1. Le but de cet exercice est de légitimer les paramétrisations auxquelles nous aurons recours dans la résolution de problèmes où la dissipation visqueuse d'énergie cinétique turbulente entre en jeux. En effet, il faut que la plus petite distance considérée lors de l'étude d'un phénomène (1mm) soit bien plus grande que l'espacement entre deux molécules pour pouvoir supposer notre milieu continu et homogène. Vérifions que cela est bien le cas pour les molécules d'eau de l'océan sachant qu'il en contient 5×10^{46} et que son volume est de $1.4 \times 10^{18} m^3$:

$$\sqrt[3]{\frac{1.4 \times 10^{18}}{5 \times 10^{46}}} = 3.03 \times 10^{-10} << 1mm$$

Nos paramétrisations ne seront donc pas source de grandes erreurs.

Exercice 2) Solution :

Analyse "dimensionnelle" par les unités :

$$P = k\rho^a S^b V^c$$

k est adimensionnel

$$\rho = \frac{kg}{m^3}$$

$$S = m^2$$

$$V = \frac{m}{s}$$

donc
$$P = (\frac{kg}{m^3})^a * (m^2)^b * (\frac{m}{s})^c$$
.

Or on sait que la puissance
$$P = kg\frac{m^2}{s^3}$$
.

On s'aperçoit directement que l'exposant de kg est 1 et donc $a = 1$

et que l'exposant de l'unité s est 3 et donc $c = 3$.

On a alors $P = \frac{kg}{m^3} * (m^2)^b * \frac{m^3}{s^3} = kg\frac{(m^2)^b}{s^3}$

et on voit tout de suite que si $b = 1$ on a bien les unités recherchées d'une puissance.

Grâce à ce résultat, on s'aperçoit que si la surface double alors la puissance double. Par contre, si c'est la vitesse du vent qui double alors la puissance sera multipliée par 8!

Exercice 3.

Si on pose :

$$[f(s)] = F \quad ; \quad [s] = S$$

On obtient alors pour les différentes expressions les dimensions suivantes :

$$[\frac{\partial f(s)}{\partial s}] = \frac{F}{S} \quad ; \quad [\frac{\partial^2 f(s)}{\partial s^2}] = \frac{F}{S^2} \quad ; \quad [\frac{\partial^k f(s)}{\partial s^k}] = \frac{F}{S^k}$$

$$[\int_{s1}^{s2} f(s)ds] = F \cdot S \quad ; \quad [\int_{s1}^{s2} s^4 f(s)ds] = F \cdot S^5$$

ex 4.

Les égalités $\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial\check{x}} et \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial\check{y}}$ sont vraies,

les autres sont fausses et deviennent :

$\frac{\partial\psi}{\partial t}(\check{t},\check{x},\check{y},\check{z})$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial\check{t}}\frac{\partial\check{t}}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial\check{x}}\frac{\partial\check{x}}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial\check{y}}\frac{\partial\check{y}}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial\check{z}}\frac{\partial\check{z}}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial\check{t}}.1 + \frac{\partial\psi}{\partial\check{x}}.0 + \frac{\partial\psi}{\partial\check{y}}.0 + \frac{\partial\psi}{\partial\check{z}}\cdot\frac{z.z'(t)}{(z^2)(t)}$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial\check{t}} + \frac{z.z'(t)}{(z^2)(t)}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\check{z}}$$

$\frac{\partial\psi}{\partial z}(\check{t},\check{x},\check{y},\check{z})$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial\check{t}}\frac{\partial\check{t}}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial\check{x}}\frac{\partial\check{x}}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial\check{y}}\frac{\partial\check{y}}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial\check{z}}\frac{\partial\check{z}}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{(z)(t)}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\check{z}}$$

$$(\vec{u} - \vec{u}_S) \cdot \vec{n} = 0 \tag{1}$$

Dans notre cas, cela revient à dire qu'une particule (au sens de particule fictive) qui est à la surface (ou au fond) du fluide doit y rester (sinon il y a un flux vertical). Un observateur Eulérien (assis sur la particule fictive à la surface) ne verra pas changer sa distance à la surface. La dérivée (matérielle, donc) de cette distance est nulle :

$$D_t(z - \eta)|_{z=\eta} = 0 \tag{2}$$

On introduit maintenant la coordonnée $\tilde{z} = \frac{z+h}{\eta+h}$. Il s'agit d'une coordonnée verticale relative : on remarque que lorsque $\tilde{z} = 1$, cela siginifie que $z = \eta$, c'est-à-dire que l'on se trouve à la surface. Si $\tilde{z} = 0$, c'est qu'on se trouve au fond. Si on définit la quantité $\tilde{w} = D_t\tilde{z}$, appelée "vitesse verticale alternative", on obtient l'égalité suivante :

$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \tilde{w}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}}$

0n voit que ces deux quantités ne diffèrent qu'à cause du dernier terme. Il faut donc montrer que

$$w\frac{\partial}{\partial z} = \tilde{w}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}}, \tag{3}$$

Or,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \tag{4}$$

La condition devient

$$w\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} = \tilde{w} = D_t\tilde{z} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} + u\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} + v\frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} + w\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}, \tag{5}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} + u\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} + v\frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} = 0 \tag{6}$$

Un des intérêts à l'utilisation de ces nouvelles variables est la simplification de l'écriture des conditions d'imperméabilité : elles s'écrivent

$\tilde{w}|_{\tilde{z}=0} = 0$ et $\tilde{w}|_{\tilde{z}=1} = 0$
En effet,

$$0 = D_t(z - \eta)|_{z=\eta} = D_t[(\tilde{z} - 1)(\eta + h)]|_{\tilde{z}=1} = D_t\tilde{z}(\eta + h) + (\tilde{z} - 1)D_t(\eta + h)|_{\tilde{z}=1} \tag{7}$$

$\Leftrightarrow D_t\tilde{z}(\eta + h)|_{\tilde{z}=1} = 0 \Leftrightarrow D_t\tilde{z}|_{\tilde{z}=1} = \tilde{w}|_{\tilde{z}=1} = 0$

Exercice 10

Il faut montrer que, avec les notations de l'énoncé, on a

$$\left[\frac{D(z-\eta)}{Dt}\right]_{z=\eta} = 0 \ et \ \left[\frac{D(z+h)}{Dt}\right]_{z=-h} = 0.$$

Surface océanique

La condition d'imperméabilité de la surface S de l'océan est

$$((\vec{u}-\vec{u}^s).\vec{n})_{x\in S} = 0$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normé normal à la surface, $\vec{u} = (u, v, w)$ est la vitesse de l'eau et $\vec{u}^s$ est la vitesse de la surface. Le vecteur $\vec{n}$ est proportionnel au gradient de la surface. C'est-à-dire

$$\vec{n} \propto \vec{\nabla} S.$$

Etant donné que

$$S \equiv z - \eta(t, x, y) = 0$$

on a

$$\vec{n} = \left(-\frac{\partial n}{\partial x}; -\frac{\partial n}{\partial y}; 1\right).$$

On calcule alors

$$\begin{aligned}
\left[\frac{D(z-\eta)}{Dt}\right]_{z=\eta} &= \left[\frac{\partial}{\partial t}(z-\eta) + u\frac{\partial}{\partial x}(z-\eta) + v\frac{\partial}{\partial y}(z-\eta) + w\frac{\partial}{\partial z}(z-\eta)\right]_{z=\eta} \\
&= \left[-\frac{\partial}{\partial t}\eta - u\frac{\partial}{\partial x}\eta - v\frac{\partial}{\partial y}\eta + w\right]_{z=\eta} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\eta + \vec{u}.\vec{n}
\end{aligned} \tag{8}$$

On peut alors modifier le premier terme de la dernière équation. Celui-ci est égal au déplacement vertical de la surface. En effet,

$$\vec{u}^s = \left(0, 0, \frac{\partial \eta}{\partial t})\right).$$

Les points de l'interface atmosphère/océan ne font que varier de haut en bas. La vitesse n'est que verticale. D'où

$$\vec{u}^s.\vec{n} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

car η est la hauteur de l'interface depuis le plan de référence $z = 0$. L'équation (8) se réécrit donc

$$\begin{aligned}\left[\frac{D(z-\eta)}{Dt}\right]_{z=\eta} =& - \vec{u}^s.\vec{n} + \vec{u}.\vec{n} \\ =& (\vec{u} - \vec{u}^s).\vec{n}\end{aligned}$$

La condition d'imperméabilité implique que cette quantité soit nulle. Dans ce cas, on a bien la relation recherchée :

$$\begin{aligned}\left[\frac{D(z-\eta)}{Dt}\right]_{z=\eta} =& (\vec{u} - \vec{u}^s).\vec{n} \\ =& 0\end{aligned}$$

Fond océanique

La condition d'imperméabilité du fond F de l'océan est

$$((\vec{u} - \vec{u}^s).\vec{n})_{x \in F} = 0$$

où $\vec{u}^s$ est la vitesse du fond de l'océan. On peut, si l'on ne considère pas le mouvement des crabes, la supposer nulle. Nous devons donc avoir

$$(\vec{u}.\vec{n})_{x \in F} = 0$$

L'équation du fond de l'océan est

$$F \equiv z + h(x, y) = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} F =& \left(\frac{\partial h}{\partial x}; \frac{\partial h}{\partial y}; 1\right) \\ \propto& \vec{n}\end{aligned}$$

Comme auparavant, on calcule :

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{D(z-h)}{Dt}\right]_{z=-h} &= \left[\frac{\partial}{\partial t}(z+h) + u\frac{\partial}{\partial x}(z+h) + v\frac{\partial}{\partial y}(z+h) + w\frac{\partial}{\partial z}(z-\eta)\right]_{z=\eta} \\
&= \left[0 + u\frac{\partial}{\partial x}h + v\frac{\partial}{\partial y}h + w\right]_{z=-h} \\
&= (u, v, w) \, . \left(\frac{\partial}{\partial x}h, \frac{\partial}{\partial y}h, 1\right) \\
&= \vec{u}.\vec{\nabla}F \\
&\propto \vec{u}.\vec{n}
\end{aligned}
$$

Et on a, par la condition d'imperméabilité, que

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{D(z+h)}{Dt}\right]_{z=-h} &= \vec{u}.\vec{n} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Exercice 11

Ecoulement océanique pour lequel on néglige les variations spatio-temporelles de la masse volumique $\Rightarrow \rho$ est constant dans l'espace et le temps.

L'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho \vec{u}) = 0$$

où $\vec{u} = (u, v, w)$; devient

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = 0$$

On intègre cette équation sur la hauteur d'une colonne d'eau :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-h}^{\eta} \vec{\nabla}.\vec{u}\ dz \\
&= \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\ dz \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\eta} u\ dz - u(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x} + u(-h)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\eta} v\ dz - v(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial y} + v(-h)\frac{\partial \eta}{\partial y} + w(\eta) - w(-h) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(H\overline{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(H\overline{v}) + \frac{\partial \eta}{\partial t}
\end{aligned}$$

Puisque $H = h + \eta$ et $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$, on a $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$ et on obtient finalement

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial (H\overline{u})}{\partial x} - \frac{\partial (H\overline{v})}{\partial y}$$

Remarques:

On a utilisé la règle de Leibniz :

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\ dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\ dt + f(b(x),t)\frac{db}{dx} - f(a(x),t)\frac{da}{dx}$$

On a également utilisé les conditions d'imperméabilité $(\vec{u} - \vec{u_s}).\vec{n}$, càd

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \vec{u}.\vec{n} = 0 & \text{(condition à la surface)} \\[2ex] \vec{u}.\vec{n} = 0 & \text{(condition au fond de l'océan)} \end{cases}$$

puique $\vec{n} = (-\frac{\partial \eta}{\partial x}, -\frac{\partial \eta}{\partial y}, 1)$; $\vec{u_s} = (0, 0, \frac{\partial \eta}{\partial t})$ à la surface (car la surface ne fait que monter ou descendre) et $\vec{u_s} = (0,0,0)$ au fond de l'océan (car on considère que le fond ne bouge pas).

15.

Pour simplifier le probléme, on se place dans un système de coordonnée cylindrique, où r est le rayon du cylindre, ϕ la composante angulaire et x la profondeur du cylindre. Comme on a un écoulement stationnaire, toutes les dérivés temporelles valent zéros. De même, comme l'écoulement est établi, la vitesse $\mathbf{u}(r, \phi, z)$ ne peut pas dépendre de x et par symétrie, ne peut pas dépendre de ϕ. On a donc que

- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi} = 0$
- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0$

En réécrivant les 3 équations de quantités de mouvement, seule une survit:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r \frac{du}{dr}). \tag{9}$$

Il suffit alors d'intégrer deux fois de suite cette équation, pour obtenir:

$$u = r^2 \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} + C_1 \log r + C_2. \tag{10}$$

Pour mettre en évidence le facteur du premier terme, on réécrit les constantes de telle façon à avoir:

$$u(r) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} (\frac{r^2}{4} + C_1 \log r + C_2). \tag{11}$$

Afin de déterminer les deux constantes d'intégrations, on regarde les conditions aux limites. Pour $r = 0$, le terme avec logarithme fait tendre la vitesse vers l'infini. Afin d'éviter cette possibilité non physique, C_1 vaut forcément zéro. Pour $r = R$, on obtient:

$$u(R) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} (\frac{R^2}{4} + C_2). \tag{12}$$

D'où l'on obtient $C_2 = -R^2/4$. La vitesse est alors donnée par

$$u(r) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} (\frac{r^2}{4} + -\frac{R^2}{4}). \tag{13}$$

Pour calculer la vitesse moyenne u_m, on a besoin de calculer le débit volumique Q:

$$Q = \int_{Aire} u(r) dA = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R u(r) r dr,$$

$$Q = \frac{2\pi}{\mu} \frac{dp}{dx} (\frac{R^4}{16} - \frac{R^4}{8}) = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{dp}{dx} R^4. \tag{14}$$

On peut donc calculer u_m,

$$u_m = \frac{Q}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dx}. \tag{15}$$

Le coefficient de frottement C_f et donné par

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho u_m^2/2} \qquad \text{avec} \quad \tau_w = \mu \frac{du}{dy}|_{r=R}$$

On calcul alors τ_w,

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy}|_{r=R} = -\frac{dp}{dx} \frac{R}{2}. \tag{16}$$

Ce qui nous permet d'obtenir C_f:

$$C_f = \frac{8}{\rho R u_m} = -\frac{64\mu}{\rho R^3}\frac{1}{dp/dx}. \tag{17}$$

La charge utile s'obtient par la relation suivante:

$$(-\frac{dp}{dx}) = \frac{\rho u_m^2}{2}\frac{\lambda}{2R}. \tag{18}$$

En remplancant simplement les éléments déjà connu, on obtient:

$$\lambda = -\frac{64}{\rho R^3}\frac{4}{dp/dx} = 4C_f. \tag{19}$$

ex 16.

<u>hypothèse :</u> $\mu = 0$

1.

$$\begin{cases} \rho\frac{Dv_r}{Dt} & = -\frac{\partial P}{\partial r} \\ \rho\frac{Dv_z}{Dt} & = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho.g \end{cases} \qquad ou\ \big((v.\nabla)v\big) = -\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\rho.g}{\rho}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \rho(\partial_t v_r + v_r\partial_r v_r + v_z\partial_z v_r) & = -\partial_r P \\ \rho(\partial_t v_z + v_r\partial_r v_z + v_z\partial_z v_z) & = -\partial_z P - \rho.g \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} v_r\partial_r v_r + v_z\partial_z v_r & = -\frac{\partial_r P}{\rho} \\ v_r\partial_r v_z + v_z\partial_z v_z & = -\frac{\partial_z P}{\rho} - g \end{cases}$$

2.

$$\text{Montrons } \underline{\mathrm{v}}\,.\,\underline{\nabla}\ \ \underline{\mathrm{v}} = \underline{\nabla}\ \ (\tfrac{|\underline{v}|^2}{2})\text{ - }\underline{\mathrm{v}}\wedge(\underline{\nabla}\ \wedge\ \underline{v})$$

en effet,

$$\begin{aligned} \underline{\nabla}\ \ (\tfrac{|\underline{v}|^2}{2})\text{ - }\underline{\mathrm{v}}\wedge(\underline{\nabla}\ \wedge\ \underline{v}) &= \underline{\nabla}\,(\tfrac{\underline{v}\,.\,\underline{v}}{2})\text{ - }\underline{\mathrm{v}}\wedge(\underline{\nabla}\ \wedge\ \underline{v}) \\ &= \tfrac{1}{2}\,.\,\Big[\underline{v}\,.\,\underline{\nabla}\,\underline{v}\ +\ \underline{v}\,.\,\underline{\nabla}\,\underline{v}\ +\ \underline{v}\ \wedge\ (\underline{\nabla}\ \wedge\ \underline{v})\ +\ \underline{v}\ \wedge\ (\underline{\nabla}\ \wedge\ \underline{v})\Big]\ -\ \underline{v}\ \wedge\ (\underline{\nabla}\ \wedge\ \underline{v}) \\ &= \underline{v}\,.\,\underline{\nabla}\,\underline{v}\ +\ \underline{v}\ \wedge\ (\underline{\nabla}\ \wedge\ \underline{v}) \end{aligned}$$

on trouve bien l'égalité demandée.

3.

Soit $\mathrm{E} = \frac{|\underline{v}|^2}{2}\ +\ \frac{P}{\rho}\ +\ \underline{g}z$,

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{v}}\,.\,\underline{\nabla}\,\mathrm{E} &= \underline{\mathrm{v}}\,.\,\underline{\nabla}\,(\tfrac{|\underline{v}|^2}{2}\ +\ \underline{v}\,.\,\underline{\nabla}\,(\tfrac{P}{\rho}\ +\ \underline{v}\,.\,\underline{\nabla}\,(\underline{g}\,.\,z) \\ &= \underline{v}\,.\,\Big[(\underline{v}\,.\,\underline{\nabla}\,\underline{v})\ +\ \underline{v}\ \wedge\ (\underline{\nabla}\ \wedge\ \underline{v})\Big]\ +\ \tfrac{\underline{v}}{\rho}\,.\,\underline{\nabla}P\ +\ \underline{g}\,\underline{v}\,.\,\underline{\nabla}z \\ &= \underline{v}\Big[(\underline{v}\,.\,\underline{\nabla})\,\underline{v}\ +\ \tfrac{\underline{\nabla}P}{\rho}\ -\ \underline{g}\Big] \end{aligned}$$

Or la conservation de la quantité de mouvement donne :

$$(\underline{v}\,.\,\underline{\nabla})\,\underline{v} \;=\; \frac{\underline{\nabla} P}{\rho} \;-\; \underline{g}$$

On a donc bien : $\underline{v}\,.\,\underline{\nabla}\,E \;=\; 0$!

4.

Puisque E $= \frac{|\underline{v}|^2}{2} \;+\; \frac{P}{\rho} \;+\; gz$, est conservée pour une particule le long de son mouvenment, on a :

$$E_1 \;=\; E_2$$

et par conservation du volume on a :

$$A_1 v_1 \;=\; A_2 v_2$$

$$\begin{array}{llll}
\hat{\text{A}}^\circ E_1 \;=\; E_2 & \Longleftrightarrow & \frac{|v_1|^2}{2} \;+\; \frac{P_1}{\rho} \;+\; gz & = \frac{|v_2|^2}{2} \;+\; \frac{P_2}{\rho} \;+\; gz \\
 & \Longleftrightarrow & v_1^2 \;-\; v_2^2 & = \frac{2(P_2\,-\,P_1)}{\rho} \\
\hat{\text{A}}^\circ A_1 v_1 \;=\; A2 v_2 & \Longleftrightarrow & \frac{1}{4}\pi D_1^2 v_1 & = \frac{1}{4}\pi D_2^2 v_2
\end{array}$$

On obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_1^2 \;-\; v_2^2 & = \; \frac{2}{\rho}\,(P_2 \;-\; P_1) \\ D_1^2 v_1 & = \; D^2 v_2 \end{array} \right.$$

On cherche à déterminer le flux volumique. Celui-ci vaut $\frac{\pi}{4} D_1 v_1$ ou $\frac{\pi}{4} D_2^2 v_2$. Il nous reste donc à trouver v_1 ou v_2:

$$\begin{array}{lll}
\Rightarrow & \frac{D_2^4}{D_1^4}\,\frac{v_2^2}{2} \;+\; \frac{P_1}{\rho} & = \frac{v_2^2}{2} \;+\; \frac{P_2}{\rho} \\
 & \frac{1}{2}\,(\frac{D_2^4}{D_1^4} \;-\; 1)\,v_2^2 & = \frac{P_2\,-\,P_1}{\rho} \\
 & v_2 & = \sqrt{\frac{P_2\,-\,P_1}{\frac{\rho}{2}\,(\frac{D_2^4}{D_1^4})}} \\
 & & = \sqrt{\frac{(P_2\,-\,P_1)\,D_1^4}{\frac{\rho}{2}\,(D_2^4 - D_1^4)}}
\end{array}$$

On trouve ainsi :

$$\text{flux} = \frac{\pi}{4} D_2^2 v_2 = \frac{\pi}{4}\,\sqrt{\frac{(P_2\,-\,P_1) D_1^4 D_2^2}{\frac{\rho}{2}(D_2^4 - D_1^4)}}$$

Exercice 17

Equations de conservation utilisées :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \tag{20}$$

$$\rho \frac{D\vec{v}(x,y,t)}{Dt} = -\vec{\nabla} p(x,y,t) + \mu \Delta \vec{v}(x,y,t) + \rho \vec{g} \tag{21}$$

avec $\vec{v} = u\hat{x} + v\hat{y}$

Hypothèses :

- écoulement stationnaire
- écoulement établi
- pression constante

Conditions aux bords :

$$u_1(y=0) = 0 \qquad v_1(y=0) = 0 \tag{22}$$

$$u_1(y=h_1) = u_2(y=h_1) \qquad v_1(y=h_1) = v_2(y=h_1) \tag{23}$$

De plus, on peut imposer que les contraintes soient nulles à l'interface $y = h_2$.

1. Commençons par déterminer ce que signifie le fait que les contraintes soient nulles à l'interface $y = h_2$. Si on définit le tenseur des contraintes par :

$$\sigma^{ij} = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial t} - (p(x,y) - p_0) & \mu(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}) \\ \mu(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}) & 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial y} - (p(x,y) - p_0) \end{pmatrix}$$

avec p_0 la pression du milieu extérieur, c'est à dire l'air. La condition au bord s'écrit alors :

$$\sigma^{ij} n_j = 0$$

ou n_j est la normale à la surface.

On obtient alors,

$$\begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{h_2} - (p(x,h_2) - p_0) & \mu(\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{h_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x}|_{h_2}) \\ \mu(\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{h_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x}|_{h_2}) & 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial y}|_{h_2} - (p(x,h_2) - p_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Ce qui donne les équations suivantes,

$$\mu(\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{h_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x}|_{h_2}) = 0$$

$$2\mu \frac{\partial v_2}{\partial y}|_{h_2} - (p(x,h_2) - p_0) = 0$$

Avec les hypothèses qui ont été posées, on en déduit,

$$\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{h_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial v_2}{\partial y}|_{h_2} = 0 \tag{24}$$

2. Commençons par déterminer la forme de l'écoulement du fluide 1, c'est à dire celui d'épaisseur h_1. Par l'équation de conservation 20, on obtient :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$$

Muni des hypothèses et de la condition au bord 22, on trouve alors comme expression,

$$v_1(y) = 0$$

Pour déterminer le profile de vitesse du fluide selon $\hat{x}$, il faut utiliser l'équation 21 qui nous donne,

$$\rho_1(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}) \quad = \quad \mu_1(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}) + \rho_1 g\cos\theta$$

Connaissant le profile de v_1 et les hypothèses, l'équation se simplifie et il ne reste que,

$$\mu_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = -\rho_1 g\cos\theta$$

Ce qui nous donne par intégrations successive,

$$u_1(y) = -\frac{\rho_1 g}{\mu_1}\cos\theta\frac{y^2}{2} + Ay + B$$

En appliquant la condition au bord 22, on trouve que $B = 0$ et la vitesse selon $\hat{x}$ est alors,

$$u_1(y) = -\frac{\rho_1 g}{\mu_1}\cos\theta\frac{y^2}{2} + Ay$$

3. Pour obtenir le profil générale de la vitesse du fluide 2 on procède exactement de la même façon que pour le fluide 1. A l'aide de l'équation de conservation 20 on trouve,

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0$$

Par les hypothèse quel'on a posé et la condition au bord 23 cela donne,

$$v_2(y) = 0$$

De même que l'équation de conservation 21 appliquée au fluide 2 s'écrit,

$$\rho_2(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2\frac{\partial u_2}{\partial y}) \quad = \quad \mu_2(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}) + \rho_2 g\cos\theta$$

En tenant compte des hypothèses posées, on arrive à ,

$$\mu_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = -\rho_2 g\cos\theta$$

Par intégrations successives on arrive à ,

$$u_2(y) = -\frac{\rho_2 g}{\mu_2}\cos\theta\frac{y^2}{2} + Cy + D$$

Si on applique la condition au bord 24 on trouve que le terme constant C est donné par,

$$C = \frac{\rho_2 g}{\mu_2}\cos\theta h_2$$

L'expression de la vitesse selon $\hat{x}$ du fluide 2 se résume alors à ,

$$u_2(y) = \frac{\rho_2 g}{\mu_2}\cos\theta\frac{y^2}{2} + \frac{\rho_2 g}{\mu_2}\cos\theta h_2 y + D$$

4. Pour résumé, on a obtenu comme profile de vitesse pour les deux fluides,

$$\begin{aligned}
u_1(y) &= -\frac{\rho_1 g}{\mu_1}\cos\theta\frac{y^2}{2} + Ay \\
u_2(y) &= -\frac{\rho_2 g}{\mu_2}\cos\theta\frac{y^2}{2} + \frac{\rho_2 g}{\mu_2}\cos\theta h_2 y + D
\end{aligned}$$

Afin d'arriver à bout des constantes A et D, on peut imposer la continuité de la variation de la vitesse des deux fluides situés à l'interface $y = h_1$, ce qui se traduit par,

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}|_{h_1} = \frac{\partial u_2}{\partial y}|_{h_1}$$

Ce qui se réécrit,

$$-\frac{\rho_1 g}{\mu_1}\cos\theta h_1 + A = -\frac{\rho_2 g}{\mu_2}\cos\theta h_1 + \frac{\rho_2 g}{\mu_2}\cos\theta h_2$$

On peut ainsi déterminer la valeur de A,

$$A = g\cos\theta(\frac{\rho_1 h_1}{\mu_1} - \frac{\rho_2 h_1}{\mu_2} + \frac{\rho_2 h_2}{\mu_2})$$

Pour trouver la valeur de la constante D, il suffit maintenant d'appliquer la condition au bord 23,

$$-\frac{\rho_1 g}{\mu_1}\cos\theta h_1\frac{h_1^2}{2} + (h_1(\frac{\rho_1}{\mu_1} - \frac{\rho_2}{\mu_2}) + \frac{\rho_2 h_2}{\mu_2})g\cos\theta h_1 = -\frac{\rho_2 g}{\mu_2}\cos\theta\frac{h_1}{2}(h_1 - 2h_2) + D$$

On trouve alors assez aisément que le terme constant D est donné par,

$$D = g\cos\theta\frac{h_1^2}{2}(\frac{\rho_1}{\mu_1} - \frac{\rho_2}{\mu_2})$$

Les profiles de vitesse obtenus pour les deux fluides sont donc,

$$\begin{aligned}
u_1(y) &= -\frac{\rho_1 g}{\mu_1}\cos\theta\frac{y^2}{2} + (g\cos\theta(\frac{\rho_1 h_1}{\mu_1} - \frac{\rho_2 h_1}{\mu_2} + \frac{\rho_2 h_2}{\mu_2}))y \\
v_1(y) &= 0 \\
u_2(y) &= -\frac{\rho_2 g}{\mu_2}\cos\theta\frac{y^2}{2} + \frac{\rho_2 g}{\mu_2}\cos\theta h_2 y + g\cos\theta\frac{h_1^2}{2}(\frac{\rho_1}{\mu_1} - \frac{\rho_2}{\mu_2}) \\
v_2(y) &= 0
\end{aligned}$$

Exercice 18) Solution :
1. En partant de l'équation de transfert de chaleur stationnaire

$$\underbrace{\rho c(\underline{v}.\underline{\nabla})T}_{\substack{=0\\(1)}} = \underbrace{2\mu(\underline{\underline{d}}:\underline{\underline{d}})}_{\substack{=0\\(2)}} + \underbrace{r}_{\substack{=0\\(3)}} + \underline{\nabla}.(k\underline{\nabla}T)$$

(1) car il n'y a pas d'écoulement
(2) car il n'y a pas de contrainte
(3) car il n'y a pas de flux de chaleur transmis par rayonnement

on a que

$$\underline{\nabla}.k(\underline{\nabla}T) = 0$$

soit

$$k(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}_{\substack{=0\\(a)}} + \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}_{\substack{=0\\(b)}}) = 0$$

(a) car $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ est de l'Ordre de grandeur de $(\frac{T}{L^2})$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ est de l'Ordre de grandeur de $(\frac{T}{h^2})$ et $L << h$.
Dès lors, le terme $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ domine et on peut donc négliger le terme $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$.

(b) idem, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ est de l'Ordre de grandeur de $(\frac{T}{L^2})$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ est de l'Ordre de grandeur de $(\frac{T}{l^2})$ et $L << l$.
Dès lors, le terme $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ domine et on peut donc négliger le terme $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$.

D'où on tire en intégrant que la solution doit être du type

$$T = Ax + B.$$

Or on connaît la valeur de la températeur aux plaques,
on a ainsi les conditions aux limites :

$$T(0) = T_0$$
$$T(L) = T_L$$

donc

$$B = T_0$$
$$AL + T_0 = T_L \Longrightarrow A = \frac{T_L - T_0}{L}$$

et enfin

$$T = (\frac{T_L - T_0}{L})x + T_0$$

On sait que $\underline{q} = -k\underline{\nabla} T$

$\Longrightarrow q_x = -k\dfrac{\partial T}{\partial x} = -k\dfrac{T_L - T_0}{L}$

2. Si $T_0 < T_L$:

Si $T_0 > T_L$:

19.
a. La fin de l'exercice 18 nous donne une relation caractérisant q:

$$q = -k\frac{T_L - T_0}{L}$$

De cela, nous déduisons:

$$\begin{cases} \frac{L_1 q}{k_1} & = & -T_1 + T_0 \\ \frac{L_2 q}{k_2} & = & -T_2 + T_1 \\ & \vdots & \\ \frac{L_i q}{k_i} & = & -T_i + T_{i-1} \\ & \vdots & \end{cases}$$

Et donc

$$\sum_i q\frac{L_i}{k_i} = -T_L + T_0$$

Or, les équations de l'énoncé nous donne une expression de T_0 et T_L en fonction de q (en n'oubliant pas de rajouter un - pour la cohérence physique). On obtient alors:

$$\left(\sum_i \frac{L_i}{k_i} + \frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_L}\right) q = T_{\infty 0} - T_{\infty L}$$

Soit

$$q = \frac{T_{\infty 0} - T_{\infty L}}{\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_L} + \sum_i \frac{L_i}{k_i}}$$

b. On va résoudre le problème de manière récurrente. On peut en effet, avec la première équation de l'énoncé,trouver une expression de T_0 en fonction de q qui est maintenant connu (il suffit d'isoler T_0). En utilisant la relation trouvée à la fin du problème 18 on obtiendra le T suivant et ainsi de suite jusque T_L. On a donc:

$$T_i = -\frac{q}{k_i}L_i + T_{i-1}$$

Avec $T_0 = -\frac{q}{h_0} + T_{\infty 0}$ on trouve T_1, puis avec T_1 on trouve T_2, etc.

0.1 exercice 20

Nous avons ici un écoulement de Poiseuille. Nous allons utiliser l'équation suivante:

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} \tag{25}$$

Pour trouver l'expression du profil de vitesse nous allons intégrer l'équation 25. Nous avons :

$$\int \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} dy = \int \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + A = \frac{\delta u}{\delta y}$$

En intégrant cette dernière expression, on obtient:

$$\frac{y^2}{2} \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} + A \times y + B = u(y)$$

Pour trouver les constantes d'intégration, on utilise les conditions au bord, à savoir que $u(h) = 0$ et $u(0) = 0$. On voit que la deuxième condition nous donne directement que $B = 0$ et donc :

$$\frac{h^{\cancel{2}}}{2\mu} \frac{dp}{dx} + A \times \cancel{h} = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{-h}{2\mu} \frac{dp}{dx}$$

On a maintenant que: $u(y) = \frac{y^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} - \frac{h}{2\mu} \frac{dp}{dx} y = \frac{dp}{2\mu dx}(y^2 - h \times y)$

Relation liant la vitesse de débit au gradient de pression:

$$Q = \int_0^h u \; dy$$

$$Q = \int_0^h \frac{dp}{2\mu dx}(y^2 - h \times y) \; dy = \frac{dp}{2\mu dx} \left(\left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h - \left[\frac{h \times y^2}{2} \right]_0^h \right)$$

$$Q = -\frac{1}{12} \frac{dp}{dx} \frac{h^3}{\mu}$$

Et comme $\bar{u} = \frac{Q}{h}$, on a que

$$\bar{u} = -\frac{1}{12} \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{\mu}. \tag{26}$$

3. $p(x) - p_0 = (p_i - p_0) + \frac{x}{L}(p_0 - p_i)$
4. Il nous faut calculer l'intégrale de la pression sur la surface pour obtenir la force appliquée:

$$\int_0^2 \int_0^{0,1} (p(x) - p_0) \; dx \; dz = force$$

$$\int_0^2 \int_0^{0,1} \left((p_i - p_0) + \frac{x}{L}(p_0 - p_i) \right) \; dx \; dz = \int_0^2 \left(0,1 \times (p_i - p_0) + \frac{0,01}{2 \; L}(p_0 - p_i) \right)$$

$$\int_0^2 \left((p_i - p_0) \; 0,1 + \frac{0,1}{2}(p_0 - p_i) \right) \; dz = 0,1 \, (p_i - p_0)$$

La charge totale supportée sera égale à 4 fois cette intégrale, car il ne faut pas oublier qu'il y a quatre patins. Si nous posons dessus 25 tonnes, nous aurons:
$25000 \times 9,81 = 4 \times 0,1\ (p_i - p_0) \Rightarrow p_i - p_0 = 6,1312\ 10^{15} N/m^2$
5. Nous avons par l'énoncé que :

$$\frac{(p_i - p_0)}{\rho} = \alpha - \beta Q^2 \tag{27}$$

En isolant Q on obtient que $Q^2 = -\frac{\Delta p}{\rho\ \beta} + \alpha$, nous avons toutes les données, à savoir:

- $\alpha = 10^3 m^2/s^2$
- $\beta = 10^9 m^{-4}$
- $\rho = 900 kg/m^3$
- $L = 0,1m$

On obtient que $Q = 5,64\ 10^{-4} m^3/s$. On peut en déduire la puissance utile fournie par la pompe vu que $puissance = \Delta p\ Q$. On trouve : $puissance = 346,16W$. La hauteur se déduit de l'équation 26. On remplace ū par $\frac{Q}{h}$, on en tire alors que:

$$h^3 = \frac{-12\ Q\ \mu}{\frac{dp}{dx}} \approx 38\ 10^-4m$$

Pour obtenir cette valeur, il ne faut pas oublier que Q n'est pas le même ici, il faut le diviser par 4, pour avoir la hauteur pour chaque patin. De plus $\frac{dp}{dx} = \frac{p_0 - p_i}{L}$.
6. Le gradient de pression qui dépend directement de la charge utile va diminuer. Q par contre va augmenter, mais proportionnellement à la racine carrée de la diminution du gradient de pression. Nous aurons donc une diminution de la puissance nécessaire à la pompe. h va augmenter également vu que son numérateur (Q) augmente et que donc dénominateur $\left(\frac{dp}{dx}\right)$) diminue.

Solution

1. Pour montrer que le champs de vitesse vérifie l'équation de la diffusion, partons de la loi de conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\underline{v}}{Dt} &= -\underline{\nabla} p + \underline{\nabla}.(2\mu \underline{\underline{d}}) + \rho \underline{g} \\ \Leftrightarrow \rho(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v}.\underline{\nabla})\underline{v}) &= -\underline{\nabla} p + \mu \nabla^2 \underline{v} + \rho \underline{g} \end{aligned}$$

En ne regardant que la composante x, qui nous intéresse ici :

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$$

Par hypothèse, nous pouvons grandement simplifier cette équation. On a en effet :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0 \\ v &= 0 \end{aligned}$$

Dès lors il nous reste :

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial u}{\partial t} &= \mu\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} &= \nu\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \end{aligned}$$

Où on a utilisé la définition de la viscosité cinématique : $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

---

2. Nous allons tout d'abord déterminer la variable de similitude $\eta(y,t)$. En analysant les dimensions de l'équation ci-dessus, on voit qu'il faut définir :

$$\eta(y,t) = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$$

Le facteur 2 a été introduit pour faciliter les calculs ultérieurs. Nous faisons à présent l'hypothèse que u s'exprime comme $u = Uf(\eta)$. Il nous reste donc à détermine la fonction $f(\eta)$ en injectant u dans l'équation obtenue au point 1. Le calcul des dérivées donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{-Uf'\eta}{2t} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{Uf'}{2\sqrt{\nu t}} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = \frac{Uf''}{4\nu t} \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} -\frac{Uf'\eta}{2t} &= \nu\frac{Uf''}{4\nu t} \\ \Leftrightarrow 2\eta f' + f'' &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui est bien une EDO.

---

3. Pour résoudre cette équation différentielle ordinaire, nous poson $g = f'$. Dès lors cette équation devient :

$$\begin{aligned} 2\eta g + g' &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dg}{d\eta} &= -2g\eta \\ \Leftrightarrow \frac{dg}{g} &= -2\eta d\eta \\ \Rightarrow g &= Ce^{-\eta^2} \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{df}{d\eta} = Ce^{-\eta^2} \Rightarrow f = C\int_0^{\eta} e^{-x^2}dx + D$$

Il nous faut donc à présent exprimer les conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration C et D.

$$\begin{aligned} y = 0 \Leftrightarrow \eta &= 0 \Rightarrow U = u = Uf(\eta) = Uf(0) \Rightarrow f(0) = 1 \\ u(t=0) &= 0 \Leftrightarrow \lim_{\eta\to\infty} f(\eta) = 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne donc :

$$\begin{aligned} f(0) = 1 \Rightarrow D = 1 & \\ \lim_{\eta\to\infty} f(\eta) = C\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow C\frac{\sqrt{\pi}}{2} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow C &= \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

L'expression analytique du champ de vitesse est donc :

$$u(\eta, t) = Uf(\eta) = U\left(\frac{-2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta} e^{-x^2}dx + 1\right)$$

Ou encore

$$u(y, t) = U\left(\frac{-2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-x^2}dx + 1\right)$$

La plaque oscille avec une vitesse $U\cos(\omega t)$.

$$[\omega] = T^{-1} \text{ et } [\nu] = \frac{L^2}{T}$$

La variable de similitude (adimensionnelle) est donc:

$$\eta(y) = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}}$$

$$\begin{aligned} u(y,t) &= U\cos(\omega t) f(\eta) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\omega U \sin(\omega t) f(\eta) + U\cos(\omega t) f'(\eta)\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t}}_{=0} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= U\cos(\omega t) f''(\eta)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + U\cos(\omega t) f'(\eta)\underbrace{\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}}_{=0} \\ &= U\cos(\omega t) f''(\eta)\frac{\omega}{\nu} \end{aligned} \tag{28}$$

Le champ de vitesse satisfait l'équation classique de la diffusion:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Dès lors:

$$\begin{aligned} -\omega U \sin(\omega t) f &= \nu U \cos(\omega t) f'' \frac{\omega}{\nu} \\ \Rightarrow -\sin(\omega t) f &= \cos(\omega t) f'' \end{aligned}$$

On utilise la formule d'Euler : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. En ne gardant que la partie réelle des équations:

$$\begin{aligned} ie^{i\omega t} f &= e^{i\omega t} f'' \\ \Rightarrow if &= f'' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f = ce^{\lambda\eta} \text{ avec } \lambda^2 = i$$

$\lambda = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

$$\lambda^2 = a^2 - b^2 + 2abi = i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 &= 0 \\ ab &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ \text{ou } \lambda &= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{aligned}$$

La condition au bord $\lim_{\eta\to\infty} f(\eta) = 0$ nous indique qu'il faut rejeter la première solution.

$$\Rightarrow f(\eta) = c \exp\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\eta\right)$$

Deuxième condition au bord: $f(0) = 1 \Rightarrow c = 1$

$$\begin{aligned}
(28) \Rightarrow u(\eta, t) &= U\mathcal{R}e\left\{e^{i\omega t} f(\eta)\right\} \\
&= U\mathcal{R}e\left\{e^{i\omega t}\exp\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\eta\right)\right\} \\
&= U\mathcal{R}e\left\{(\cos\omega t + i\sin\omega t)\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\eta\right)\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\eta\right) - i\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\eta\right)\right)\right\} \\
&= U\left(\cos(\omega t)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\eta\right) + \sin(\omega t)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\eta\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\eta\right) \\
&= U\cos\left(\omega t - \frac{1}{\sqrt{2}}\eta\right)\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\eta\right)
\end{aligned}$$

En remplaçant η par sa définition:

$$\boxed{u(y,t) = U\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\right)}$$

0.2 Exo 23

0.2.1

On a

$$\delta^* = \int_0^\infty (1 - \frac{u}{u_e})dy$$

Où u_e est la vitesse adimensionnée de l'écoulement extérieur,

$$u_e(x) = (Ux)/L$$

Physiquement, cela représente un épaisseur caractéristique où l'écoulement n'est pas linéaire

0.2.2

On peut écrire

$$\delta^* = \int_0^\delta (1 - \frac{u}{u_e})dy$$

car au dela de δ, $u \simeq u_e$ et donc $1 - \frac{u}{u_e} \simeq 0$

0.2.3

Montrons que $a = \frac{\delta^*(x)}{\delta(x)}$ est une constante

On sait que

$$\delta^* = \int_0^\delta (1 - \frac{u}{u_e})dy$$

donc si on fait le changement de variable $\eta = \frac{dy}{\delta(x)}$, alors

$$\delta^* = \int_0^\delta (1 - \frac{u}{u_e})\delta(x)d\eta$$

Or,

$$\frac{u}{u_e} = sin(\frac{\pi}{2}\eta(x,y))$$

D'où

$$\frac{\delta^*}{\delta(x)} = \int_0^\delta (1 - sin(\frac{\pi}{2}\eta(x,y))d\eta = \frac{\pi - 2}{\pi}$$

On a donc

$$a = \frac{\delta^*(x)}{\delta(x)} = \frac{\pi - 2}{\pi}$$

Montrons que $b = \frac{\theta(x)}{\delta(x)}$ est une constante

Pour rappel,

$$\theta(x) \simeq \int_0^\delta \frac{u}{u_e}(1 - \frac{u}{u_e})dy$$

En prenant à nouveau le meme changement de variable $\eta = \frac{dy}{\delta(x)}$, et comme

$$\frac{u}{u_e} = sin(\frac{\pi}{2}\eta(x,y))$$

On a

$$\frac{\theta(x)}{\delta(x)} = \int_0^\delta sin(\frac{\pi}{2}\eta)(1 - sin(\frac{\pi}{2}\eta)d\eta = \frac{4-\pi}{2\pi}$$

Montrons que $c = \frac{\delta(x)\tau_w(x)}{u_e(x)}$ est une constante

Pour rappel,

$$\tau_w(x) = \mu\frac{\delta\mu}{\delta y}$$

$$u_e(x) = Ux/L$$

D'où on a directement que

$$c = \mu\frac{\pi}{2}$$

0.2.4

Il n'y a pas de solutions exactes. On utilisera donc

$$u\frac{\delta u}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta x} = -\frac{dp}{\rho dx} + \sigma\frac{\delta^2\mu}{\delta u^2}$$

que l'on intégrera de 0 à $/delta$

Ce qui nous permettra d'obtenir

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{u_e}\frac{du_e}{dx}(2\theta + \delta^*) = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2}$$

0.2.5

A partir de l'équation précédente et en utilisant les valeurs de a,b, c et l'expression de $u_e(x)$ on arrive directement à

$$x\frac{d\theta^2}{dx^2} + \frac{8}{4-\pi}\theta^2 = \sigma\frac{L(4-\pi)}{2U}$$