mathématique donne une pente nulle (et donc une vitesse maximum, $\bar{u} = \bar{u}_e$) en $y > \tilde{\delta}$ (i.e., en $\tilde{\eta} > 1$), que l'on définit alors comme l'épaisseur "effective" de la couche limite, $y = \delta$. Plus précisément, on obtient, par dérivation du modèle de Coles, que:

$$\frac{d\bar{u}^+}{dy} = \frac{1}{\kappa y} + G'(\tilde{\eta}) \frac{1}{\tilde{\delta}} \quad \rightarrow \quad \frac{d\bar{u}^+}{d\tilde{\eta}} = \frac{1}{\kappa \tilde{\eta}} + G'(\tilde{\eta}) . \quad (8.160)$$

La position du maximum de vitesse du modèle est donc la position $\tilde{\eta} = \alpha > 1$ telle que

$$G'(\alpha) = -\frac{1}{\kappa \alpha} . \quad (8.161)$$

Avec le modèle, on obtient

$$G'(\tilde{\eta}) = \frac{\Pi}{\kappa} 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \tilde{\eta} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} \tilde{\eta} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\Pi}{\kappa} \pi \sin(\pi \tilde{\eta}) \quad (8.162)$$

et donc α est solution de

$$(\pi \alpha) \sin(\pi \alpha) = -\frac{1}{\Pi} . \quad (8.163)$$

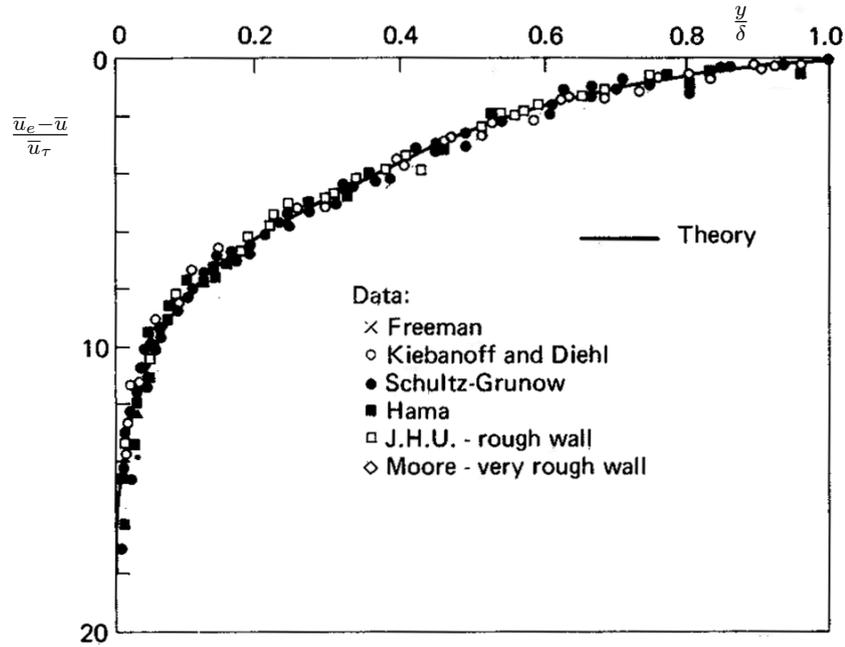


Figure 8.25: Couche limite sur paroi hydrauliquement lisse: profil universel de vitesse, $\frac{\bar{u}_e - \bar{u}}{\bar{u}_\tau}$ exprimé en variable externe, $\eta = \frac{y}{\delta}$; théorie avec profil composite de Coles et résultats expérimentaux (figure tirée de *F. M. White, Viscous Fluid Flow, second ed., MacGraw-Hill*).

Avec la valeur $\Pi = 0.55$, on obtient que $\alpha = 1.165$. On a donc que $\delta = \alpha \tilde{\delta} = 1.165 \tilde{\delta}$.

Finalement, on utilisera la variable $\eta = \frac{y}{\delta}$ pour décrire le profil de vitesse, avec, comme en canal et en conduite, $0 \leq \eta \leq 1$. Comme on a que $\eta = \tilde{\eta}/\alpha$, le profil de vitesse de Coles s'écrit aussi finalement:

$$\bar{u}^+ = \left[\frac{1}{\kappa} \log y^+ + C \right] + \frac{\Pi}{\kappa} 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \alpha \eta \right), \quad (8.164)$$

ce qui correspond bien à une expression similaire au cas présenté en canal et en conduite. On obtient aussi le profil exprimé en variable externe:

$$\frac{\bar{u}_e - \bar{u}}{\bar{u}_\tau} = -\frac{1}{\kappa} \log \eta + \frac{\Pi}{\kappa} 2 \left[\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \alpha \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \alpha \eta \right) \right] = F(\eta), \quad (8.165)$$

qui est bien conforme à une expression de type Eq. (8.155). C'est un relativement bon modèle de profil pour toute la zone turbulente.

Des résultats de simulation numérique directe (DNS, Direct Numerical Simulation) d'une couche limite turbulente sont aussi présentés en Fig. 8.26. Les courbes présentées

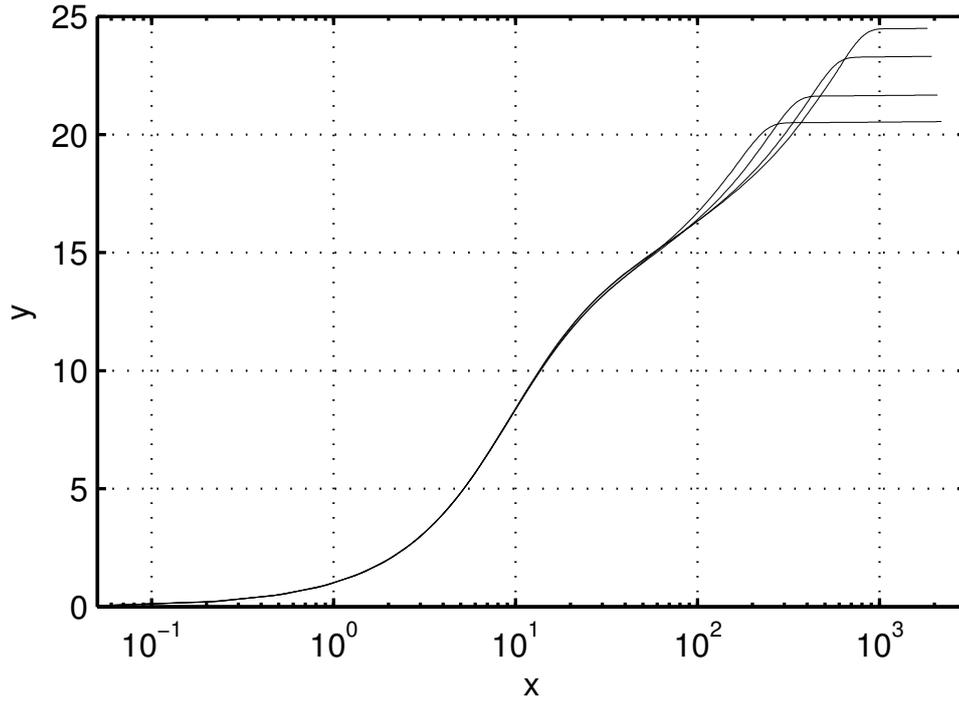


Figure 8.26: Couche limite sur paroi hydrauliquement lisse: profil universel de vitesse, $\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau}$ en fonction de y^+ ; résultats de simulation numérique directe (DNS) (figure produite à partir de résultats obtenus par P. Schlatter et L. Brandt (2008), courtoisie de P. Schlatter).

correspondent à des positions x de plus en plus grandes, donc à des nombres de Reynolds de plus en plus grands: voir Table 8.3 pour les valeurs obtenues de $Re_\tau = \tilde{\delta}^+ = \frac{\tilde{\delta} \bar{u}_\tau}{\nu}$, de $Re_\delta = \frac{\tilde{\delta} \bar{u}_e}{\nu}$ et de $Re_\theta = \frac{\theta \bar{u}_e}{\nu}$. En particulier, le dernier profil est à suffisamment grand Reynolds qu'on y distingue déjà relativement bien une zone III-a de type logarithmique.

On peut aussi obtenir de la DNS la fonction complément: voir Fig. 8.27 où on a fait l'exercice pour la station correspondant au plus grand Reynolds et avec deux fonctions (fonction utilisée par Coles, $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} \tilde{\eta}\right)$, et fonction polynomiale, $3\tilde{\eta}^2 - 2\tilde{\eta}^3$).

Il est de nouveau utile d'ajouter que de récentes investigations (Winckelmans et Duponcheel, 2008) ont montré qu'il faut aussi un léger "shift" dans la loi logarithmique (zone III-a). La loi est plutôt:

$$\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \log(y^+ + y_0^+) + C, \quad (8.166)$$

ce qui correspond au modèle

$$\frac{\nu_t}{\nu} = \kappa (y^+ + y_0^+) \quad (8.167)$$

$\tilde{\delta}^+$	$Re_{\tilde{\delta}}$	Re_{θ}
236	4870	670
351	7620	1000
591	13780	1734
842	20620	2512

Table 8.3: Nombres de Reynolds correspondants aux profils montrés pour la DNS d'une couche limite turbulente ($\tilde{\delta}$ obtenu en utilisant $\kappa = 0.41$).

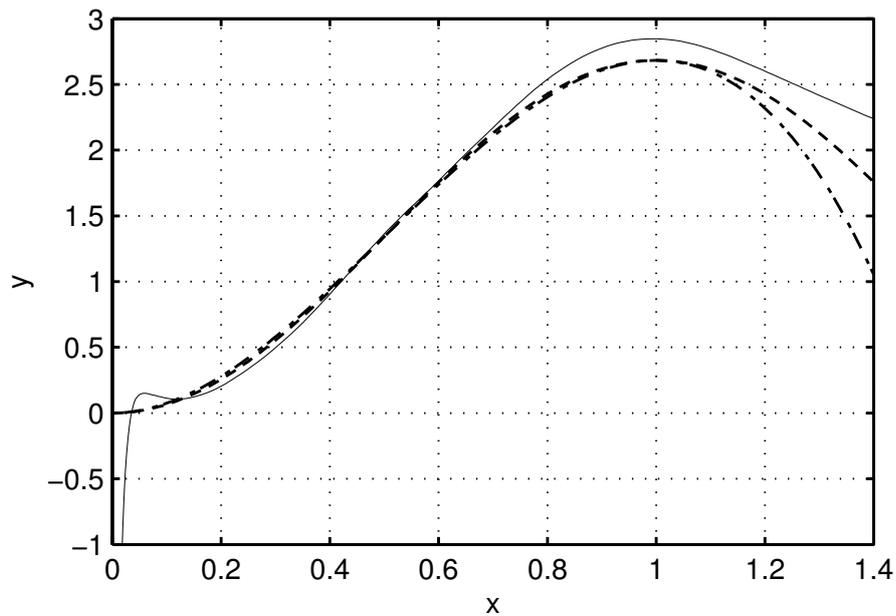


Figure 8.27: Couche limite sur paroi hydrauliquement lisse: fonction complémente, $G(\tilde{\eta}) = \bar{u}^+ - [\frac{1}{\kappa} \log y^+ + C]$ (avec $\kappa = 0.41$ et $C = 5.0$); résultats de DNS à $\tilde{\delta}^+ = 842$ (solid, figure produite à partir de résultats obtenus par P. Schlatter et L. Brandt (2008), courtoisie de P. Schlatter) et modèle avec $\Pi = 0.55$ selon Coles (fonction de Coles (dash) et fonction polynomiale (dash-dot)).

$\tilde{\delta}^+$	$Re_{\tilde{\delta}}$	Re_{θ}
237	4870	670
343	7440	1000
582	13560	1734
823	20150	2512

Table 8.4: Nombres de Reynolds correspondants aux profils montrés pour la DNS d'une couche limite turbulente ($\tilde{\delta}$ obtenu en utilisant le shift $y_0^+ = 6$ et $\kappa = 0.37$).

dans la zone III-a. La valeur du “shift” est la même que celle obtenue en canal: $y_0^+ \approx 6$. Lorsqu'on prend en compte le shift, on obtient alors aussi la même valeur pour la constante de von Karman que celle obtenue en canal: $\kappa = 0.37$. Les écoulement en canal et en couche limite ont donc bien les mêmes constantes universelles!

On peut alors aussi obtenir de la DNS la valeur de $\tilde{\delta}$, voir Table 8.4, ainsi que la fonction complément, voir Fig. 8.28 où on a fait l'exercice pour la station correspondant au plus grand Reynolds et avec les deux fonctions modèle. Les valeurs calibrées sont alors $\kappa = 0.37$, $C = 3.7$ et $\Pi = 0.435$. On obtient aussi la valeur de α (à utiliser pour obtenir $\eta = \tilde{\eta}/\alpha$ et/ou $\delta = \alpha\tilde{\delta}$): avec la fonction de Coles, on cherche la solution de $(\pi\alpha) \sin(\pi\alpha) = -1/\Pi$ qui est $\alpha = 1.207$; avec la fonction polynomiale, on cherche la solution de $12\alpha^2(1-\alpha) = -1/\Pi$ qui est $\alpha = 1.146$.

Finalement, Winckelmans et Duponcheel (2008) ont aussi proposé, en se basant sur la forme mathématique du “meilleur profil en canal”, un modèle que l'on peut espérer performant en couche limite:

$$\begin{aligned} \bar{u}^+ &= \left[\frac{1}{\kappa} \log(y^+ + y_0^+) + C \right] - \frac{\eta}{\kappa} + \frac{\Pi}{\kappa} 2(3\eta^2 - 2\eta^3) \\ &= \left[\frac{1}{\kappa} \log(y^+ + y_0^+) + C \right] - \frac{\beta\tilde{\eta}}{\kappa} + \frac{\Pi}{\kappa} 2(3(\beta\tilde{\eta})^2 - 2(\beta\tilde{\eta})^3) . \end{aligned} \quad (8.168)$$

Les valeurs calibrées sont alors $\kappa = 0.37$ et $C = 3.9$ (donc comme celles en canal!), $\Pi = 0.87$ et $\beta = 1/\alpha = 0.893$ (calculé tel que $G(\tilde{\eta})$ est maximum en $\tilde{\eta} = 1$, ce qui revient à chercher la solution de $12\beta(1-\beta) = 1/\Pi$: exercice). La fonction complément ainsi obtenue correspond effectivement très bien aux résultats exacts: voir Fig. 8.29.

Si on utilise plutôt

$$\begin{aligned} \bar{u}^+ &= \left[\frac{1}{\kappa} \log(y^+ + y_0^+) + C \right] - \frac{\eta}{\kappa} + \frac{\Pi}{\kappa} 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) \\ &= \left[\frac{1}{\kappa} \log(y^+ + y_0^+) + C \right] - \frac{\beta\tilde{\eta}}{\kappa} + \frac{\Pi}{\kappa} 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\beta\tilde{\eta}\right) , \end{aligned} \quad (8.169)$$

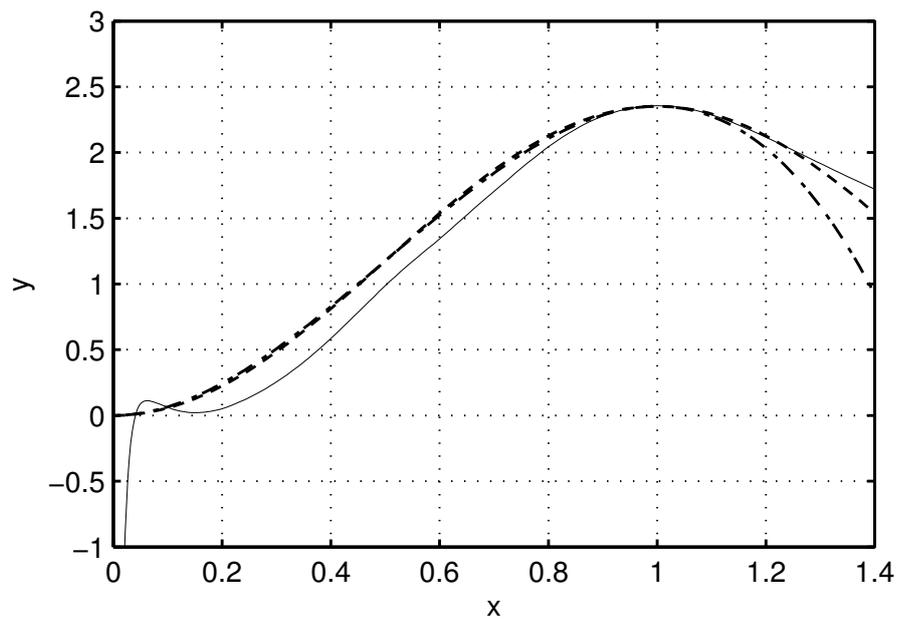


Figure 8.28: Couche limite sur paroi hydrauliquement lisse: fonction compléent, $G(\tilde{\eta}) = \bar{u}^+ - \left[\frac{1}{\kappa} \log(y^+ + y_0^+) + C \right]$ (avec $\kappa = 0.37$ et $C = 3.7$); résultats de DNS à $\tilde{\delta}^+ = 823$ (solid, figure produite à partir de résultats obtenus par P. Schlatter et L. Brandt (2008), courtoisie de P. Schlatter) et modèle avec $\Pi = 0.435$ (fonction de Coles (dash) et fonction polynomiale (dash-dot)).

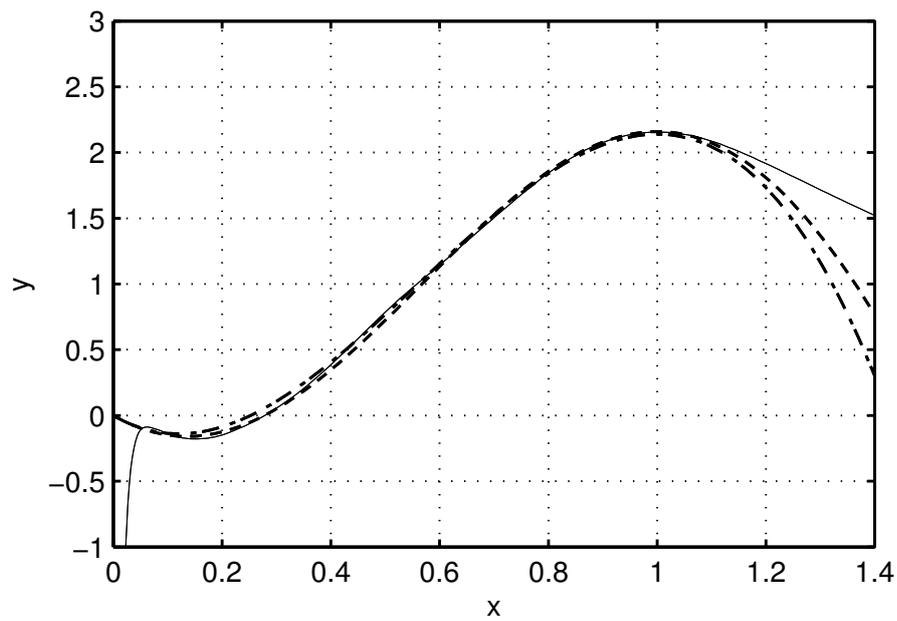


Figure 8.29: Couche limite sur paroi hydrauliquement lisse: fonction compléent, $G(\tilde{\eta}) = \bar{u}^+ - \left[\frac{1}{\kappa} \log(y^+ + y_0^+) + C \right]$ (avec $\kappa = 0.37$ et $C = 3.9$); résultats de DNS à $\tilde{\delta}^+ = 823$ (solid, figure produite à partir de résultats obtenus par P. Schlatter et L. Brandt (2008), courtoisie de P. Schlatter) et modèle avec $\Pi = 0.87$ (fonction de Coles (dash) et fonction polynomiale (dash-dot)).

on obtient, avec $\Pi = 0.87$ que $\beta = 1/\alpha = 0.881$ (calculé tel que $G(\tilde{\eta})$ est maximum en $\tilde{\eta} = 1$, ce qui revient à chercher la solution de $\pi \sin(\pi \beta) = 1/\Pi$: exercice).

On peut bien sûr également utiliser l'approche composite en régime hydrauliquement rugueux. Le profil composite de Coles sera alors

$$\bar{u}^+ = \left[\frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{y + y_0}{\epsilon} \right) + B \right] + \frac{\Pi}{\kappa} 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \alpha \eta \right) \quad (8.170)$$

avec $y_0 = e^{-\kappa B} \epsilon \ll \epsilon$ utilisé pour avoir $\bar{u}^+ = 0$ en $y = 0$. On vérifie bien que le profil exprimé en variable externe est le même que l'on soit en régime lisse ou rugueux. En effet, on obtient bien Eq. (8.165) dans les deux cas. De même, le profil composite de Winckelmans et Duponcheel sera, en régime hydrauliquement rugueux:

$$\bar{u}^+ = \left[\frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{y + y_0}{\epsilon} \right) + B \right] - \frac{\eta}{\kappa} + \frac{\Pi}{\kappa} 2 (3\eta^2 - 2\eta^3) . \quad (8.171)$$

8.7.2 Profil de vitesse simplifié en exposant pour toute la zone turbulente

Pour les couches limites, certains ont aussi utilisé, pour la zone turbulente, un profil simplifié:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}} = \eta^{\frac{1}{n}} . \quad (8.172)$$

Les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement sont alors liées à l'exposant n :

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} \right) \frac{dy}{\delta} = \int_0^1 1 - \eta^{\frac{1}{n}} d\eta = \frac{1}{(n+1)} , \quad (8.173)$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_0^\delta \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} \left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} \right) \frac{dy}{\delta} = \int_0^1 \eta^{\frac{1}{n}} \left(1 - \eta^{\frac{1}{n}} \right) d\eta = \frac{n}{(n+1)(n+2)} , \quad (8.174)$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{(n+2)}{n} . \quad (8.175)$$

Avec $n = 7$, cela donne $\delta^*/\delta = 0.125$, $\theta/\delta = 0.0972$ et $H = 1.29$.

Ces valeurs sont à comparer avec celles obtenues pour la couche limite laminaire: $\delta^*/\delta_{0.99} = 1.72/4.91 = 0.351$, $\theta/\delta_{0.99} = 0.664/4.91 = 0.135$ et $H = 2.59$. Le profil de vitesse d'une couche limite turbulente est donc beaucoup plus plein que celui d'une couche limite laminaire.

Le profil en exposant mène aussi à :

$$\frac{\bar{u}_e - \bar{u}}{\bar{u}_\tau} = \frac{\bar{u}_e}{\bar{u}_\tau} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}} \right) = \sqrt{\frac{2}{C_f}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}} \right) . \quad (8.176)$$

La comparaison avec le profil universel, $\frac{\bar{u}_e - \bar{u}}{\bar{u}_\tau} = F(\frac{y}{\delta})$, nous montre, de nouveau, que le profil en exposant n'est pas universel. Au mieux, on peut espérer un fit "acceptable" inspiré des résultats en conduite: i.e., que n soit lié à $\sqrt{\frac{2}{C_f}}$; on verra que c'est effectivement le cas.

Formule simplifiée du coefficient de frottement pour la couche limite hydrauliquement lisse

En suivant Prandtl (1927), on peut facilement obtenir une estimation de la variation en x des grandeurs globales: épaisseurs de la couche limite, coefficients de frottement. Pour cela, on utilise l'équation intégrale de von Karman (valable en écoulement laminaire ou turbulent). Dans le cas avec \bar{u}_e constant, elle se réduit simplement à:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2}. \quad (8.177)$$

Si on fixe la valeur de n à $n = 7$, on obtient donc:

$$0.0972 \frac{d\delta}{dx} \approx \frac{C_f}{2}. \quad (8.178)$$

Si on dispose de résultats expérimentaux qui permettent de lier C_f à δ , on pourra alors intégrer cette relation et obtenir $C_f(x)$ et donc tout le reste. Pour ce faire, on "triche" un peu, comme fait par Prandtl: on suppose que la loi empirique de Blasius (obtenue en conduite) sous la forme Eq. (8.179) peut être partiellement utilisée dans le contexte des couches limites. On écrit donc:

$$\frac{\bar{u}_e}{\bar{u}_\tau} \approx 8.56 \delta^{+1/7} = 8.56 \left(\frac{\delta \bar{u}_\tau}{\nu} \right)^{1/7}. \quad (8.179)$$

Cela conduit alors à

$$\frac{C_f}{2} = \left(\frac{\bar{u}_\tau}{\bar{u}_e} \right)^2 = 8.56^{-7/4} \left(\frac{\delta \bar{u}_e}{\nu} \right)^{-1/4}. \quad (8.180)$$

En utilisant ceci dans l'équation intégrale de von Karman, on obtient une relation intégrable:

$$0.0972 \frac{d\delta}{dx} \approx 0.0233 \left(\frac{\delta \bar{u}_e}{\nu} \right)^{-1/4}. \quad (8.181)$$

L'intégration conduit à la variation de toutes les grandeurs globales en fonction de $Re_x = x \bar{u}_e / \nu$:

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{0.382}{Re_x^{1/5}}, \quad (8.182)$$

$$\frac{\delta^*}{x} \approx \frac{0.0477}{Re_x^{1/5}}, \quad (8.183)$$

$$\frac{\theta}{x} \approx \frac{0.0371}{Re_x^{1/5}}, \quad (8.184)$$

$$C_f \approx \frac{0.0594}{Re_x^{1/5}}, \quad (8.185)$$

$$C_{f,m} \approx \frac{0.0742}{Re_x^{1/5}}, \quad (8.186)$$

le dernier résultat étant celui pour le coefficient de frottement moyen sur une longueur x . On se souvient aussi du résultat général valable en couche limite avec \bar{u}_e constant: $\frac{C_{f,m}}{2} = \frac{\theta}{x}$.

Donc, selon le présent modèle proposé par Prandtl, une couche limite turbulente grandit comme $x^{4/5}$: elle grandit donc beaucoup plus rapidement qu'une couche limite laminaire (qui grandit comme $x^{1/2}$). Quelle est la validité de ces résultats? Ils coïncident bien avec les résultats expérimentaux ($\pm 5\%$) tant que $Re_x < 10^7$. Cela correspond à:

$$Re_\delta = \frac{\delta \bar{u}_e}{\nu} = \frac{x \bar{u}_e}{\nu} \frac{\delta}{x} \approx Re_x \frac{0.382}{Re_x^{1/5}} = 0.382 Re_x^{4/5} \approx 1.5 \cdot 10^5. \quad (8.187)$$

8.7.3 Formules générales du coefficient de frottement pour la couche limite hydrauliquement lisse

Considérons à nouveau le profil universel de vitesse pour les couches limites en régime hydrauliquement lisse. Si on considère le profil composite en zone turbulente et qu'on l'évalue en $y = \delta$, on obtient (dans tous les cas, puisque $y_0^+ \ll \delta^+$):

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}_e}{\bar{u}_\tau} &= \sqrt{\frac{2}{C_f}} = \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{\delta \bar{u}_\tau}{\nu} \right) + C + G(1) \\ &= \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{\delta \bar{u}_e}{\nu} \sqrt{\frac{C_f}{2}} \right) + C + G(1). \end{aligned} \quad (8.188)$$

Ceci constitue une relation implicite donnant $\sqrt{\frac{2}{C_f}}$ en fonction de $Re_\delta = \frac{\delta \bar{u}_e}{\nu}$. Pour la suite, on utilisera la "variable de travail", z :

$$z \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{2}{C_f}}. \quad (8.189)$$

On a donc:

$$z = \frac{1}{\kappa} \log \left(Re_\delta \frac{1}{z} \right) + C + G(1) = \frac{1}{\kappa} \log \left(Re_\delta \frac{c}{z} \right) . \quad (8.190)$$

avec $c = e^{(\kappa(C+G(1)))}$. Avec le profil de Coles, on obtient $1/\kappa = 2.44$ et $c = e^{3.08} \approx 22$. Avec le profil de Coles amélioré avec le shift, on obtient $1/\kappa = 2.70$ et $c = e^{2.15} \approx 8.6$. Avec le profil de Winckelmans et Duponcheel avec le shift, on obtient $1/\kappa = 2.70$ et $c = e^{2.18} \approx 8.9$.

Une approximation en loi de puissance de cette relation (basée sur le profil de Coles) a aussi été proposée par White:

$$z^2 \approx 100 Re_\delta^{1/6} . \quad (8.191)$$

Si on retourne alors à l'équation intégrale de von Karman, on obtient alors:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d(Re_\theta)}{d(Re_x)} = \frac{C_f}{2} = \frac{1}{z^2} \approx \frac{0.010}{Re_\delta^{1/6}} \quad (8.192)$$

En supposant, de plus, que θ/δ reste constant (ce qui n'est pas tout à fait vrai, voir plus loin), et en prenant la valeur à $n = 7$ (donc $\theta/\delta \approx 0.0972$), on obtient alors une relation intégrable pour Re_δ , et donc pour le reste. Cela donne, in fine:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{Re_\delta}{Re_x} \approx \frac{0.162}{Re_x^{1/7}} , \quad (8.193)$$

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{Re_{\delta^*}}{Re_x} \approx \frac{0.0203}{Re_x^{1/7}} , \quad (8.194)$$

$$\frac{\theta}{x} = \frac{Re_\theta}{Re_x} \approx \frac{0.0158}{Re_x^{1/7}} , \quad (8.195)$$

$$C_f \approx \frac{0.0271}{Re_x^{1/7}} , \quad (8.196)$$

$$C_{f,m} \approx \frac{0.0316}{Re_x^{1/7}} . \quad (8.197)$$

Donc, selon le présent modèle de White, une couche limite turbulente grandit comme $x^{6/7}$. Quelle est la validité de ces résultats? Ils sont assez généraux (meilleurs que ceux obtenus par Prandtl en 1927) et comparent bien avec les résultats expérimentaux ($\pm 5\%$) jusqu'à $Re_x < 10^9$ (ce qui correspond à $Re_\delta \approx 8 \cdot 10^6$).

On peut cependant faire mieux: en intégrant deux fois le profil composite de Coles,

une fois pour déterminer δ^*/δ , et une fois pour déterminer $(\delta^* - \theta)/\delta$, on obtient:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e}\right) dy = \frac{\bar{u}_\tau}{\bar{u}_e} \int_0^1 \left(\frac{\bar{u}_e - \bar{u}}{\bar{u}_\tau}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (8.198)$$

$$= \frac{1}{z} \int_0^1 F(\eta) d\eta = \frac{a}{z} \quad (8.199)$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} \left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e}\right) dy \quad (8.200)$$

$$\frac{\delta^*}{\delta} - \frac{\theta}{\delta} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e}\right)^2 dy = \left(\frac{\bar{u}_\tau}{\bar{u}_e}\right)^2 \int_0^1 \left(\frac{\bar{u}_e - \bar{u}}{\bar{u}_\tau}\right)^2 d\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (8.201)$$

$$= \frac{1}{z^2} \int_0^1 F^2(\eta) d\eta = \frac{b}{z^2}. \quad (8.202)$$

En combinant les deux résultats, on obtient la relation suivante:

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{a}{z} - \frac{b}{z^2}. \quad (8.203)$$

Avec le profil de Coles, on obtient $a = 3.4$ et $b = 23$. Avec le profil de Coles amélioré avec le shift, on obtient $a = 3.5$ et $b = 24$. Avec le profil de Winckelmans et Duponcheel avec le shift, on obtient $a = 3.7$ et $b = 25.5$. Les résultats sont donc fort proches.

Le résultat Eq. (8.203) est général et fondamental. Il montre bien que θ n'est pas directement proportionnel à δ . Autrement dit, il montre bien que le paramètre n des profils simplifiés en exposant doit être fonction de z :

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)} = \frac{\theta}{\delta} = \frac{a}{z} - \frac{b}{z^2}. \quad (8.204)$$

Comme les valeurs typiques de z sont:

$$20 \leq z \leq 40, \quad (8.205)$$

on trouve que:

$$0.077 \leq \frac{\theta}{\delta} \leq 0.12. \quad (8.206)$$

Comme les valeurs typiques de n sont:

$$6 \leq n \leq 10, \quad (8.207)$$

on trouve que:

$$0.076 \leq \frac{\theta}{\delta} \leq 0.11. \quad (8.208)$$

On voit donc que tout ceci est bien cohérent.

Le résultat général, Eq. (8.203), peut ici être combiné avec l'approximation de White ci-dessus, Eq. (8.191). Il permet alors d'intégrer plus exactement l'équation intégrale de

von Karman, et donc d'obtenir une meilleure approximation pour la variation de toutes les grandeurs globales en fonction de x . On peut faire encore beaucoup mieux: tout intégrer exactement. En effet, Eq. (8.190) peut aussi s'écrire dans l'autre sens, sous une forme explicite:

$$Re_\delta = \frac{z}{c} e^{\kappa z} \quad (8.209)$$

On peut donc écrire l'équation intégrale de von Karman, en utilisant aussi le résultat général, Eq. (8.203), sous la forme différentielle:

$$z^2 d \left(\left(\frac{a}{z} - \frac{b}{z^2} \right) \frac{z}{c} e^{\kappa z} \right) = z^2 d \left(\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c z} \right) e^{\kappa z} \right) = dRe_x . \quad (8.210)$$

Cela donne, après intégration, une relation exacte entre z et Re_x :

$$\frac{a}{c \kappa^2} \left[\left((\kappa z)^2 - 2 \kappa z + 2 \right) e^{\kappa z} - 2 \right] - \frac{b}{c \kappa} \left[(\kappa z - 2) e^{\kappa z} + 2 \right] = Re_x . \quad (8.211)$$

On a donc obtenu Re_x en fonction de z et non z en fonction de Re_x . On peut ensuite obtenir tout le reste: C_f , Re_θ , etc.

Tous ces résultats sont montrés à la Fig. 8.30. On a également reporté sur le graphe une autre "bonne formule" explicite, proposée par White (1969) et basée sur une autre analyse:

$$z = 2.10 \log(0.060 Re_x) \quad \Longleftrightarrow \quad C_f = \frac{0.455}{\log^2(0.060 Re_x)} , \quad (8.212)$$

Selon White, cette formule est précise à 1%. Pour le coefficient moyen, il propose aussi une formule explicite:

$$z_m = 1.96 \log(0.060 Re_x) \quad \Longleftrightarrow \quad C_{f,m} = \frac{0.523}{\log^2(0.060 Re_x)} . \quad (8.213)$$

8.7.4 Formule générale du coefficient de frottement pour la couche limite hydrauliquement rugueuse

Considérons le profil universel de vitesse pour les couches limites turbulentes hydrauliquement rugueuses (i.e., avec $\epsilon^+ \geq 70$). Si on considère le profil composite de type Coles et qu'on l'évalue en $y = \delta$, on obtient:

$$z = \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{\delta}{\epsilon} \right) + B + G(1) = \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{c \delta}{\epsilon} \right) \quad (8.214)$$

avec $c = e^{\kappa(B+G(1))}$, ce qui constitue une relation explicite entre z et δ/ϵ .

On estimera ici, faute de données expérimentales, que $B \approx C + 3.0$ (comme ce fut le cas en conduite). Avec le profil de Coles, on obtient alors $1/\kappa = 2.44$ et $c = e^{4.31} \approx 74$.

Avec le profil de Coles amélioré avec le shift, on obtient $1/\kappa = 2.70$ et $c = e^{3.26} \approx 26$. Avec le profil de Winckelmans et Duponcheel avec le shift, on obtient $1/\kappa = 2.70$ et $c = e^{3.29} \approx 27$.

L'introduction dans l'équation intégrale de von Karman donne alors

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\kappa^2}{\log^2\left(c \frac{\delta}{\epsilon}\right)}. \quad (8.215)$$

Si on simplifie, en supposant que $\theta/\delta \approx 0.0972$ (cas $n = 7$), on obtient:

$$\frac{0.0972}{\kappa^2} \log^2\left(c \frac{\delta}{\epsilon}\right) \frac{d\delta}{dx} = 1, \quad (8.216)$$

et donc

$$0.578 \log^2\left(c \frac{\delta}{\epsilon}\right) d\left(\frac{\delta}{\epsilon}\right) = d\left(\frac{x}{\epsilon}\right). \quad (8.217)$$

L'intégration donne

$$\frac{x}{\epsilon} = 0.578 \left(\frac{\delta}{\epsilon}\right) \left[\log^2\left(c \frac{\delta}{\epsilon}\right) - 2 \log\left(c \frac{\delta}{\epsilon}\right) + 2 \right]. \quad (8.218)$$

Pour ϵ fixé, cette relation donne $\frac{x}{\epsilon}$ en fonction de $\frac{\delta}{\epsilon}$, et donc $\frac{\delta}{\epsilon}$ en fonction de $\frac{x}{\epsilon}$, et donc aussi $\frac{\theta}{\epsilon}$ et C_f , voir Fig. 8.31.

On peut faire mieux: utiliser la relation générale, $\frac{\theta}{\delta}$ en fonction de z , Eq. (8.203), et tout intégrer exactement. L'expression finale est complexe; le résultat est aussi présenté sur la Fig. 8.31.

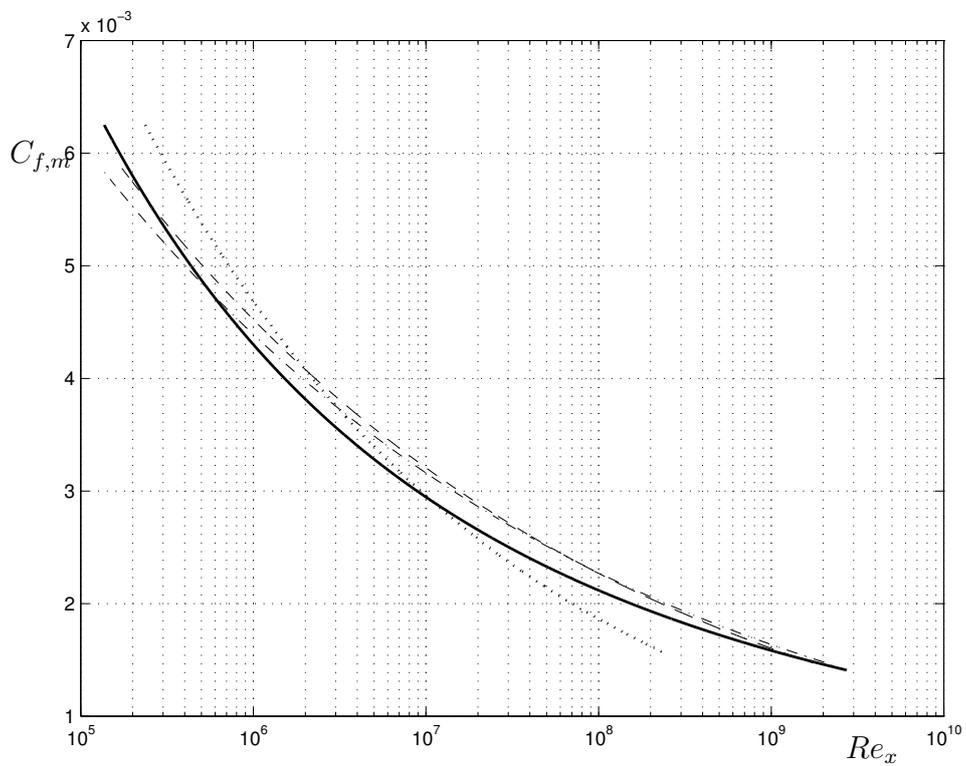
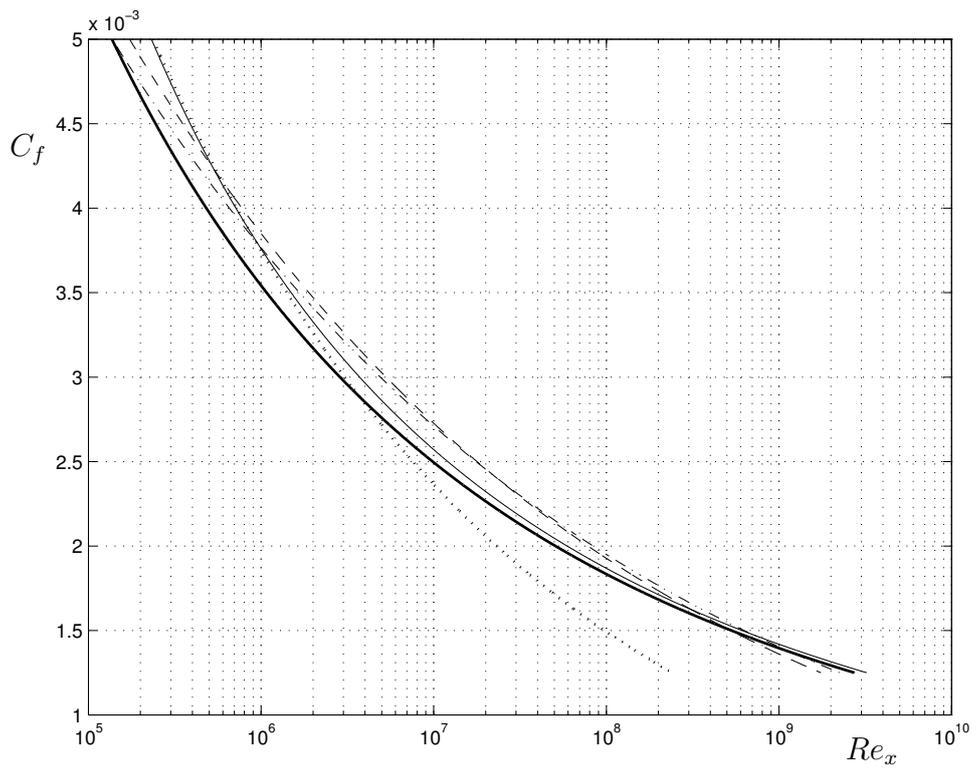


Figure 8.30: Coefficient de frottement C_f et coefficient de frottement moyen $C_{f,m}$ pour la couche limite sur paroi hydrauliquement lisse en fonction de Re_x : formule de Prandtl (dot), formule avec fit de White et avec $\theta/\delta = 0.0972$ (dash dot), formule avec fit de White et avec $\theta/\delta = f(z)$ (dash), formule complète (sans fit) et avec $\theta/\delta = f(z)$ (thick solid), formule explicite de White (solid).

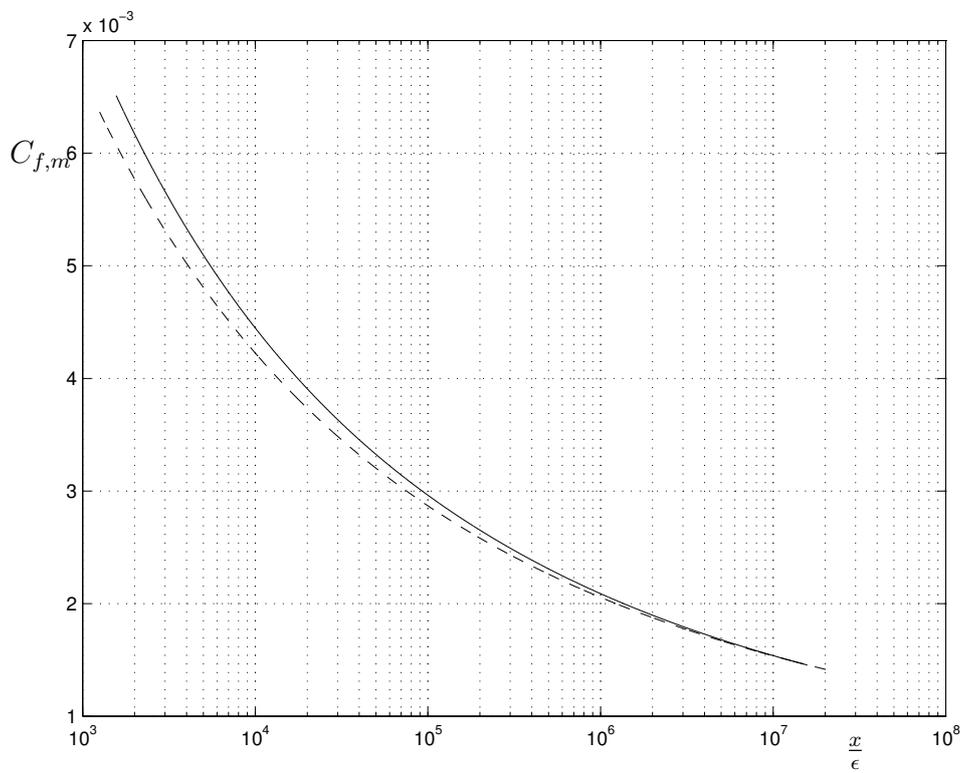
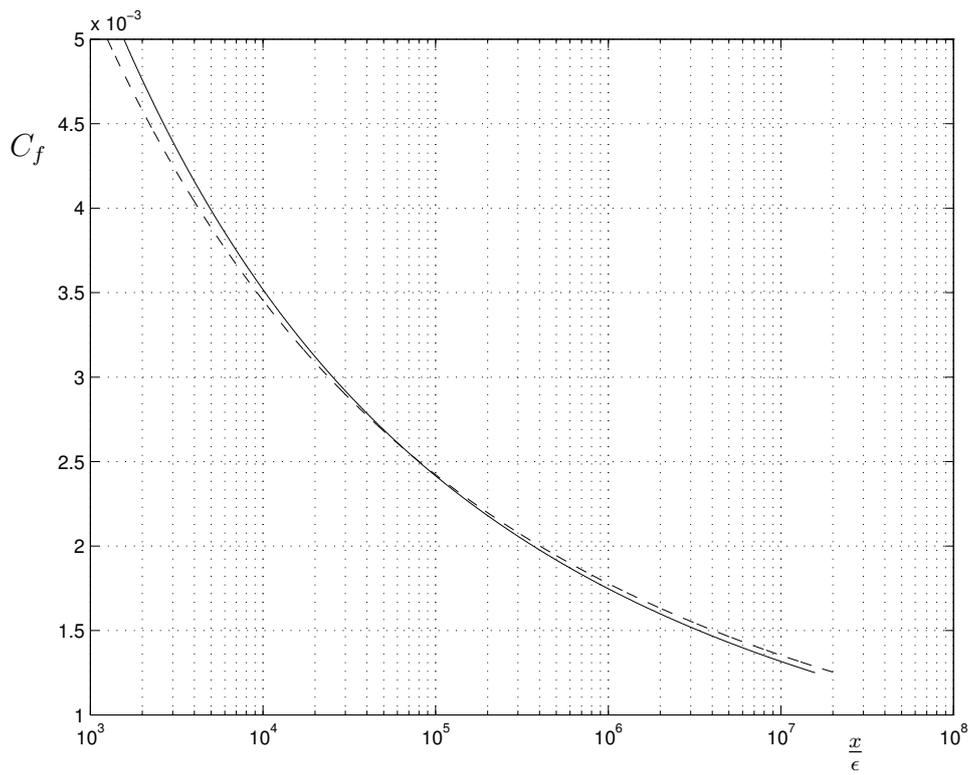


Figure 8.31: Coefficient de frottement C_f et coefficient de frottement moyen $C_{f,m}$ pour la couche limite hydrauliquement rugueuse en fonction de $\frac{x}{\epsilon}$; intégration avec $\theta/\delta = 0.0972$ (dash), intégration exacte avec $\theta/\delta = f(z)$ (solid).

8.8 Profils de température et transfert de chaleur

On a considéré les profils de vitesse en conduite, canal et couche limite, et le transfert de quantité de mouvement pariétal associé (coefficients de perte de charge et/ou de frottement). On considère ici les profils de température correspondants, et le transfert de chaleur pariétal associé.

8.8.1 Couche limite avec $Pr = 1$

En couches limites turbulentes avec \bar{u}_e constant, les équations de conservation se réduisent à:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (8.219)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left((\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right), \quad (8.220)$$

$$\bar{u} c \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} c \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + c \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right), \quad (8.221)$$

Si on multiplie l'équation de quantité de mouvement par \bar{u} , on obtient:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{u}^2}{2} \right) + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{u}^2}{2} \right) &= \bar{u} \frac{\partial}{\partial y} \left((\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \\ &= -(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left((\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{u}^2}{2} \right) \right). \end{aligned} \quad (8.222)$$

En additionnant cette équation avec celle de l'énergie on obtient l'équation pour l'énergie interne totale, $c\bar{T} + \frac{\bar{u}^2}{2}$:

$$\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(c\bar{T} + \frac{\bar{u}^2}{2} \right) + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \left(c\bar{T} + \frac{\bar{u}^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial}{\partial y} (c\bar{T}) + (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{u}^2}{2} \right) \right). \quad (8.223)$$

Considérons, pour la suite, que $Pr_t = 1$ est une bonne approximation pour les écoulements turbulents. On obtient alors, dans le cas de fluides avec $Pr = 1$, que l'équation se réduit davantage:

$$\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(c\bar{T} + \frac{\bar{u}^2}{2} \right) + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \left(c\bar{T} + \frac{\bar{u}^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left((\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial y} \left(c\bar{T} + \frac{\bar{u}^2}{2} \right) \right). \quad (8.224)$$

Les équations pour \bar{u} et pour $c\bar{T} + \frac{\bar{u}^2}{2}$ sont alors identiques! Il s'ensuit que l'on doit avoir une relation linéaire entre les deux profils:

$$c\bar{T} + \frac{\bar{u}^2}{2} = A\bar{u} + B. \quad (8.225)$$

Ceci constitue la généralisation de la relation de Crocco en écoulement turbulent. Les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions aux limites.

Dans le cas d'une paroi à température constante, $\bar{T}|_{y=0} = \bar{T}_w = \text{constante}$, on obtient

$$B = c\bar{T}_w . \quad (8.226)$$

Le raccordement avec l'écoulement externe demande aussi que

$$c\bar{T}_e + \frac{\bar{u}_e^2}{2} = A\bar{u}_e + B , \quad (8.227)$$

et donc:

$$A = \frac{c(\bar{T}_e - \bar{T}_w) + \bar{u}_e^2/2}{\bar{u}_e} . \quad (8.228)$$

La relation de Crocco devient donc:

$$c(\bar{T} - \bar{T}_w) + \frac{\bar{u}^2}{2} = \left(c(\bar{T}_e - \bar{T}_w) + \frac{\bar{u}_e^2}{2} \right) \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} . \quad (8.229)$$

Le profil de température est donc complètement déterminé.

La signification physique de A est obtenue par différentiation de la relation de Crocco:

$$c \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = A \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} . \quad (8.230)$$

A la paroi, cette relation devient:

$$c \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \Big|_{y=0} = A \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \Big|_{y=0} , \quad (8.231)$$

Dans le cas d'une paroi hydrauliquement lisse, il y a une sous-couche laminaire (zone I). Puisque $Pr = 1$, cela donne donc:

$$\begin{aligned} k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \Big|_{y=0} &= A \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \Big|_{y=0} , \\ -\bar{q}_w &= A \bar{\tau}_w . \end{aligned} \quad (8.232)$$

Dans le cas d'une paroi hydrauliquement rugueuse, il n'y a ni zone I, ni zone II. Le voisinage de la paroi est en zone III-a. Puisque $Pr_t = 1$, cela donne donc:

$$\begin{aligned} k_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \Big|_{y=0} &= A \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \Big|_{y=0} , \\ -\bar{q}_w &= A \bar{\tau}_w . \end{aligned} \quad (8.233)$$

Dans le cas mixte, on aura:

$$\begin{aligned} (k + k_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \Big|_{y=0} &= A (\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \Big|_{y=0} , \\ -\bar{q}_w &= A \bar{\tau}_w . \end{aligned} \quad (8.234)$$

La constante A constitue donc, dans tous les cas, le rapport entre le flux de chaleur à la paroi et la contrainte de cisaillement à la paroi.

On obtient aussi le nombre de Stanton, St , pour le flux de chaleur à la paroi:

$$\begin{aligned}
 St & \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{q}_w}{\rho \bar{u}_e c (\bar{T}_w - \bar{T}_e)} = -\frac{A}{\rho \bar{u}_e c (\bar{T}_w - \bar{T}_e)} \bar{\tau}_w \\
 & = -\frac{(c (\bar{T}_e - \bar{T}_w) + \bar{u}_e^2/2)}{\rho \bar{u}_e^2 c (\bar{T}_w - \bar{T}_e)} \bar{\tau}_w \\
 & = \left(1 - \frac{\bar{u}_e^2/2}{c (\bar{T}_w - \bar{T}_e)}\right) \frac{\bar{\tau}_w}{\rho \bar{u}_e^2} \\
 & = \left(1 - \frac{\bar{u}_e^2/2}{c (\bar{T}_w - \bar{T}_e)}\right) \frac{C_f}{2}. \tag{8.235}
 \end{aligned}$$

Cette relation est générale (bien sûr, tant que $Pr_t = 1$ et $Pr = 1$). On se souvient aussi du nombre de Eckert:

$$Ec \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{u}_e^2}{c |\bar{T}_w - \bar{T}_e|}, \tag{8.236}$$

Pour les écoulements avec dissipation négligeable (i.e., avec $Ec \ll 1$, voir plus loin), on obtient alors, plus simplement, que le profil de température est directement proportionnel au profil de vitesse,

$$\frac{(\bar{T} - \bar{T}_w)}{(\bar{T}_e - \bar{T}_w)} = \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e}, \tag{8.237}$$

et donc que

$$St = \frac{C_f}{2}. \tag{8.238}$$

Les résultats ci-dessus constituent l'extension de "l'analogie de Reynolds" aux couches limites turbulentes, dans le cas de fluides avec $Pr = 1$, et en supposant aussi que $Pr_t = 1$. Comme on a déjà obtenu des corrélations pour C_f , on peut les utiliser pour obtenir St ou, de façon équivalente pour obtenir le nombre de Nusselt:

$$Nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{q}_w x}{k (\bar{T}_w - \bar{T}_e)} = Re Pr St. \tag{8.239}$$

Il importe d'insister que, en couche limite, toutes les grandeurs dépendent de x (sauf Pr qui est une propriété du fluide). Les notations $\bar{\tau}_w$, \bar{q}_w , St , Re et Nu sont donc utilisées, dans cette partie du cours, au lieu de $\bar{\tau}_w(x)$, $\bar{q}_w(x)$, $St(x)$, $Re(x)$ et $Nu(x)$, pour éviter de surcharger les notations.

8.8.2 Couche limite hydrauliquement lisse et avec dissipation négligeable: cas Pr général

On considère ensuite le cas de fluides avec Pr général, mais pour des écoulement avec dissipation négligeable. Pour que cette condition soit satisfaite, il faut que

$$(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \ll \frac{\partial}{\partial y} \left((k + k_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \quad (8.240)$$

dans l'équation de l'énergie. En utilisant les ordres de grandeurs des deux termes, cela revient à demander que

$$(\mu + \mu_t) \left(\frac{\bar{u}_e}{\delta} \right)^2 \ll (k + k_t) \frac{|\bar{T}_w - \bar{T}_e|}{\delta^2} . \quad (8.241)$$

A noter que, contrairement aux couches limites laminaires, les couches limites turbulentes sont telles que l'épaisseur du profil de température, δ_T , et l'épaisseur du profil de vitesse, δ , sont égales. En effet, les couches limites turbulentes sont dominées par les effets liés à la turbulence et leurs grandeurs caractéristiques globales sont donc déterminées par la turbulence. Le rapport $\delta_T \approx \delta$ est donc essentiellement contrôlé par la partie turbulente du profil, et donc par Pr_t : puisque $Pr_t \approx 1$, les épaisseurs seront effectivement fort proches.

Une condition suffisante pour garantir que la dissipation est négligeable est donc de demander:

$$\mu \left(\frac{\bar{u}_e}{\delta} \right)^2 \ll k \frac{|\bar{T}_w - \bar{T}_e|}{\delta^2} \quad \text{et} \quad \mu_t \left(\frac{\bar{u}_e}{\delta} \right)^2 \ll k_t \frac{|\bar{T}_w - \bar{T}_e|}{\delta^2} , \quad (8.242)$$

et donc de demander que $Pr Ec \ll 1$ et que $Pr_t Ec \ll 1$. Comme $Pr_t \approx 1$ (et on le prendra égal à l'unité dans la suite), on demande donc d'avoir $Pr Ec \ll 1$ et $Ec \ll 1$. Pour les fluides avec $Pr \leq 1$, la condition est donc que $Ec \ll 1$; pour les fluides avec $Pr > 1$, la condition est $Pr Ec \ll 1$.

Comme on est sur paroi lisse, on a une sous-couche laminaire (zone I) suivie d'une zone de transition (zone II) suivie d'une zone turbulente (zone III). Pour les zones proches de la paroi (zone I + zone II + zone III-a), on a que le flux de chaleur total (moléculaire + turbulent) est égal au flux de chaleur à la paroi: $\bar{q} \approx \bar{q}_w$.

Considérons d'abord la zone I. On peut y écrire:

$$\begin{aligned} \bar{q} &= -k \frac{d\bar{T}}{dy} = \bar{q}_w \\ -\frac{\mu c}{Pr} \frac{d\bar{T}}{dy} &= \bar{q}_w \\ -\frac{d\bar{T}}{dy} &= Pr \frac{\bar{q}_w}{\mu c} = Pr \frac{\bar{q}_w}{\rho c \bar{u}_\tau} \frac{\bar{u}_\tau}{\nu} , \end{aligned} \quad (8.243)$$

ce qui s'intègre pour donner:

$$\bar{T} = \bar{T}_w - Pr \frac{\bar{q}_w}{\rho c \bar{u}_\tau} \frac{y \bar{u}_\tau}{\nu} . \quad (8.244)$$

On a ici clairement identifié une température de référence pour l'adimensionalisation du profil de température: la "température de frottement-transfert":

$$\bar{T}_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{q}_w}{\rho c \bar{u}_\tau} . \quad (8.245)$$

Le profil universel de température est alors obtenu pour la zone I:

$$\frac{(\bar{T}_w - \bar{T})}{\bar{T}_\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{T}^+ = Pr y^+ . \quad (8.246)$$

Considérons ensuite la zone III-a. On peut alors écrire:

$$\begin{aligned} \bar{q}^t &= -k_t \frac{d\bar{T}}{dy} = \bar{q}_w \\ -\frac{\mu_t c}{Pr_t} \frac{d\bar{T}}{dy} &= \bar{q}_w \\ -\nu_t \frac{d\bar{T}}{dy} &= Pr_t \frac{\bar{q}_w}{\rho c \bar{u}_\tau} \bar{u}_\tau = Pr_t \bar{T}_\tau \bar{u}_\tau . \end{aligned} \quad (8.247)$$

Avec le modèle de von Karman et/ou Prandtl, on a que $\nu_t = \kappa y \bar{u}_\tau$, et donc

$$-\kappa y \frac{d\bar{T}}{dy} = Pr_t \bar{T}_\tau . \quad (8.248)$$

L'intégration de cette équation conduit à un profil universel logarithmique:

$$\bar{T}^+ = \frac{Pr_t}{\kappa} \log y^+ + A(Pr_t, Pr) . \quad (8.249)$$

Donc, pour $Pr_t = 1$, la pente du profil universel de température est la même que la pente du profil universel de vitesse. Son ordonnée n'est cependant pas identique: il est clair que, en toute généralité, le coefficient A doit dépendre de Pr et de Pr_t . Si on se fixe $Pr_t = 1$, on aura alors que $A = A(Pr)$.

On montre à la Fig. 8.32 le profil universel de température pour le cas $Pr_t = 1$ et différentes valeurs de Pr . Le cas $Pr_t = 1$ et $Pr = 1$ doit clairement donner le résultat attendu (i.e., conforme à la section précédente): les profils universels de température et de vitesse doivent être égaux partout: $\bar{T}^+ = \bar{u}^+$ partout. Cela impose que $A(Pr = 1) = C$.

Pour les fluides avec $Pr \geq 0.7$, une bonne approximation de la fonction $A(Pr)$ est:

$$A(Pr) \approx 13 (Pr^{2/3} - 1) + C . \quad (8.250)$$

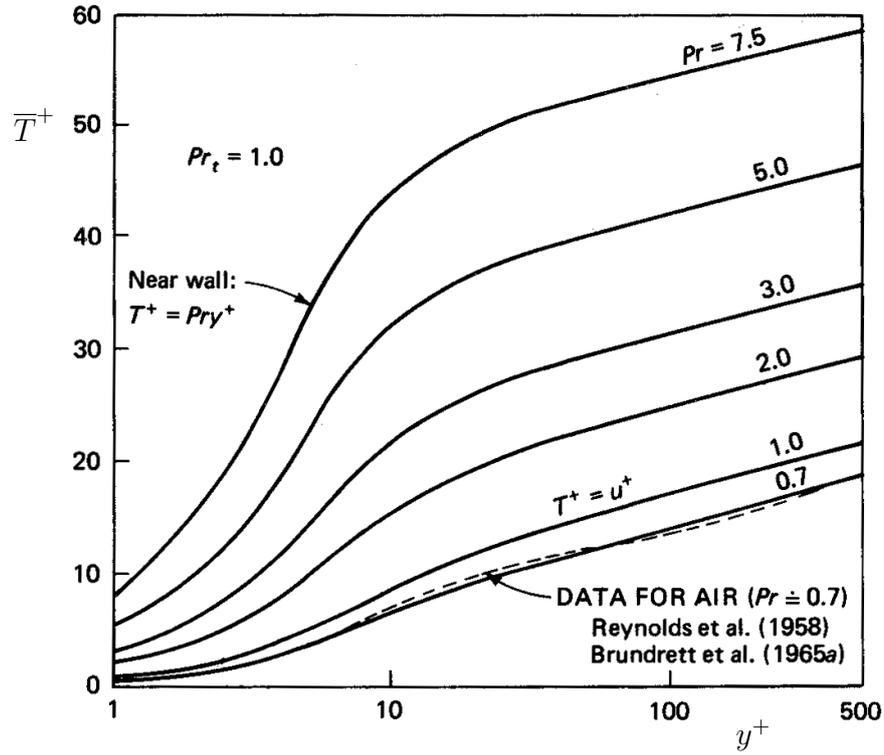


Figure 8.32: Couche limite sur paroi lisse: profil universel de température, $\frac{(\bar{T}_w - \bar{T})}{\bar{T}_\tau}$ en fonction de y^+ et pour différentes valeurs de Pr (et avec $Pr_t = 1$) (figure tirée de *F. M. White, Viscous Fluid Flow, second ed., MacGraw-Hill*).

avec le C du profil universel de vitesse, et donc $A = C$ lorsque $Pr = 1$. Pour les fluides à faible nombre de Prandtl, on utilise plutôt l'approximation (Kader, 1981):

$$A(Pr) \approx (3.85 Pr^{1/3} - 1.3)^2 + 2.12 \log(Pr) . \quad (8.251)$$

On peut également proposer que le profil composite, valable pour toute la zone III, est:

$$\bar{T}^+ = \frac{Pr_t}{\kappa} \log y^+ + A(Pr_t, Pr) + G(\eta) \quad (8.252)$$

avec la même fonction complément, $G(\eta)$, que celle obtenue pour le profil composite de vitesse. On peut aussi argumenter que le shift y_0^+ doit également être pris en compte.

Finalement, on peut aussi obtenir une expression pour le nombre de Stanton. Il suffit, pour ce faire, de considérer les profils universels composites qui sont valables dans toute

la zone turbulente. Avec $Pr_t = 1$, on écrit alors:

$$\frac{(\bar{T}_w - \bar{T}_e)}{\bar{T}_\tau} = \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{\delta \bar{u}_\tau}{\nu} \right) + A(Pr) + G(1) \quad \text{et} \quad \frac{\bar{u}_e}{\bar{u}_\tau} = \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{\delta \bar{u}_\tau}{\nu} \right) + C + G(1), \quad (8.253)$$

ce qui entraîne, par différence,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}_e}{\bar{u}_\tau} + (A - C) &= \frac{(\bar{T}_w - \bar{T}_e)}{\bar{T}_\tau} = (\bar{T}_w - \bar{T}_e) \frac{\rho c \bar{u}_\tau}{\bar{q}_w} \\ \frac{\bar{q}_w}{\rho c \bar{u}_e (\bar{T}_w - \bar{T}_e)} \left(\frac{\bar{u}_e}{\bar{u}_\tau} + (A - C) \right) &= \frac{\bar{u}_\tau}{\bar{u}_e} \\ St \left(\sqrt{\frac{2}{C_f}} + (A - C) \right) &= \sqrt{\frac{C_f}{2}}, \end{aligned} \quad (8.254)$$

et donc, finalement,

$$St = \frac{\frac{C_f}{2}}{\left(1 + (A - C) \sqrt{\frac{C_f}{2}} \right)}, \quad (8.255)$$

et, bien sûr, $Nu = Re Pr St$. Pour les fluides avec $Pr \geq 0.7$, on aura donc:

$$St \approx \frac{\frac{C_f}{2}}{\left(1 + 13 (Pr^{2/3} - 1) \sqrt{\frac{C_f}{2}} \right)}, \quad (8.256)$$

Ces formules sont effectivement assez bonnes et fort utiles: elles permettent d'étendre l'analogie de Reynolds au cas des couches limites turbulentes sur paroi lisse et avec $Pr \neq 1$. On utilise les formules des sections précédentes pour obtenir $C_f = C_f(Re_x)$.

Ces formules sont aussi utilement comparées au cas avec couche limite laminaire (rapel: $C_f = 0.664 Re^{-1/2}$):

$$St \approx Pr^{-2/3} \frac{C_f}{2} = 0.332 Pr^{-2/3} Re^{-1/2}, \quad (8.257)$$

$$Nu \approx Re Pr^{1/3} \frac{C_f}{2} = 0.332 Pr^{1/3} Re^{1/2}. \quad (8.258)$$

8.8.3 Couche limite hydrauliquement rugueuse et avec dissipation négligeable: cas Pr général

Il n'y a pas, ici de zones I et II. Nous sommes directement en zone III. Le nombre de Pr ne joue donc aucun rôle pour le transfert de chaleur: seul le nombre de Pr_t importe.

Donc, pour assurer que la dissipation soit négligeable, on doit uniquement demander que $Ec \ll 1$. On doit donc obtenir, pour la zone III:

$$\bar{T}^+ = \frac{Pr_t}{\kappa} \log\left(\frac{y}{\epsilon}\right) + A(Pr_t) + G(\eta), \quad (8.259)$$

avec A fonction uniquement de Pr_t (puisque Pr n'intervient pas). Si on considère, de plus, que $Pr_t = 1$, on aura alors que $\bar{T}^+ = \bar{u}^+$: analogie complète entre les profils de vitesse et de température.

En ce qui concerne le coefficient de transfert de chaleur, il est aussi nécessairement conforme à l'analogie entre les profils de vitesse et de température:

$$St = \frac{C_f}{2} \quad (8.260)$$

avec C_f obtenu à partir des résultats des sections précédentes.

8.8.4 Conduite hydrauliquement lisse et avec dissipation négligeable: cas Pr général

On considère le cas des conduites hydrauliquement lisses, pour des fluides avec $Pr \neq 1$. On suppose, de nouveau, que la dissipation est négligeable, et donc que:

$$(\mu + \mu_t) \left(\frac{\bar{u}_m}{R}\right)^2 \ll (k + k_t) \frac{|\bar{T}_w - \bar{T}_m|}{R^2}, \quad (8.261)$$

avec \bar{T}_m la température moyenne définie par:

$$\bar{T}_m \bar{u}_m A \stackrel{\text{def}}{=} \int \bar{T} \bar{u} dA. \quad (8.262)$$

Une condition suffisante pour garantir cela étant de demander que $Pr Ec \ll 1$ et $Pr_t Ec \ll 1$, avec

$$Ec \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{u}_m^2}{c |\bar{T}_w - \bar{T}_m|}. \quad (8.263)$$

Comme $Pr_t \approx 1$, on demande donc d'avoir $Pr Ec \ll 1$ et $Ec \ll 1$.

Comme on est sur paroi lisse, on a une sous-couche laminaire (zone I) suivie d'une zone de transition (zone II) suivie d'une zone turbulente (zone III). Pour les zones proches de la paroi (zone I + zone II + zone III-a), on a que $\bar{q} \approx \bar{q}_w$. On obtient donc, pour la zone I:

$$\bar{T}^+ = Pr y^+. \quad (8.264)$$

Pour la zone III-a (en supposant $Pr_t = 1$):

$$\bar{T}^+ = \frac{1}{\kappa} \log y^+ + A(Pr). \quad (8.265)$$

En conduites, le nombre de Stanton est défini comme:

$$St \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{q}_w}{\rho \bar{u}_m c (\bar{T}_w - \bar{T}_m)}, \quad (8.266)$$

On obtient (après plus de manipulations car, étant donné que $\bar{u}_m \neq \bar{u}_c$ et que $\bar{T}_m \neq \bar{T}_c$, il faut travailler davantage) une formule similaire à celle obtenue en couche limite (rappel: en conduite, $\lambda = 4C_f$, et donc $C_f/2 = \lambda/8$):

$$St \approx \frac{\frac{\lambda}{8}}{\left(1 + (A - C) \sqrt{\frac{\lambda}{8}}\right)}. \quad (8.267)$$

Pour les fluides avec $Pr \geq 0.7$, on aura donc (Petukhov, 1970):

$$St \approx \frac{\frac{\lambda}{8}}{\left(1 + 13 (Pr^{2/3} - 1) \sqrt{\frac{\lambda}{8}}\right)}. \quad (8.268)$$

On peut aussi en déduire le nombre de Nusselt: en conduite, celui-ci est défini comme:

$$Nu_D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{q}_w D}{k (\bar{T}_w - \bar{T}_m)} = Re_D Pr St. \quad (8.269)$$

On utilise les formules des sections précédentes pour obtenir $\lambda = \lambda(Re_D)$. Les résultats obtenus sont alors ceux montrés à la Fig. 8.33 pour les courbes avec $Pr \geq 0.7$.

La Fig. 8.33 montre aussi des valeurs de Nu_D en fonction de Re_D pour des nombres de Prandtl caractéristiques des métaux liquides: $Pr \leq 0.1$. Ceux-ci correspondent à la corrélation expérimentale de Sleicher et Rouse (1975):

$$Nu_D \approx 6.3 + 0.00167 Re_D^{0.85} Pr^{0.93}. \quad (8.270)$$

Tout ceci peut aussi être utilement comparé au cas laminaire, aussi avec dissipation négligeable: $Nu_D = 4.36$.

Note: Dans le cas d'un écoulement en canal, on a que $\lambda = 2C_f$; dans les formules ci-dessus, ce sera donc $\lambda/4$ au lieu de $\lambda/8$. Pour le cas laminaire en canal, on a $Nu_d = 4.12$.

8.8.5 Conduite hydrauliquement rugueuse et avec dissipation négligeable: cas Pr général

De nouveau, il n'y pas, ici, de zones I et II. Nous sommes directement en zone III. Le nombre de Pr ne joue aucun rôle pour le transfert de chaleur: seul le nombre de Pr_t importe. Donc, pour assurer que la dissipation soit négligeable, il suffit de demander que

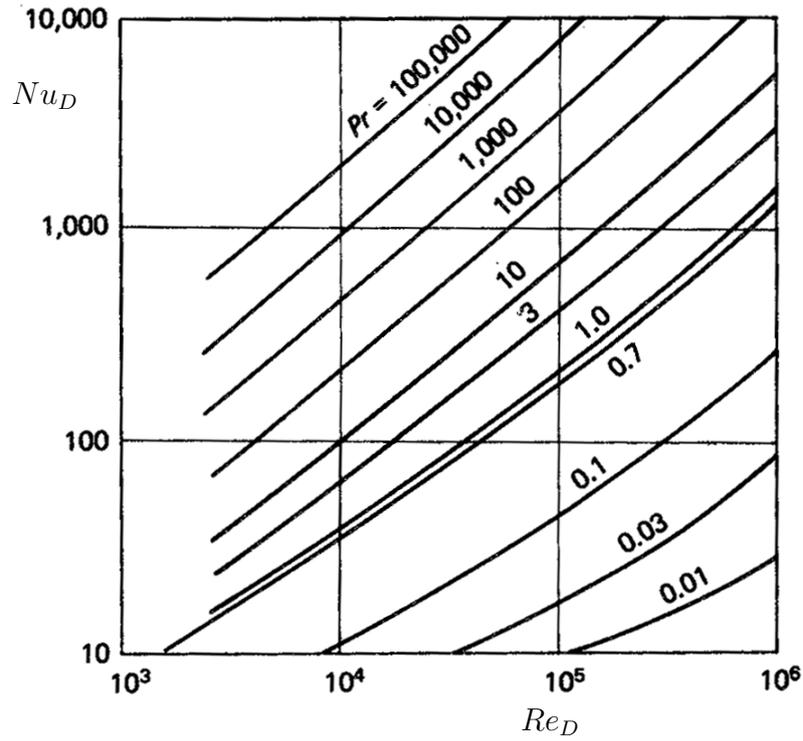


Figure 8.33: Conduite lisse: Nu_D en fonction de Re_D pour différents Pr (et avec $Pr_t = 1$). (figure tirée de *F. M. White, Viscous Fluid Flow, second ed., MacGraw-Hill*).

$Ec \ll 1$. Avec $Pr_t = 1$, on a une analogie parfaite entre les profils de température et de vitesse: $\bar{T}^+ = \bar{u}^+$. Il en ressort:

$$St = \frac{\lambda}{8},$$

$$Nu_D = Re_D Pr \frac{\lambda}{8}, \quad (8.271)$$

avec $\lambda = \lambda(\epsilon/D)$ obtenu à partir de résultats des sections précédentes.

Chapitre 9

Analyse dimensionnelle

Le fait le plus significatif en analyse dimensionnelle consiste à remarquer qu'il n'existe souvent pas d'unité de mesure fondamentale ou naturelle pour les variables physiques. Bien sûr, on dispose de constantes universelles telles que la charge de l'électron, la constante de Planck, la vitesse de la lumière, la constante de gravitation, etc. Mais ces constantes ne sont pas caractéristiques de tous les phénomènes physiques. Par exemple, la charge de l'électron n'est pas une unité fondamentale pour mesurer l'intensité du courant dans un moteur électrique. De même, on ne gagne rien à mesurer la vitesse d'une vague en utilisant la vitesse de la lumière comme unité de base. On peut donc conclure que les échelles usuelles de mesure sont arbitraires, que leur choix provient seulement d'une convention et que, de ce fait, ces échelles de mesure ne jouent aucun rôle essentiel dans les processus physiques. Ainsi, si l'on change la taille de l'unité de mesure de longueur, toutes les variables qui impliquent une longueur augmenteront ou diminueront de manière appropriée.

Pour présenter les éléments de base de l'analyse dimensionnelle, notons d'abord qu'une vitesse, une longueur, un travail, etc. déterminés sont des "grandeurs physiques" auxquelles on peut associer les notions de dimension physique, de mesure et d'unité. Par exemple, la vitesse 3 m/s a la dimension physique "longueur/temps" et sa mesure est 3 si l'unité choisie pour les vitesses est le m/s tandis que sa mesure est 300 si l'unité choisie pour les vitesses est le cm/s. De manière générale, on peut considérer qu'une grandeur physique est, dans tout système d'unités, le produit de sa mesure dans ce système par l'unité qui lui est associée. La mesure d'une grandeur physique donnée est un nombre réel, tandis que l'unité associée est une grandeur physique de même dimension physique que la grandeur de départ. Ainsi, $3 \text{ m/s} = 3 \times 1 \text{ m/s}$, la grandeur physique 3 m/s et son unité 1 m/s ayant la même dimension physique: longueur/temps (c.-à-d. vitesse).

Cette façon de procéder permet de donner une structure à l'ensemble des grandeurs physiques et à celui des dimensions physiques. En bref, et sans entrer dans tous les détails formels, on peut toujours multiplier ou diviser entre elles deux grandeurs physiques quelconques (ex: $3 \text{ kg} \times 2 \text{ m} = 6 \text{ kg m}$), tandis qu'on ne peut additionner entre elles que

des grandeurs physiques de même dimension (on ne peut additionner des m et des kg par exemple). On peut aussi multiplier ou diviser entre elles toutes les dimensions physiques de manière à en former d'autres.

Certaines limitations ou extensions de cette approche sont intéressantes et méritent d'être mentionnées. En premier lieu, on peut être amené à ne considérer que les grandeurs physiques "absolues", dont la mesure est alors toujours un nombre réel ≥ 0 . En second lieu, il peut être intéressant de considérer des grandeurs physiques vectorielles ou tensorielles. Dans un repère déterminé, celles-ci sont la somme des produits de leurs composantes par les vecteurs ou tenseurs de base ($\hat{e}_i, \hat{e}_i \hat{e}_j$). Ainsi, en utilisant la convention de sommation d'Einstein, la vitesse en un point, qui est une grandeur physique vectorielle, peut s'écrire comme la somme $\mathbf{v} = v_i \hat{e}_i$, où les v_i sont les composantes de \mathbf{v} et les \hat{e}_i représentent les vecteurs unitaires de base. Dans ce cas, et tant que l'on veut rester dans le cadre de l'analyse dimensionnelle, il faut considérer que les composantes v_i sont elles-mêmes des grandeurs physiques (scalaires) tandis que les vecteurs unitaires de base \hat{e}_i sont des grandeurs vectorielles adimensionnelles. On peut aussi, évidemment, fixer le système d'unité et considérer que les v_i sont les mesures des composantes de vitesse dans ce système d'unité, mais cette façon (usuelle) de faire rend le traitement dimensionnel moins direct. Dans ce qui suit, on se limitera aux grandeurs physiques scalaires, absolues ou non.

Un point important concerne l'identité de structure entre l'ensemble des dimensions physiques et celui d'un système d'unités choisi. Par exemple, le fait qu'une vitesse ait la dimension (physique) longueur/temps entraîne ipso facto que, dans le système MKSA, l'unité de vitesse est le mètre par seconde, 1 m/s, parce que l'unité de longueur est le mètre, 1 m, et que l'unité de temps est la seconde, 1 s. Comme toutes les dimensions physiques possibles sont des produits de puissances des dimensions physiques de base, c.-à-d. qu'elles ont la forme générale

$$(\text{longueur})^{\alpha_1} (\text{masse})^{\alpha_2} (\text{temps})^{\alpha_3} (\text{courant})^{\alpha_4} (\text{température absolue})^{\alpha_5} , \quad (9.1)$$

il en va de même des unités associées. Dans le système MKSA, les unités ont donc la forme générale

$$(\text{m})^{\alpha_1} (\text{kg})^{\alpha_2} (\text{s})^{\alpha_3} (\text{A})^{\alpha_4} (\text{K})^{\alpha_5} . \quad (9.2)$$

Il faut remarquer que la liste des dimensions de base dépend du contexte dans lequel on se place. On sait en effet que la température et l'énergie sont fondamentalement reliées par la constante de Boltzmann, de même que la longueur et le temps sont fondamentalement reliés par la vitesse de la lumière. L'utilisation de ces liaisons pourrait évidemment permettre de réduire le nombre de dimensions de base. Nous trouvons cependant plus commode de découpler (dans le cadre de ce cours) la longueur et le temps, ainsi que la température et l'énergie, car l'analyse dimensionnelle est alors plus riche. D'ailleurs, un couplage n'aurait précisément d'intérêt que dans les problèmes où les constantes c (vitesse de la lumière) et/ou k (Boltzmann) interviennent directement.

9.1 Principe d'invariance dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle repose sur le principe d'invariance dimensionnelle, qu'il y a lieu d'énoncer avec soin. Considérons à cet effet une expérience au cours de laquelle n grandeurs physiques sont mesurées: p_1, p_2, \dots, p_n . Supposons en outre que l'expérience soit répétée dans des conditions différentes et qu'on puisse identifier de cette façon une loi liant, pour cette classe d'expériences, les n grandeurs physiques considérées. Plus précisément, on considère un système d'unités choisi où les unités associées aux grandeurs physiques p_1, p_2, \dots, p_n sont désignées par u_1, u_2, \dots, u_n , tandis que les mesures de ces grandeurs dans ce système sont les nombres réels $\text{mesure}(p_1), \text{mesure}(p_2), \dots, \text{mesure}(p_n)$, avec $p_1 = \text{mesure}(p_1) \cdot u_1, p_2 = \text{mesure}(p_2) \cdot u_2, \dots, p_n = \text{mesure}(p_n) \cdot u_n$. La loi qui lie p_1, p_2, \dots, p_n peut certainement s'exprimer sous la forme d'une relation mathématique liant les nombres $\text{mesure}(p_1), \text{mesure}(p_2), \dots, \text{mesure}(p_n)$:

$$f(\text{mesure}(p_1), \text{mesure}(p_2), \dots, \text{mesure}(p_n)) = 0 . \quad (9.3)$$

Le principe d'invariance dimensionnelle énonce alors que cette relation est indépendante du choix du système d'unités. En d'autres mots, si un autre système d'unités u'_1, u'_2, \dots, u'_n est choisi et que les mesures de p_1, p_2, \dots, p_n dans cet autre système sont désignées par $\text{mesure}'(p_1), \text{mesure}'(p_2), \dots, \text{mesure}'(p_n)$, la loi physique identifiée peut être mise sous la forme équivalente:

$$f(\text{mesure}'(p_1), \text{mesure}'(p_2), \dots, \text{mesure}'(p_n)) = 0 , \quad (9.4)$$

la fonction f restant inchangée.

En fait, ce principe résulte de l'idée qu'une loi physique doit nécessairement exprimer au départ une relation entre des grandeurs physiques. Cependant, les opérations qu'on peut effectuer avec des grandeurs physiques sont limitées, puisque, entre autres, on peut toujours multiplier entre elles deux grandeurs physiques quelconques, mais qu'on ne peut additionner que des grandeurs physiques de même dimension (toutes les opérations mathématiques étant évidemment permises sur les grandeurs "adimensionnelles", qui sont simplement des nombres). Par un raisonnement précis, on peut montrer que ces restrictions résultent nécessairement dans le fait que les lois physiques respectent le principe d'invariance dimensionnelle.

Le principe d'invariance dimensionnelle est omniprésent en Physique, et toutes les lois physiques s'appuient directement sur lui. Par exemple, quand on écrit la loi de Newton composante par composante ($F_i = M A_i$, où les F_i et les A_i désignent les mesures des composantes de la force exercée sur le corps considéré et celles de son accélération, tandis que M est la mesure de sa masse), il est clair que cette relation est valide quel que soit le système d'unités choisi.

9.2 Théorème de Vaschy-Buckingham

Le théorème de Vaschy-Buckingham est une conséquence directe du principe d'invariance dimensionnelle. Pour énoncer ce théorème, il faut à nouveau considérer la répétition d'une expérience à la suite de laquelle est identifiée une loi liant n grandeurs physiques absolues p_1, p_2, \dots, p_n , grandeurs dont les dimensions physiques sont $\dim(p_1), \dim(p_2), \dots, \dim(p_n)$. Ces dimensions physiques sont certainement des produits de puissances des dimensions de base (longueur, masse, temps, ...), et on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \dim(p_1) &= \text{longueur}^{M_{11}} \cdot \text{masse}^{M_{21}} \cdot \text{temps}^{M_{31}} \dots, \\ \dim(p_2) &= \text{longueur}^{M_{12}} \cdot \text{masse}^{M_{22}} \cdot \text{temps}^{M_{32}} \dots, \\ &\vdots \\ \dim(p_n) &= \text{longueur}^{M_{1n}} \cdot \text{masse}^{M_{2n}} \cdot \text{temps}^{M_{3n}} \dots, \end{aligned} \quad (9.5)$$

où les exposants M_{ij} forment une matrice de genre $m \times n$,

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \dots & & & \\ M_{m1} & M_{m2} & \dots & M_{mn} \end{pmatrix}, \quad (9.6)$$

appelée "matrice des exposants". On sait alors que, pour tout système d'unités de base b_1, b_2, \dots, b_m (par exemple $b_1 = 1 \text{ m}$, $b_2 = 1 \text{ kg}$, $b_3 = 1 \text{ s}$, ...), les unités u_1, u_2, \dots, u_n des grandeurs p_1, p_2, \dots, p_n s'expriment comme produits de puissances des unités de base avec la même matrice d'exposants:

$$\begin{aligned} u_1 &= b_1^{M_{11}} \cdot b_2^{M_{21}} \dots b_m^{M_{m1}}, \\ u_2 &= b_1^{M_{12}} \cdot b_2^{M_{22}} \dots b_m^{M_{m2}}, \\ &\vdots \\ u_n &= b_1^{M_{1n}} \cdot b_2^{M_{2n}} \dots b_m^{M_{mn}}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Nous désignerons dans ce qui suit par r le rang de la matrice \underline{M} , c.-à-d. le nombre maximum de lignes ou colonnes indépendantes qu'on peut y trouver. On peut observer que ce nombre est indépendant du fait qu'une ligne entièrement composée de 0 soit ou non ajoutée à \underline{M} (ce qui correspond au cas où une dimension physique de base qui n'est présente dans aucune des grandeurs p_1, p_2, \dots, p_n est prise en considération). Cette remarque est importante car elle illustre le fait que c'est le rang de la matrice \underline{M} qui va entrer en jeu dans ce qui suivra, et non pas son nombre de lignes m . Le calcul de ce rang fait partie de l'algèbre élémentaire et la méthode pratique la plus efficace consiste à identifier successivement dans \underline{M} des colonnes indépendantes jusqu'à ce que cela ne soit plus possible.

On appelle groupement adimensionnel Π construit à partir des grandeurs physiques absolues p_1, p_2, \dots, p_n un produit de puissances adimensionnel de la forme:

$$\Pi = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}. \quad (9.8)$$

On observera que le caractère adimensionnel de Π est équivalent à la relation matricielle

$$\underline{M} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9.9)$$

car le membre de gauche donne les exposants de Π pour chacune des unités de base b_1, b_2, \dots, b_m .

Le théorème de Vaschy-Buckingham (ou théorème des Π) s'énonce alors comme suit: pour toute relation entre n grandeurs physiques p_1, p_2, \dots, p_n (ou entre leurs mesures dans un certain système d'unités), si le rang de la matrice \underline{M} des exposants est r , il existe $(n - r)$ groupements adimensionnels $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}$ tels que la relation entre p_1, p_2, \dots, p_n puisse être exprimée de façon équivalente sous forme d'une relation entre $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}$:

$$g(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}) = 0. \quad (9.10)$$

Le théorème de Vaschy-Buckingham ne sera pas démontré, mais nous donnons cependant ci-dessous des éléments sur lesquels s'appuie sa démonstration. L'idée consiste à chercher un système d'unités de base c_1, c_2, \dots, c_m particulier dans lequel la mesure de r des grandeurs physiques p_1, p_2, \dots, p_n est exactement 1. En fait, ces r grandeurs physiques correspondent à r colonnes indépendantes de \underline{M} ; on peut, sans perte de généralité, supposer que ce sont les colonnes 1, 2, ..., r . On observe ensuite que, dans le système de base particulier c_1, c_2, \dots, c_m , la mesure des $(n - r)$ grandeurs physiques restantes (ici p_{r+1}, \dots, p_n) est chaque fois un groupement adimensionnel $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}$. Alors, si dans le système d'unités de départ b_1, b_2, \dots, b_m , la relation observée s'exprime sous la forme

$$f(\text{mesure}(p_1), \text{mesure}(p_2), \dots, \text{mesure}(p_n)) = 0, \quad (9.11)$$

le principe d'invariance dimensionnelle dit qu'elle s'exprime exactement de la même manière dans le nouveau système c_1, c_2, \dots, c_m , ce qui donne

$$f(1, 1, \dots, 1, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}) = 0, \quad (9.12)$$

ou encore:

$$g(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}) = 0, \quad (9.13)$$

en définissant

$$g(x_1, x_2, \dots, x_{n-r}) = f(1, 1, \dots, 1, x_1, x_2, \dots, x_{n-r}). \quad (9.14)$$

De manière pratique, cette esquisse de démonstration indique comment procéder pour trouver un ensemble de $(n - r)$ groupements adimensionnels corrects (il y a toujours de nombreux choix équivalents):

- Identification du rang de \underline{M} et recherche de r colonnes indépendantes (qu'on suppose ici être les r premières).
- Construction des groupements $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}$. A cet effet, on considère successivement les $(n - r)$ colonnes restantes de \underline{M} , qu'on exprime chacune comme une combinaison linéaire des r premières colonnes (indépendantes). Ceci indique directement comment la dimension physique de la grandeur p_{r+1}, p_{r+2}, \dots , ou p_n associée à la colonne considérée peut être exprimée comme un produit de puissances des dimensions physiques de p_1, p_2, \dots et p_r , et donc comment le groupement adimensionnel associé, Π_1, Π_2, \dots , ou Π_{n-r} doit être construit.

9.3 Adimensionalisation des équations du modèle du fluide visqueux newtonien

Considérons un fluide visqueux newtonien compressible dont l'équation d'état pour la masse volumique est celle d'un gaz idéal. En outre, par souci de simplicité, nous supposons que les chaleurs spécifiques, les viscosités et le coefficient de conductibilité sont constants. Finalement, nous supposons qu'on peut appliquer l'hypothèse de Stokes qui consiste à négliger le terme contenant la viscosité de volume.

La formulation pression-vitesse-température s'écrit :

$$\frac{1}{p} \frac{Dp}{Dt} - \frac{1}{T} \frac{DT}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\frac{p}{RT} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{d}^d) + \rho \mathbf{g}, \quad (9.15)$$

$$\frac{p}{RT} c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = 2\mu(\mathbf{d}^d : \mathbf{d}^d) + r + \nabla \cdot (k \nabla T).$$

Afin d'adimensionaliser ces équations, il convient d'abord d'identifier les grandeurs caractéristiques du problème :

- u_0 , une vitesse caractéristique (typiquement, la vitesse à l'infini pour un écoulement externe),
- ρ_0 , une masse volumique caractéristique (typiquement, la masse volumique à l'infini pour un écoulement externe),
- T_0 , une température caractéristique (typiquement, la température à l'infini pour un écoulement externe),

- L , une dimension caractéristique, (typiquement, la corde du profil d'une aile).

Il est ensuite possible de définir les nombres sans dimension suivants :

- Le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho_0 u_0 L}{\mu}$
exprime le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité.
- Le nombre de Prandtl $Pr = \frac{\mu c_p}{k}$
exprime le rapport entre la viscosité cinématique et la diffusivité thermique du fluide. Il s'agit donc d'un nombre caractérisant le fluide. Le nombre de Prandtl est donc indépendant de l'écoulement.
- Le nombre $\gamma^* = \frac{c_p}{c_v}$
exprime le rapport entre la chaleur spécifique à pression constante et celle à volume constant du fluide. Il s'agit donc d'un nombre caractérisant le fluide. Ce nombre est donc indépendant de l'écoulement.
- Le nombre de Mach $M = \frac{u_0}{\sqrt{\frac{c_p}{c_v} RT_0}}$
exprime le rapport entre la vitesse caractéristique de l'écoulement et la vitesse de propagation du son caractéristique du fluide. Ce nombre quantifie donc les effets de compressibilité.
- Le nombre de Péclet $Pe = RePr = \frac{\rho_0 u_0 L c_p}{k}$
exprime le rapport entre le flux de chaleur transporté et le flux de chaleur diffusé. On notera que Pe n'est pas indépendant des autres nombres sans dimension.
- Le nombre de Froude $Fr = \frac{u_0^2}{gL}$
exprime le rapport entre les forces d'inertie et les forces dues à la gravité (g est l'accélération de la gravité ou la norme du vecteur \mathbf{g}).

Pour obtenir une forme adimensionnelle des équations, on peut procéder en effectuant un changement de variables. Les unités deviennent liées à l'écoulement et toutes les grandeurs deviennent adimensionnelles. Les unités de bases deviennent :

- longueur : $L[m]$,
- masse : $\rho_0 L^3[kg]$,
- temps : $L/u_0[sec]$,
- température : $T_0[K]$.

Nous définissons ensuite les grandeurs adimensionnelles par les relations

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}' &= \frac{\mathbf{x}}{L}, \\
 \mathbf{v}' &= \frac{\mathbf{v}}{u_0}, \\
 t' &= \frac{tu_0}{L}, \\
 p' &= \frac{p}{\rho u_0^2}, \\
 T' &= \frac{T}{T_0}.
 \end{aligned} \tag{9.16}$$

On peut dès lors écrire les coefficients caractérisant le fluide en termes de nombres sans dimension.

$$\begin{aligned}
 \mu' &= \frac{\mu}{\rho_0 u_0 L} = \frac{1}{Re}, \\
 k' &= \frac{kT_0}{\rho_0 u_0^3 L} = \frac{1}{Pr Re (\gamma^* - 1) M^2}, \\
 c'_p &= \frac{c_p T_0}{u_0^2} = \frac{1}{(\gamma^* - 1) M^2}, \\
 R' &= \frac{RT_0}{u_0^2} = \frac{1}{\gamma^* M^2}.
 \end{aligned} \tag{9.17}$$

où γ^* est défini comme le rapport des chaleurs spécifiques $\gamma^* = \frac{c_p}{c_v}$.

Si on suppose, en outre, l'absence de forces à distance et de puissance radiative volumique, les équations adimensionnelles prennent immédiatement, par invariance dimension-

nelle, la forme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p'} \frac{D'p'}{Dt'} - \frac{1}{T'} \frac{D'T'}{Dt'} + \nabla' \cdot \mathbf{v}' &= 0, \\ \gamma^* M^2 \frac{p'}{T'} \frac{D'\mathbf{v}'}{Dt'} &= -\nabla' p' + \frac{2}{Re} \nabla' \cdot \mathbf{d}^{td}, \\ \frac{\gamma^*}{(\gamma^* - 1)} \frac{p'}{T'} \frac{D'T'}{Dt'} - \frac{D'p'}{Dt'} &= \frac{2}{Re} (\mathbf{d}^{td} : \mathbf{d}^{td}) + \frac{1}{Pr Re (\gamma^* - 1) M^2} \nabla' \cdot \nabla' T'. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Equations asymptotiques lorsque $Re \rightarrow \infty$

Observons maintenant ce que deviennent les équations (9.18), lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini et qu'on suppose que les autres nombres adimensionnels (Pr , M et γ^*) sont fixés. On admet également que tous les termes de l'équation adimensionalisée sont bornés.

$$\begin{aligned} \frac{1}{p'} \frac{D'p'}{Dt'} - \frac{1}{T'} \frac{D'T'}{Dt'} + \nabla' \cdot \mathbf{v}' &= 0, \\ \gamma^* M^2 \frac{p'}{T'} \frac{D'\mathbf{v}'}{Dt'} &= -\nabla' p', \\ \frac{\gamma^*}{(\gamma^* - 1)} \frac{p'}{T'} \frac{D'T'}{Dt'} - \frac{D'p'}{Dt'} &= 0. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Les équations dimensionnelles correspondantes sont :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{Dp}{Dt} - \frac{1}{T} \frac{DT}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{p}{RT} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla p, \\ c_p \frac{p}{RT} \frac{DT}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} &= 0. \end{aligned} \quad (9.20)$$

On obtient les équations d'un écoulement compressible, et isentropique (car la dernière équation peut s'écrire sous la forme $\rho T DS/Dt = 0$). Si l'écoulement est uniforme à l'infini amont, l'écoulement sera globalement isentropique (ou homentropique), et donc

irrotationnel. Ceci est parfois appelé écoulement de fluide parfait ou ce qui serait plus correct, un écoulement parfait.

Equations asymptotiques lorsque $M \rightarrow 0$

A la lumière de ce qui précède, on pourrait être tenté de procéder de même en faisant tendre le nombre de Mach vers zéro en espérant l'obtention des équations d'un écoulement incompressible. Une simple observation des équations (9.18) montre qu'il n'en est rien.

Pour pouvoir obtenir les équations asymptotiques lorsque le nombre de Mach tend vers zéro, il faut modifier le changement de variables afin de satisfaire le principe de moindre dégénérescence. En particulier, la pression dans un écoulement incompressible cesse d'être une variable thermodynamique, mais devient une variable dynamique.

Supposons que nous modifions le changement de variable pour la pression et la température comme suit :

$$\begin{aligned} p^* &= \left(p' - \frac{1}{(\gamma^* M^2)^2} \right), \\ T^* &= \left(T' - \frac{1}{\gamma^* M^2} \right). \end{aligned} \tag{9.21}$$

Nous obtenons de nouvelles équations adimensionnelles

$$\begin{aligned} \frac{(\gamma^* M^2)^2}{(1 + (\gamma^* M^2)^2 p^*)} \frac{D' p^*}{Dt'} - \frac{\gamma^* M^2}{(1 + \gamma^* M^2 T^*)} \frac{D' T^*}{Dt'} + \nabla' \cdot \mathbf{v}' &= 0, \\ \frac{(1 + (\gamma^* M^2)^2 p^*)}{(1 + \gamma^* M^2 T^*)} \frac{D' \mathbf{v}'}{Dt'} &= -\nabla' p^* + \frac{2}{Re} \nabla' \cdot \mathbf{d}^{td}, \\ \frac{1}{(\gamma^* - 1)} \frac{(1 + (\gamma^* M^2)^2 p^*)}{(1 + \gamma^* M^2 T^*)} \frac{D' T^*}{Dt'} - M^2 \frac{D' p^*}{Dt'} &= \\ \frac{2M^2}{Re} (\mathbf{d}^{td} : \mathbf{d}^{td}) + \frac{1}{Pr Re (\gamma^* - 1)} \nabla' \cdot \nabla' T^*. \end{aligned} \tag{9.22}$$

Et maintenant, lorsqu'on effectue le passage à la limite $M \rightarrow 0$, lorsque Re , Pr et γ^* sont fixés, on obtient comme équations asymptotiques où, pour un allègement des notations, on va noter un brin abusivement p^* et T^* par p' et T' quoique les différences

$p^* - p'$ et $T^* - T'$ ne tendent évidemment pas vers zéro. C'est la raison, d'ailleurs, pour laquelle, il a été nécessaire de modifier l'adimensionalisation pour obtenir les cas limites :

$$\begin{aligned}\nabla' \cdot \mathbf{v}' &= 0, \\ \frac{D'\mathbf{v}'}{Dt'} &= -\nabla' p' + \frac{2}{Re} \nabla' \cdot \mathbf{d}', \\ \frac{D'T'}{Dt'} &= \frac{1}{PrRe} \nabla' \cdot \nabla' T'.\end{aligned}\tag{9.23}$$

Les équations dimensionnelles correspondantes sont

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla p + \mu(\nabla \cdot \nabla)\mathbf{v}, \\ \rho c \frac{DT}{Dt} &= k \nabla \cdot \nabla T,\end{aligned}\tag{9.24}$$

ce qui correspond bien aux équations d'un écoulement incompressible de fluide visqueux. On observera que dans ce cas, les deux premières équations sont indépendantes de la température et peuvent être résolues sans tenir compte de celle-ci. Dans la suite, nous supposons que cette circonstance se présente et nous ne considérons donc que le problème pression-vitesse avec les équations de conservation locale de la masse et de la quantité de mouvement.

$$\begin{aligned}\nabla' \cdot \mathbf{v}' &= 0, \\ \frac{D'\mathbf{v}'}{Dt'} &= -\nabla' p' + \frac{1}{Re} (\nabla' \cdot \nabla') \mathbf{v}'.\end{aligned}\tag{9.25}$$

Equations asymptotiques lorsque $M = 0$ et $Re \rightarrow \infty$

Lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini, les équations asymptotiques que l'on obtient à partir de (9.25) sont :

$$\begin{aligned}\nabla' \cdot \mathbf{v}' &= 0, \\ \frac{D'\mathbf{v}'}{Dt'} &= -\nabla' p',\end{aligned}\tag{9.26}$$

avec comme équations dimensionnelles correspondantes

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla p.\end{aligned}\tag{9.27}$$

Ce sont les équations caractérisant un écoulement incompressible et irrotationnel.

Equations asymptotiques lorsque $M = 0$ et $Re \rightarrow 0$

Dans ce cas-ci, il faut également modifier le changement de variable afin de satisfaire le principe de moindre dégénérescence.

$$\begin{aligned}p^* &= Re p', \\ t^* &= \frac{t'}{Re}.\end{aligned}\tag{9.28}$$

Les nouvelles équations adimensionnelles s'écrivent :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v}' &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t^*} + Re (\mathbf{v}' \cdot \nabla') \mathbf{v}' &= -\nabla' p^* + (\nabla' \cdot \nabla') \mathbf{v}'.\end{aligned}\tag{9.29}$$

Il est maintenant possible d'écrire les équations asymptotiques lorsque le nombre de Reynolds tend vers zéro :

$$\begin{aligned}\nabla' \cdot \mathbf{v}' &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t^*} &= -\nabla' p^* + (\nabla' \cdot \nabla') \mathbf{v}',\end{aligned}\tag{9.30}$$

et d'ensuite écrire les équations dimensionnelles correspondantes

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla p + \mu(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{v}.\end{aligned}\tag{9.31}$$

Ce sont les équations caractérisant un écoulement rampant de fluide visqueux. Ce problème est connu comme le problème de Stokes.

On peut observer que pour obtenir les équations d'Euler, le temps a été normalisé en fonction du terme d'inertie ($t' = tu_0/L$) tandis que pour les équations de Stokes, le temps a dû être normalisé en fonction du terme visqueux ($t^* = \mu t/\rho L^2$). Il y a donc toujours lieu de considérer avec soin le domaine d'application d'une adimensionalisation.

Appendice A

Equations de Navier-Stokes dans divers systèmes d'axes

Si on considère un écoulement incompressible d'un fluide à grandeurs physiques μ , k et c constantes (ou bien même des fluides à grandeurs non constantes mais pour des écoulements tels que les variations de température n'entraînent pas de variation significative de ces grandeurs), les équations qui régissent l'écoulement s'écrivent simplement:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (\text{A.2})$$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu \mathbf{d} : \mathbf{d} + k \nabla^2 T, \quad (\text{A.3})$$

où la notation $\nabla^2()$ signifie l'opérateur $\nabla \cdot (\nabla())$. Clairement, les équations de quantité de mouvement et d'énergie sont maintenant découplées: on peut résoudre la dynamique des fluides d'un problème (en utilisant les équations de continuité et de quantité de mouvement) sans pour autant devoir aussi résoudre, en même temps, la thermique de ce problème. Pour la suite de ce chapitre, nous considérerons toujours de tels écoulements, et nous nous attacherons à obtenir quelques solutions fondamentales utiles en ingénierie. Nous considérons uniquement les écoulements laminaires. Nous rappelons ici l'écriture des équations ci-dessus dans les systèmes de coordonnées les plus usuels.

Écoulements plans

Pour les écoulements plans, on travaille soit en coordonnées cartésiennes (x, y) , soit en coordonnées polaires (r, θ) avec $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. En coordonnées cartésiennes (x, y) , on utilise la notation u pour désigner la vitesse en x et v pour désigner la vitesse en y . Les composantes du vecteur vitesse sont donc (u, v) . Les équations de continuité et

de quantité de mouvement sont alors:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) u = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) v = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v, \quad (\text{A.6})$$

avec $\nu = \mu/\rho$ la viscosité cinématique et avec la notation P pour désigner le terme p/ρ (notation qui sera très souvent utilisée dans la suite du cours). Pour l'équation de température, on a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) T &= \alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T \\ &+ \frac{\nu}{c} \left(2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

avec

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} = \frac{\nu}{Pr} \quad \text{où} \quad Pr = \frac{\mu c}{k} \quad (\text{A.8})$$

est le nombre de Prandtl du fluide.

En coordonnées polaires (r, θ) , on utilise la notation u_r pour désigner la vitesse en r et u_θ pour désigner la vitesse en θ . La direction axiale est $x = r \cos \theta$, et la direction transversale est $y = r \sin \theta$. La vitesse axiale est $u = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta$, et la vitesse transversale est $v = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta$. Les équations de continuité et de quantité de mouvement sont alors:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \left(u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_r - \frac{u_\theta^2}{r} &= -\frac{\partial P}{\partial r} \\ + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \left(u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Pour la température, on a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \left(u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) T &= \alpha \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \\ + \frac{\nu}{c} \left(2 \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Écoulements axisymétriques

Pour les écoulements tridimensionnels mais sans variation azimuthale (i.e., axisymétriques), le système de coordonnées est, soit le système de coordonnées cylindriques (x, y) avec x la direction de l'écoulement et y la direction radiale (souvent aussi notée r , notation malheureuse mais courante, et que nous utiliserons aussi dans la suite du cours afin de rester cohérent avec ce qui se trouve dans les livres), soit le système de coordonnées sphériques (r, θ)

Dans le système cylindrique (x, y) sans variation azimuthale, les notations sont les mêmes que dans le cas plan: u pour la vitesse axiale en x , et v pour la vitesse transversale en y (malheureusement aussi parfois appelée vitesse "radiale" pour vitesse en " r ", voir remarque ci-dessus). On a alors, pour les équations de continuité et de quantité de mouvement:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (y v) = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) u = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right), \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) v = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{v}{y^2} \right). \quad (\text{A.15})$$

Pour la température, on a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) T &= \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) \\ &+ \frac{\nu}{c} \left(2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Dans le système sphérique (r, θ) sans variation azimuthale, on utilise les mêmes notations que pour le cas plan: u_r pour la vitesse en r et u_θ pour la vitesse en θ . La coordonnée axiale est $x = r \cos \theta$, et la coordonnée transversale est $y = r \sin \theta$. La vitesse axiale est $u = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta$, et la vitesse transversale est $v = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta$. Les équations de continuité et de quantité de mouvement sont:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) = 0, \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \left(u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_r - \frac{u_\theta^2}{r} &= -\frac{\partial P}{\partial r} \\ + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \left(u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Pour la température, on a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \left(u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) T &= \alpha \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \\ &+ \frac{\nu}{c} \left(2 \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Appendice B

Fonction de courant

Pour les écoulements incompressibles (i.e., $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), il existe toujours une fonction, ψ , telle que $\mathbf{v} = \nabla \times \psi$. En effet, on se souvient que la divergence d'un rotationnel est nulle. La fonction ψ est appelée la "fonction de courant".

A noter que, de par la définition du vecteur tourbillon, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$, on a toujours $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ (même en écoulements compressibles). Pour les écoulements incompressibles, on a aussi obtenu ci-dessus:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega} . \quad (\text{B.1})$$

La vitesse satisfait donc une équation de Poisson dont le terme source est le rotationnel du tourbillon (changé de signe). On a aussi que:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\nabla \times \psi) = -\nabla \cdot (\nabla \psi) + \nabla(\nabla \cdot \psi) = -\nabla^2 \psi . \quad (\text{B.2})$$

si on choisit que la fonction de courant soit à divergence nulle (= choix de la "jauge de Lorentz"). Ce choix est naturel puisqu'alors:

$$0 = \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = -\nabla \cdot (\nabla^2 \psi) = -\nabla^2(\nabla \cdot \psi) = -\nabla^2(0) = 0 . \quad (\text{B.3})$$

A noter que l'on a utilisé la propriété de commutation entre les opérateurs $\nabla \cdot ()$ et $\nabla^2()$. Bref, en toute finalité, la fonction de courant satisfait une équation de Poisson dont le terme source est le tourbillon (changé de signe): $\nabla^2 \psi = -\boldsymbol{\omega}$.

Écoulements plans

Pour les écoulements plans, le tourbillon et la fonction de courant n'ont qu'une composante perpendiculaire au plan: $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \omega \hat{\mathbf{e}}_z$ et $\psi = \psi \hat{\mathbf{e}}_z$. L'équation de Poisson pour la fonction de courant, $\nabla^2 \psi = -\boldsymbol{\omega}$, se réduit donc à l'équation scalaire: $\nabla^2 \psi = -\omega$. Par exemple, en coordonnées cartésiennes (x, y) , $\mathbf{v} = \nabla \times \psi$ se réduit à $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, ce

qui satisfait bien: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Le tourbillon est $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, et on vérifie effectivement que:

$$-\omega = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \nabla^2 \psi. \quad (\text{B.4})$$

En coordonnées polaires (r, θ) , $\mathbf{v} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$ conduit à $u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ et $u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$, ce qui satisfait bien $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0$. Le tourbillon est $\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}$, et on vérifie effectivement que:

$$-\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = \nabla^2 \psi. \quad (\text{B.5})$$

Écoulements axisymétriques

Il en va de même pour les écoulements axisymétriques (i.e., tridimensionnels mais sans variation azimuthale): le tourbillon et la fonction de courant n'ont qu'une composante dans la direction azimuthale: $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \omega \hat{\mathbf{e}}_\phi$ et $\boldsymbol{\psi} = \psi \hat{\mathbf{e}}_\phi$. L'équation de Poisson, $\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\omega}$, se réduit aussi à une équation scalaire. Par exemple, en coordonnées cylindriques (x, y) , $\mathbf{v} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$ donne $u = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y}(y \psi)$ et $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, ce qui satisfait bien: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y}(y v) = 0$. Le tourbillon est $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$. On obtient alors:

$$\begin{aligned} -\omega &= -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y}(y \psi) \right) \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\psi}{y^2} = \nabla^2 \psi - \frac{\psi}{y^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Cette équation scalaire est effectivement la traduction de l'équation vectorielle $\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\omega}$ dans le cas où $\boldsymbol{\psi}$ et $\boldsymbol{\omega}$ n'ont qu'une composante azimuthale.

En coordonnées sphériques (r, θ) , $\mathbf{v} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$ donne $u_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta \psi)$ et $u_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \psi)$, ce qui satisfait bien: $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta u_\theta) = 0$. Le tourbillon est $\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}$, et on vérifie que:

$$\begin{aligned} -\omega &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r \psi) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta \psi) \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \psi \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \psi \right) \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\psi}{\sin^2 \theta} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\psi}{r^2 \sin^2 \theta} \\ &= \nabla^2 \psi - \frac{\psi}{r^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Cette équation scalaire est la traduction de l'équation vectorielle $\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\omega}$ dans le cas où $\boldsymbol{\psi}$ et $\boldsymbol{\omega}$ n'ont qu'une composante azimuthale.