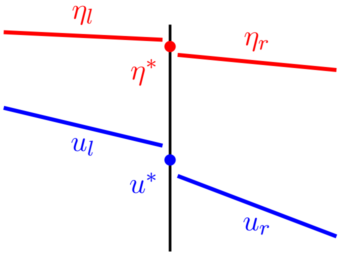
solveur de Riemann : flux à travers une discontinuité
équations eaux peu profondes linéaires non conservatives

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -h \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

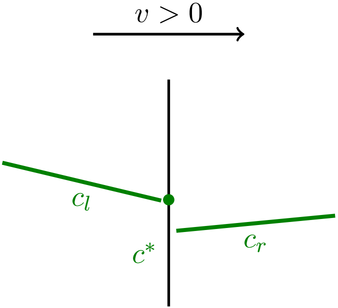


$$F_\eta = h u^* \quad u^* = ?$$

$$F_u = g \eta^* \quad \eta^* = ?$$

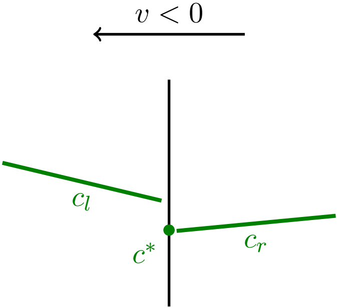
pour une équation de transport

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -v \frac{\partial c}{\partial x}$$



$$F_c = vc^*$$

$$c^* = c_l$$



$$F_c = vc^*$$

$$c^* = c_r$$

changement de variables pour obtenir deux équations de transport indépendantes

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \qquad - h\frac{\partial u}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial r}{\partial t} = -\lambda_r \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial s}{\partial t} = \qquad - \lambda_s \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\begin{bmatrix}\eta \\ u\end{bmatrix}}_{V} = -\underbrace{\begin{bmatrix} & h \\ g & \end{bmatrix}}_{R\Lambda R^{-1}}\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\begin{bmatrix}\eta \\ u\end{bmatrix}}_{V} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\begin{bmatrix}r \\ s\end{bmatrix}}_{R^{-1}V} = -\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_r & \\ & \lambda_s\end{bmatrix}}_{\Lambda}\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\begin{bmatrix}r \\ s\end{bmatrix}}_{R^{-1}V}$$

invariants de Riemann

$$r = \eta - \sqrt{h/g}\, u$$

$$s = \eta + \sqrt{h/g}\, u$$

vitesses caractéristiques

$$\lambda_r = \sqrt{gh}$$

$$\lambda_s = -\sqrt{gh}$$

calcul des flux

$$
\begin{aligned}
r &= h + \sqrt{h/g}\,u & \qquad \lambda_r &= \sqrt{gh} \\
s &= h - \sqrt{h/g}\,u & \qquad \lambda_s &= -\sqrt{gh}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_r > 0 \qquad & r^* &= r_l \qquad & \eta^* + \sqrt{h/g}\,u^* &= \eta_l + \sqrt{h/g}\,u_l \\
&\lambda_s < 0 \qquad & s^* &= s_l \qquad & \eta^* - \sqrt{h/g}\,u^* &= \eta_r - \sqrt{h/g}\,u_r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta^* &= \frac{\eta_l + \eta_r}{2} + \sqrt{h/g}\,\frac{u_l - u_r}{2} \\
u^* &= \frac{u_l + u_r}{2} + \sqrt{g/h}\,\frac{\eta_l - \eta_r}{2}
\end{aligned}
$$

les flux obtenus pénalisent les sauts

$$
\begin{aligned}
F_\eta &= hu^* = h\,\frac{u_l + u_r}{2} + \sqrt{gh}\,\frac{\eta_l - \eta_r}{2} \\
F_u &= g\eta^* = g\,\frac{\eta_l + \eta_r}{2} + \sqrt{gh}\,\frac{u_l - u_r}{2}
\end{aligned}
$$

cas non linéaire
équations des eaux peu profondes conservatives

$$H = h + \eta \qquad U = Hu$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= \qquad - \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= -gH \frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} &= -\lambda_r \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= \qquad - \lambda_s \frac{\partial s}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\begin{bmatrix} \eta \\ u \end{bmatrix}}_{V} = - \underbrace{\begin{bmatrix} & 1 \\ gH & \end{bmatrix}}_{R\Lambda R^{-1}} \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\begin{bmatrix} \eta \\ u \end{bmatrix}}_{V} \quad \not\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}}_{R^{-1}V} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_r & \\ & \lambda_s \end{bmatrix}}_{\Lambda} \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}}_{R^{-1}V}$$

Λ, R et R^{-1} dépendent des variables (H)
R^{-1} ne permutent pas avec les dérivées $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$
les deux systèmes ne sont pas équivalents

une approche possible consiste à chercher les variables caractéristiques d'une linéarisation du problème

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad H^* = \frac{H_l + H_r}{2} + \frac{1}{\sqrt{gH'}}\frac{U_l - U_r}{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -gH'\frac{\partial H}{\partial x} \qquad U^* = \frac{U_l + U_r}{2} + \sqrt{gH'}\frac{H_l - H_r}{2}$$

avec par exemple $H' = \frac{H_l+H_r}{2}$

- Il existe de nombreux choix (parfois complexes) de linéarisation en fonction des propriétés physiques que l'on souhaite conserver.
- En l'absence de discontinuité physique, ce choix a en général peu d'influence sur la solution, sauf pour les méthodes de premier ordre.