Séance 1

1 Dans l'océan mondial, le processus auquel est associée la plus petite échelle de longueur est la dissipation visqueuse d'énergie cinétique turbulente. La longueur caractéristique associée est de l'ordre d'un millimètre. On considère que l'échelle microscopique maximale est de l'ordre de la distance moyenne entre les molécules d'eau. Sachant que le volume de l'océan mondial est de l'ordre de $1.4 \times 10^{18} m^3$ et que ce dernier contient environ 5×10^{46} molécules d'eau, vérifier l'hypothèse de séparation nette des échelles de longueur microscopiques et macroscopiques.

2 On peut estimer la puissance d'une éolienne par une formule du type $k\rho^a S^b V^c$, où k, ρ, S et V désignent, respectivement, un coefficient adimensionnel dépendant de la forme des ailes, la masse volumique de l'air, la surface des ailes et la vitesse du vent. Déterminer la valeur des exposants a, b et c. Expliquer comment utiliser le résultat d'essais sur un modèle réduit placé dans une soufflerie.

3 Donner la dimension des expressions suivantes impliquant la fonction $f(s)$:

$$\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, \frac{\partial^k f}{\partial s^k}, \int_{s1}^{s2} f(s)ds, \int_{s1}^{s2} s^4 f(s)ds.$$

4 Dans un problème de mécanique des fluides, on est amené à considérer la quantité Ψ qui est fonction du temps, t, et des trois coordonnées spatiales cartésiennes, x, y et z. La géométrie du problème est telle qu'il est préférable d'effectuer une transformation de coordonnées. C'est ainsi que l'on est amené à exprimer la grandeur Ψ comme une fonction des nouvelles variables indépendantes, qui sont définies par

$$(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = [t, x, y, z/Z(t)].$$

On considère les expressions suivantes:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{t}}, \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{y}}, \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{z}}.$$

Parmi les 4 relations ci-dessus, lesquelles sont correctes? Justifier votre réponse!

5 Pour étudier des écoulements marins, on peut travailler dans le système de coordonnées spatio-temporelles (t, x, y, z) où t désigne le temps tandis que x, y et z sont des coordonnées cartésiennes, z étant la coordonnée verticale, qui croît vers le haut. L'interface eau-air est situé à la distance $\eta(t, x, y)$ du plan de référence horizontal défini par la relation $z = 0$. Le fond de la mer est une surface dont l'équation est $z = h(x, y)$. La surface et le fond sont imperméables. Expliquer pourquoi les conditions d'imperméabilité de la surface et du fond peuvent s'exprimer sous la forme

$$\left[\frac{D(z-\eta)}{Dt}\right]_{z=\eta} = 0 \; et \; \left[\frac{D(z+h)}{Dt}\right]_{z=-h} = 0,$$

où l'opérateur différentiel $\dfrac{D()}{Dt}$ est la dérivée matérielle, c'est-à-dire

$$\frac{D()}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}.$$

où u, v et w désignent les composantes de la vitesse selon les axes x, y et z. Il est parfois avantageux d'introduire les nouvelles coordonnées,

$$(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = [t, x, y, (z+h)/(\eta+h)],$$

ainsi qu'une "vitesse verticale alternative", qui vaut $\tilde{w} = \dfrac{D(\tilde{z})}{Dt}$. Déterminer la signification physique de la nouvelle coordonnée verticale $\tilde{z}$. Vérifier l'égalité suivante:

$$\frac{D()}{Dt} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + u\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + v\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}}.$$

Montrer qu'en utilisant les nouvelles variables, les conditions d'imperméabilité se simplifient en

$$[\tilde{w}]_{\tilde{z}=0} = 0 \ et \ [\tilde{w}]_{\tilde{z}=1} = 0.$$

Montrer que, dans un écoulement pour lequel la "vitesse verticale alternative" est nulle à tout instant et en tout point, une particule fluide initialement située à mi-hauteur restera au cours de ses déplacements à mi-hauteur de la colonne d'eau. Généraliser ce dernier résultat!

6 A partir de l'équation de continuité et de la conservation de la quantité de mouvement et à l'aide des hypothèses suivantes :

- The water is of uniform density ρ and the layer of water has thickness $h(x,t)$.
- The water flows over a horizontal, flat surface, so that h is also the elevation of the water surface.
- The elevation of the water surface is small compared to unity and the horizontal scale of flow features is large compared to the depth of the water.
- The flow velocity is independent of depth, so that $u = u(x,t)$. This velocity is assumed to be almost horizontal.
- Friction with the underlying surface is neglected.
- The water within the layer is in hydrostatic balance. The pressure at the upper surface is zero. The hydrostatic equation in geometrical vertical coordinates is $\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho$,
- La force de Coriolis est négligée,

retrouve les équations 1d linéarisées des eaux peu profondes.

7 Dans le domaine $-\inf < x < \inf$, on considère les équations linéarisées des eaux peu profondes adaptées à un problème à une dimension:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} - fv = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = 0.$$

où g, H et f sont des constantes positives. Donner la signification de ces constantes. Montrer que les équations ci-dessus admettent la propagation à la vitesse $\pm\sqrt{gh}$ d'une discontinuité de l'élévation. Evaluer la discontinuité de la vitesse u associé à la discontinuité d'élévation. Montrer que la vitesse v reste continue.

Séance 2

Conservation de la masse et de la quantité de mouvement

On considère la surface S dont chaque point se déplace à la vitesse $\mathbf{u}^S$. Cette surface est imperméable si aucune particule fluide ne la traverse. Si $\mathbf{n}$ désigne le vecteur normal unitaire à la surface, on exprime l'imperméabilite de la surface par la relation

$$\left[(\mathbf{u} - \mathbf{u}^S) \cdot \mathbf{n}\right]_{\mathbf{x} \in S} = 0.$$

De manière plus générale, le flux de masse traversant n'importe quelle surface S est donné par

$$\Phi = \int_S \rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}^S) \cdot \mathbf{n} dS.$$

8 On considère l'écoulement plan dont la vitesse est

$$\mathbf{u}(x, y) = U\mathbf{e}_x + \frac{UR^2}{(x^2 + y^2)^2} \left[(y^2 - x^2)\mathbf{e}_x - 2xy\mathbf{e}_y\right]$$

où U est une échelle de vitesse. Montrer que le cercle de rayon R dont le centre est situé au point $(x, y) = (0, 0)$ est imperméable.

9 On considère l'écoulement d'un fluide compressible dont la vitesse $\mathbf{u}$ et la masse volumique ρ valent $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = U(1 + x/L)\mathbf{e}_x + V\mathbf{e}_y + W\mathbf{e}_z$ et $\rho(t) = \rho_0 exp(-Ut/L)$, où U, V, W, L et ρ_0 sont des constantes. Déterminer la dimension de ces constantes. On délimite par la pensée un cylindre à base circulaire dont l'axe se confond avec celui de la coordonnée x. Les bases, dont le rayon est R, se situent en $x = 0$ et $x = L$. Montrer que le taux de variation temporelle de la masse de fluide contenue dans le cyclindre est égal au bilan des flux massiques traversant les bases du cyclindre.

10 Si x et y sont des coordonnées horizontales, on définit généralement la profondeur $h(x, y)$ de l'océan comme la distance séparant le fond de l'océan d'une surface de référence considérée comme "horizontale" qui correspond à peu près à la position moyenne de la surface de l'océan et dont l'équation est $z = 0$. L'interface océan-atmosphère est une surface libre dont l'équation est $\eta(t, x, y) - z = 0$. La hauteur d'une colonne d'eau est donc $H = h + \eta$. Montrer que les conditions d'imperméabilité de la surface et du fond de l'océan peuvent s'écrire sous cette forme :

$$\left[\frac{D(z - \eta)}{Dt}\right]_{z=\eta} = 0 \; et \; \left[\frac{D(z + h)}{Dt}\right]_{z=-h} = 0.$$

Interpréter ceci physiquement.

11 En utilisant les notations de l'exercice précédant, on étudie un écoulement océanique pour lequel on peut négliger les variations spatio-temporelles de la masse volumique de l'eau. La moyenne sur la verticale des deux composantes horizontales de la vitesse s'écrit

$$(\overline{u}, \overline{v}) = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} (u, v) dz.$$

On intègre l'équation de continuité sur la hauteur d'une colonne d'eau. On utilise les conditions d'imperméabilite de la surface et du fond de l'océan, ainsi que la définition de $\overline{u}$ et $\overline{v}$. Montrer que l'on obtient finalement

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial (H\overline{u})}{\partial x} - \frac{\partial (H\overline{v})}{\partial y}.$$

12 A partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement en 3d :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) = f + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

et en appliquant les simplifications suivantes :

- on ne considère que la pesanteur comme force de volume f,
- le fluide est newtonien : $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$,
- les mêmes définitions et hypothèses que les 2 exercices précédents,
- la contrainte de friction au fond est $\tau_{bx}\mathbf{e}_x + \tau_{by}\mathbf{e}_y = (\boldsymbol{\tau} \cdot n)_{z=\eta}$ et en surface $\tau_{sx}\mathbf{e}_x + \tau_{sy}\mathbf{e}_y = (\boldsymbol{\tau} \cdot n)_{z=-h}$,
- la pression en surface est nulle,

montrez que les équations des équations d'eaux peu profondes (non-linéaires) sont de la forme :

$$\frac{\partial H\overline{u}}{\partial t} + \frac{\partial H\overline{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial H\overline{uv}}{\partial y} = -gH\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left[\tau_{sx} - \tau_{bx} + F_x\right],$$

$$\frac{\partial H\overline{v}}{\partial t} + \frac{\partial H\overline{uv}}{\partial x} + \frac{\partial H\overline{v}^2}{\partial y} = -gH\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\left[\tau_{sy} - \tau_{by} + F_y\right],$$

où F_x et F_y sont encore à définir.

Séance 3

Ecoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants

Equations pour un écoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0, \\
\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}, \\
\rho c \frac{D\mathbf{T}}{Dt} &= 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k \boldsymbol{\nabla}^2 T.
\end{aligned}$$

13 Soit un écoulement stationnaire entre deux plaques parallèles horizontales d'un fluide newtonien pour lequel la masse volumique et la viscosité dynamique sont supposées constantes. On suppose aussi que l'écoulement est bien établi et que les plaques sont infinies dans la direction x. Ainsi, l'écoulement peut être considéré comme unidimensionnel et la vitesse ne dépend que de la coordonnée y, perpendiculaire aux plaques. Noter que les plaques sont situées en $y = 0$ et $y = h$ et sont immobiles. Déterminer:

1. l'expression analytique du champ de vitesse,
2. l'expression analytique du débit volumique par unité de hauteur.

14 On se place dans la même situation que ci-dessus avec une exception: la plaque située en $y = h$ se déplace dans la direction x à une vitesse U_0.

1. Déterminer l'expression analytique du champ de vitesse.
2. Adimensionnaliser l'expression obtenue.
3. Discuter de la forme du profil de vitesse en fontion d'un paramètre adimensionnel pertinent.

15 Considérons l'écoulement incompressible stationnaire et établi en conduite cylindrique de section circulaire de rayon R. Le gradient de pression dp/dx, et la viscosité μ du fluide sont connus. On vous demande de :

1. Calculer le profil de vitesse $u(r)$ et la vitesse moyenne u_m.
2. Calculer le coefficient de frottement C_f et les pertes de charges λ.
3. Calculer l'énergie générée par dissipation visqueuse dans l'écoulement.

Quelques ordres de grandeur de viscosité

Matériau	μ $[kg/ms]$
verre (à température ambiante)	10^{40}
verre (à 500^0C)	10^{12}
bitume	10^8
polymères fondus	10^3
miel	10^1
glycérine	10
huile d'olive	10^{-1}
huile industrielle	10^{-2}
eau	10^{-3}
air	10^{-5}

16 On souhaite déterminer le flux volumique d'un fluide s'écoulant dans une canalisation horizontale de section circulaire. Les pressions p_1 et p_2 sont données aux points 1 et 2 ainsi que les diamètres D_1 et D_2. La masse volumique du fluide sera supposée constante et l'écoulement est stationnaire, non visqueux et sous l'influence de la pesanteur.

1. Ecrivez l'équation de la quantité de mouvement
2. Montrez que
$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v})$$
3. Montrez que l'on peut définir une sorte d'énergie généralisée $E = \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz$ pour laquelle $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} E = 0$ et que cette quantitée est conservée pour chaque particule fluide le long de son mouvement (Théorème de Bernoulli).
4. Déterminez le flux volumique (m^3/s) au sein de la canalisation.

17 Deux fluides de masse volumique et viscosité différentes sont superposés et disposés sur un plan incliné faisant un angle θ par rapport à la verticale (voir figure ci-dessous). Les fluides sont soumis à l'action de la gravité. Déterminer les profils de vitesse des deux fluides.

Séance 4

Transfert de chaleur

Equations pour un écoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} &= 0,\\
\rho(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} &= -\boldsymbol{\nabla}p + \boldsymbol{\nabla}\cdot(2\mu\mathbf{d}) + \rho\mathbf{g},\\
\rho c(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})T &= 2\mu\mathbf{d}:\mathbf{d} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(k\boldsymbol{\nabla}T) + r,
\end{aligned}
$$

18 On recherche le profil de température $T(x)$ dans l'épaisseur d'une plaque plane dont les faces sont beaucoup plus grandes que son épaisseur L et ont une température connue : $T(0) = T_0$, $T(L) = T_L$. On vous demande de :

1. Calculer la densité de flux de chaleur $q = q_x$.
2. Déterminer le profil de température dans la plaque.

Quelques ordres de grandeur de coefficient de conduction

Matériau	k $[W/mK]$
cuivre	380
aluminium	260
acier	45
eau (à pression atmosphérique)	0.67
air (à pression atmosphérique)	0.02

19 Considérons une plaque plane composée de plusieurs couches dont les faces sont beaucoup plus grandes que son épaisseur L. On recherche le profil de température $T(x)$. Les coefficients de conduction des diverses couches sont donnés par k_i tandis que leur épaisseurs sont données par L_i. Les densités de flux de chaleurs sur les faces extérieures sont données par les expressions :

$$
\begin{aligned}
q &= h_0\ (T(0) - T_{\infty 0})\\
q &= h_L\ (T_{\infty L} - T(L))
\end{aligned}
$$

où h_0 et h_L sont des coefficients de convection, tandis que $T_{\infty 0} > T_{\infty L}$ sont les températures moyennes de l'air des deux côtés de la plaque. Lors du transfert de chaleur d'une paroi à température $T(L)$ vers un fluide environnant dont la température moyenne est $T_{\infty L}$ (supposée ici plus basse), l'expérience indique que l'on peut modéliser le transfert sous la forme ci-dessus connue sous le nom de *loi de Newton*. Cette loi purement phénomélogique est une façon très simple de modéliser le transfert de chaleur à la surface de la plaque car le coefficient h ne peut être déterminé une fois

pour toutes. Il devrait contenir en réalité toutes les informations relatives à l'écoulement et aux propriétés du fluide : profil de vitesse à la paroi, propriétés du fluide : viscosité, conductibilité thermique, masse volumique, chaleur massique. Ici, nous considérons que la valeur de h a été déterminée a priori pour les deux faces.

On vous demande de :

1. Calculer la densité de flux de chaleur q en fonction des données.
2. Déterminer les températures aux interfaces entre les couches.
3. Dessiner le profil de température.

Quelques ordres de grandeur de coefficients de convection

Type de transfert	Fluide	h $[W/m^2K]$
Convection forcée	Gaz	10...300
	Liquide aqueux	500...12000
	Huile	50...1700
	Métal liquide	6000...110000
Convection naturelle	Gaz	5...30
	Liquide aqueux	100...1000
Changement de phase	Eau, ébullition	3000...60000
	Eau, condensation	5000...110000

Séance 5

Lubrification

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
0 &= -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

20 **Convoyeur hydraulique rectiligne**

Pour déplacer des pièces très lourdes, on utilise un convoyeur hydraulique avec une pompe qui alimente, via deux rainures centrales, deux patins distincts avec une huile dont les caractéristiques sont $\rho = 900\ kg/m^3$ et $\mu = 0.2\ Ns/m^2$. L'écart entre la rainure centrale et le bord de chaque demi-patin est $L = 0.1\ m$ tandis que la longueur totale du convoyeur est $b = 2.0\ m$. La distance entre la surface des patins et le sol est uniforme et est notée h. La pression à la sortie de chaque patin (et aussi à l'entrée de la pompe) est celle du milieu ambiant et est notée p_0. La pression à l'injection de chaque patin (et aussi à la sortie de la pompe) est notée p_i. La caractéristique de la pompe est

$$\frac{(p_i - p_0)}{\rho} = \alpha - \beta\, Q^2\ ,$$

avec $\alpha = 10^3\, m^2/s^2$, $\beta = 10^9\, m^{-4}$ et Q le débit volumique.

1. Réaliser un schéma du problème.
2. Quel type d'écoulement a-t-on sous chaque demi-patin ? Donner l'expression du profil de vitesse et la relation liant la vitesse de débit au gradient de pression.
3. Exprimer la distribution de pression $p(x) - p_0$, en fonction de x, L, p_i et p_0.
4. Calculer la valeur de $p_i - p_0$ nécessaire pour supporter une charge (poids propre du système et charge utile) de $W = 25$ tonnes.
5. Quel est alors le débit, Q, fourni par la pompe ?
   Quelle est aussi la puissance utile fournie par la pompe ?
   Que vaut alors h entre le patin et le sol ?
6. Que se passe-t-il lorsque la charge diminue ?

Séance 6

Ecoulements instationnaires et couche limite

$$\begin{array}{|rcl|}\hline \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} &=& 0, \\ \rho\dfrac{D\mathbf{v}}{Dt} &=& -\boldsymbol{\nabla}p+\boldsymbol{\nabla}\cdot(2\mu\mathbf{d})+\rho\mathbf{g}, \\ \hline\end{array}$$

21

Démarrage brusque d'une plaque

Considérons un écoulement instationnaire le long d'une plaque plane définie par l'équation $y = 0$. On recherche donc une vitesse de la forme : $u = u(y, t)$. Il n'y a pas de gradient de pression latéral et on souhaite étudier le démarrage brusque d'une plaque. Pour $t < 0$, il n'y a pas de vitesse de plaque et aucun écoulement. Pour $t > 0$, une vitesse de plaque constante, U, est imposée. Un écoulement démarre progressivement au sein du fluide afin de respecter la condition de non-glissement à la paroi : $u(0, t > 0) = U$.

1. Montrer que le champs de vitesse satisfait à l'équation classique de la diffusion
$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ .$$
2. Montrer qu'en introduisant une variable de similitude adéquate $\eta(y, t)$, on peut se limiter à résoudre une équation différentielle ordinaire par rapport à cette variable η.
3. Obtenir l'expression analytique du champs de vitesse $u(y, t)$.

22

Plaque oscillante

Considérons toujours un écoulement instationnaire le long d'une plaque plane. Il n'y a pas de gradient de pression latéral et la vitesse de la plaque est donnée par $U\cos(\omega t)$.

1. Montrer qu'en introduisant une variable de similitude adéquate $\eta(y, t)$, on peut se limiter à résoudre une équation différentielle ordinaire par rapport à cette variable η.
2. Obtenir l'expression analytique du champs de vitesse $u(y, t)$.

23 **Couche limite**

Un fluide de masse volumique ρ et de viscosité μ s'écoule de haut en bas et rencontre une paroi horizontale décrite par l'équation $y = 0$. Le long de cette paroi, un écoulement horizontal va donc se créer et donner lieu à l'apparition d'une couche limite le long de la direction x. L'écoulement extérieur à la couche limite est donné par la relation $u_e(x) = (U\ x)/L$ où U et L sont une vitesse et une longueur caractéristique.

Le long de la paroi, on a une vitesse horizontale extérieure qui varie linéairement le long de l'axe horizontal. En $x = 0$, on a un point de stagnation. Pour chaque valeur de x, on définit une région d'une épaisseur effective $\delta(x)$ au dessus de laquelle, la vitesse horizontale peut quasiment être considérée comme égale à l'écoulement extérieur $u_e(x)$. Au sein de cette couche limite, nous supposons que le profil de vitesse horizontal est donné par :

$$u(x,y) = u_e(x)\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\ \eta(x,y)\right), \qquad \text{avec} \quad \eta(x,y) = \frac{y}{\delta(x)}.$$

Il s'agit évidemment d'une approximation effectuée a priori.

1. Réaliser un dessin du problème.
2. L'épaisseur de déplacement est définie par : $\delta^* \;=\; \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$
   Représentez la sur le dessin pour le cas $u_e = 1$ et trouvez sa signification physique.
   L'épaisseur de quantité de mouvement est quant à elle définie par : $\theta \;=\; \int_0^\infty \frac{u}{u_e}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$
3. Nous approximons les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement par :
   $$\delta^* \;\approx\; \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \qquad \theta \;\approx\; \int_0^\delta \frac{u}{u_e}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$$
   Est-il possible de justifier de telles approximations ?
4. En utilisant les expressions ci-dessous, démontrer que les rapports
   $$a = \frac{\delta^*(x)}{\delta(x)}, \qquad b = \frac{\theta(x)}{\delta(x)}, \qquad c = \frac{\delta(x)\tau_w(x)}{u_e(x)}$$
   sont constants et évaluer la valeur des trois constantes.
5. Pour les couches limites laminaires, il y a peu de solutions exactes comme la solution de Balsius pour le cas u_e uniforme. On peut développer une approche simplifée en utilisant la formulation intégrale de la conservation de la masse et de la quantitée de mouvement ou en intégrant les équations de la couche limite en y (voir notes).
6. A partir de l'équation intégrale de von Karman, démontrer que le carré de l'épaisseur de quantité de mouvement doit satisfaire l'équation suivante :
   $$x\frac{d\theta^2}{dx} + \underbrace{\frac{8}{4-\pi}}_{\alpha}\,\theta^2 = \underbrace{\frac{\nu L(4-\pi)}{2U}}_{\beta}.$$
7. Calculer les solutions de cette équation différentielle. Parmi celles-ci, sélectionner l'unique qui peut représenter l'épaisseur de quantité de mouvement, en interpréter physiquement votre résultat.
8. En déduire finalement une expression de τ_w et la comparer avec la solution exacte de ce problème
   $$\tau_w = 1.2326\ \mu\ \sqrt{\frac{\rho U^3 x^2}{L^3 \mu}}.$$