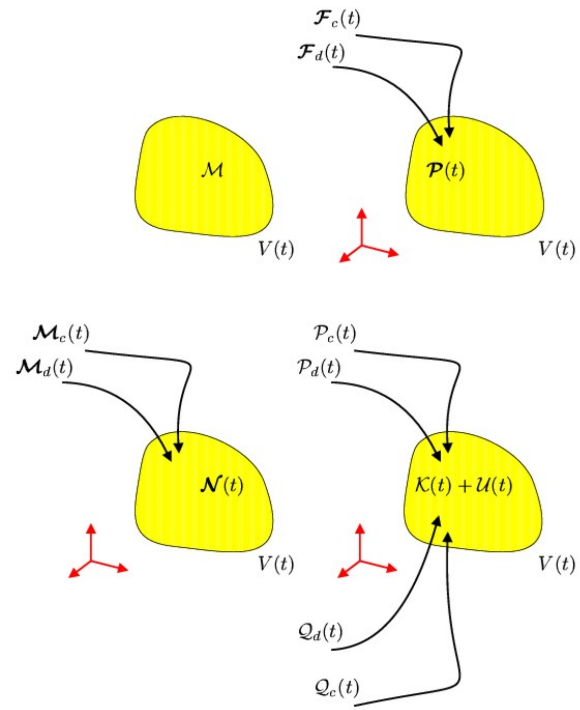
Lois de conservation, lois de comportement, conditions aux limites.

Lois de conservation | Lois de comportement

Conditions aux limites

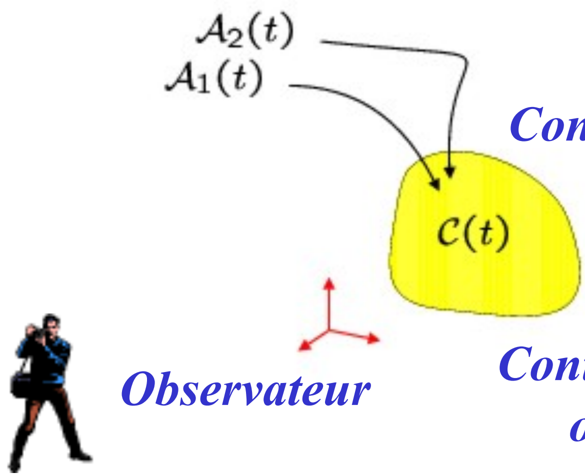


Consevation de la masse,
de la quantité de mouvement,
du moment de la quantité de mouvement
et de l'énergie.

Lois de conservation

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt}(t) = \mathcal{A}_1(t) + \mathcal{A}_2(t) + \ldots$$

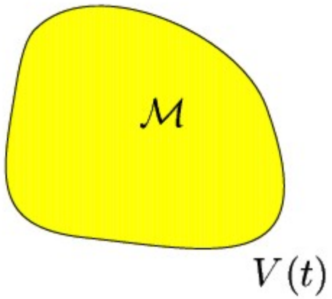
Apports extérieurs



Contenu : masse, quantité de mvt, énergie…

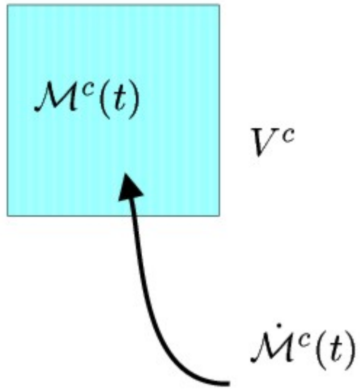
Contenant : volume matériel ou volume de controle

Formes globales de la conservation de la masse



$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = 0, \qquad \forall \; V(t),$$

Volume matériel
Ensemble de points matériels en mouvement se déplaçant à une vitesse macroscopique v(**x**,t)



$$\frac{d\mathcal{M}^c}{dt}(t) = \dot{\mathcal{M}}^c(t), \qquad \forall \; V^c,$$

Volume de controle
Ensemble de points eulériens

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_i(x_j, t)\mathbf{e}_i$$

Conservation de la masse

$$\mathcal{M} = \int_{V(t)} \rho \, dV$$

Forme globale

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = 0, \qquad \forall \; V(t),$$

satisfaite pour une certaine classe de systèmes, à tout instant

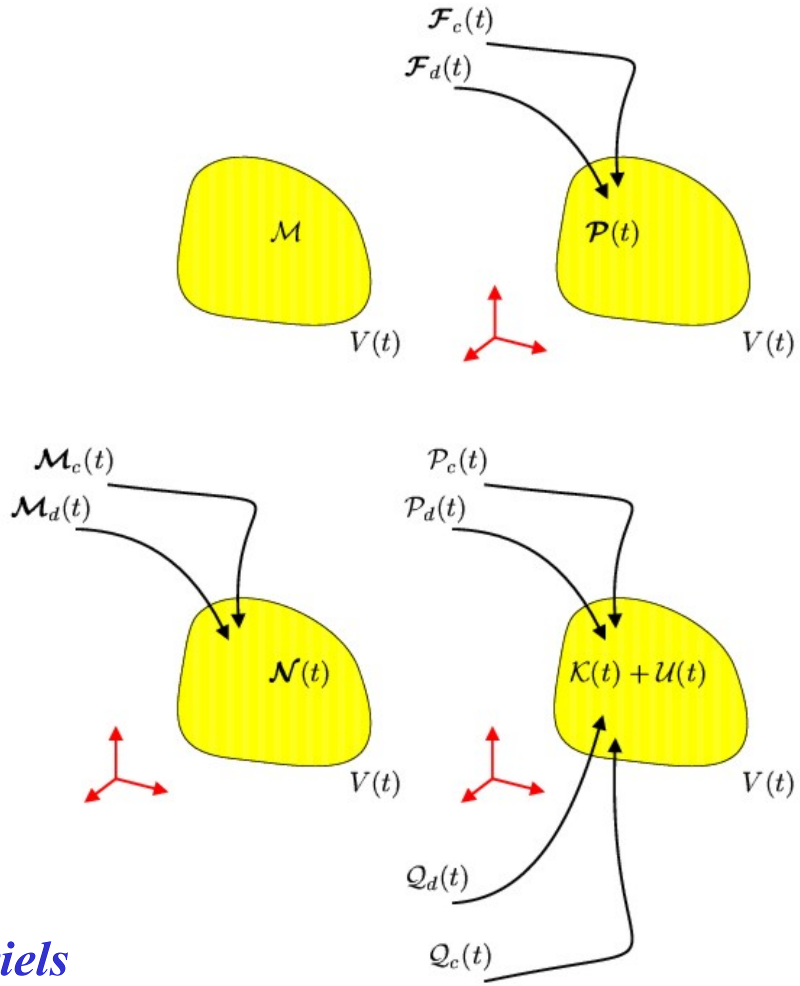
sous certaines conditions de continuité..

Forme locale

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0,$$

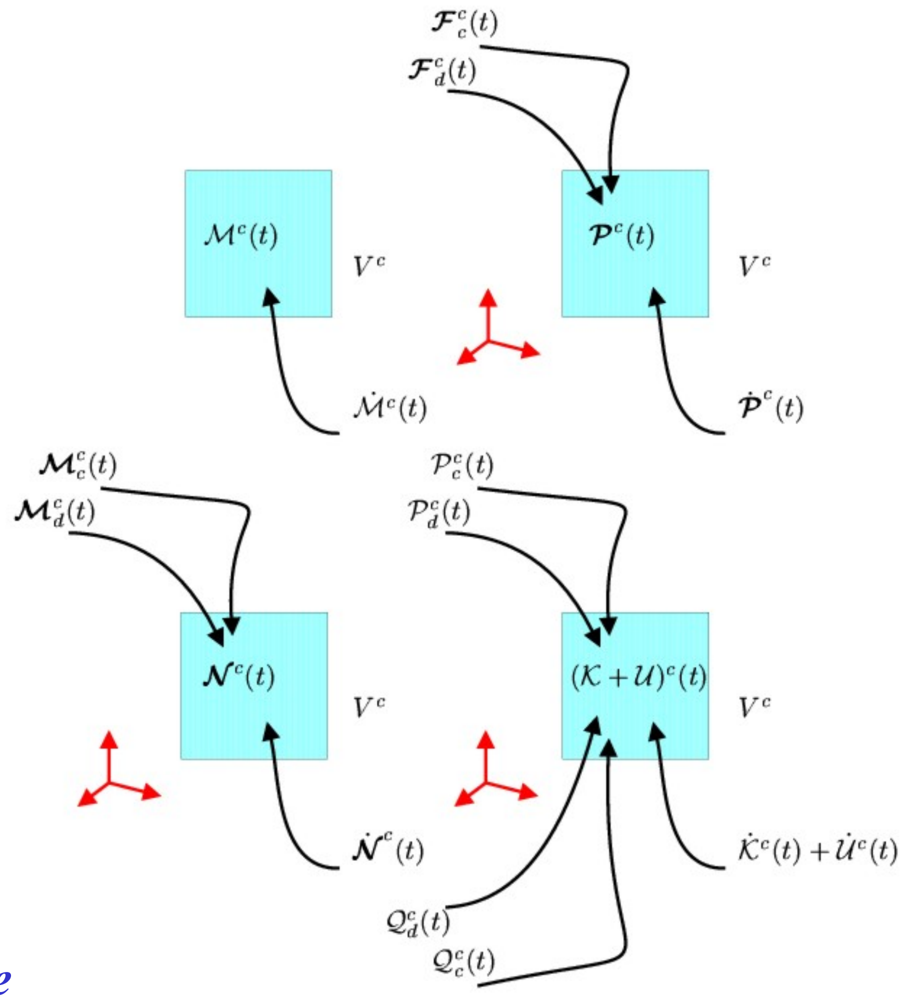
satisfaite en tout point et à tout instant

Toutes les lois de conservation, en un clin d'oeil…



Forme globale
pour des volumes matériels

Sous un autre angle,
ces lois de conservation…



Forme globale
pour des volumes de controle

…dont on peut déduire des formes locales

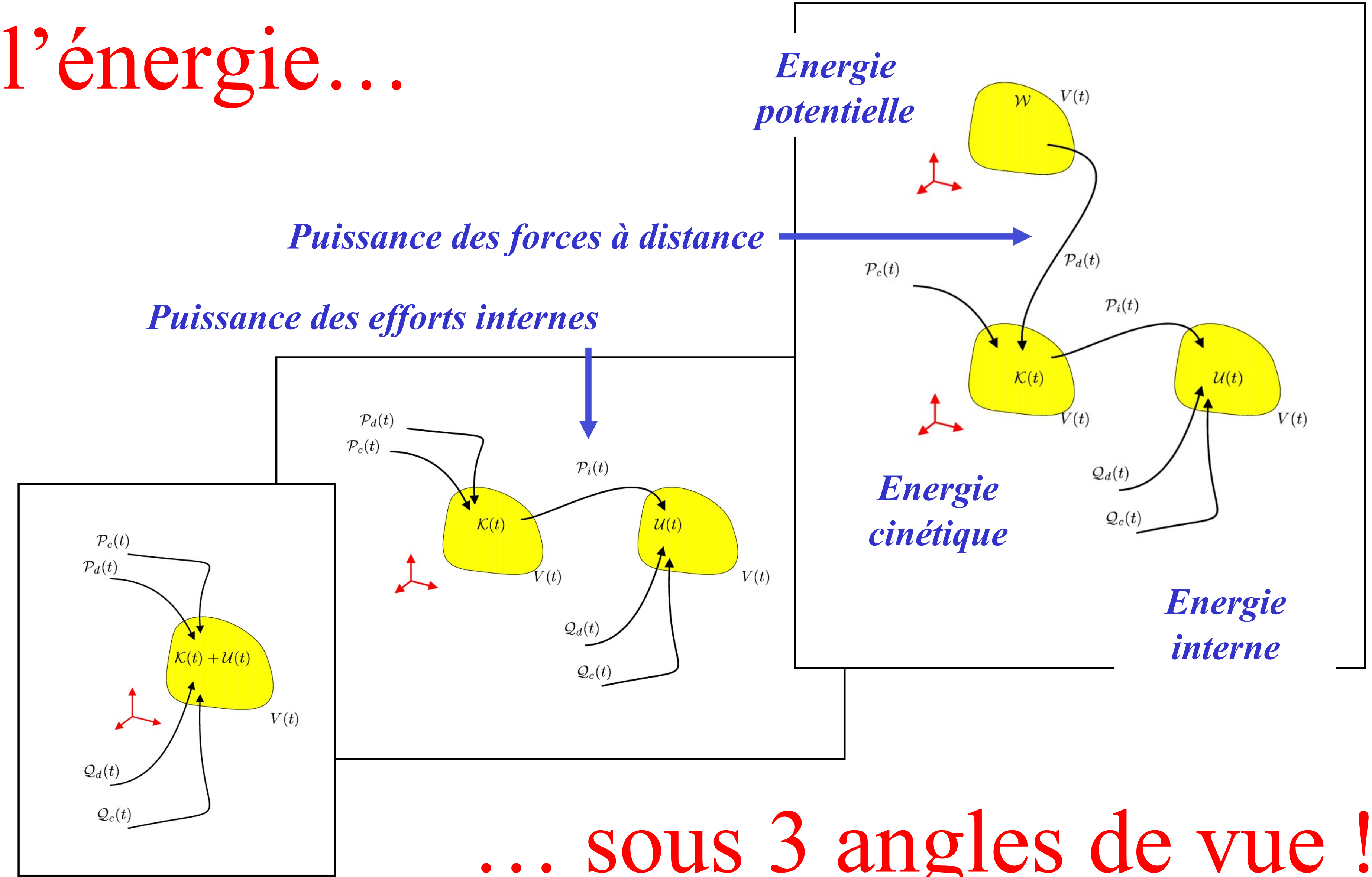
$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}(\mathbf{n}) &= \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n} \\
\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T \\
q(\mathbf{n}) &= -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\frac{D\rho}{Dt} + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0, \\
\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \\
\rho \frac{DU}{Dt} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q}
\end{aligned}
$$

Forme locale
dite non-conservative

$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}(\mathbf{n}) &= \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n} \\
\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T \\
q(\mathbf{n}) &= -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\
\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \\
\frac{\partial (\rho U)}{\partial T} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v} U) &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q}
\end{aligned}
$$

Forme locale
dite conservative

Conservation de l’énergie…



… sous 3 angles de vue !

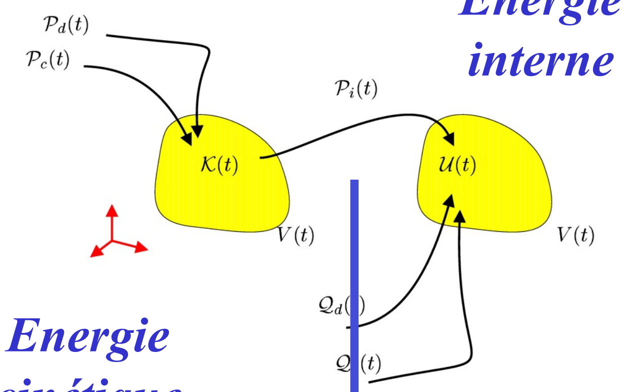
Puissance des efforts internes

Forme locale non-conservative de la conservation de l'énergie interne

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q}$$

Formes globales

Energie interne



Energie cinétique

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$$

Forme locale non-conservative de la conservation de l'énergie cinétique

Puissance des efforts internes

$$\mathcal{P}_i(t) = \int_{V(t)} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \, dV$$

Trois nouveaux acteurs dans notre modèle !

Pression

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau}$$

Tenseur des extra-contraintes

$$U = -\frac{p}{\rho} + H$$

Enthalpie

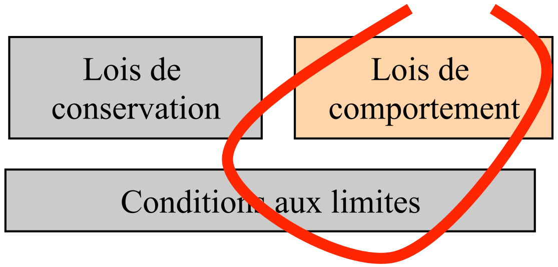
Un peu d'algèbre

$$H = U + \frac{p}{\rho}$$

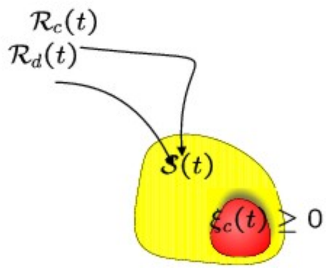
$$\begin{aligned}
\rho\frac{DH}{Dt} &= \rho\left(\frac{DU}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}\right) \\
&= \rho\frac{DU}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho\frac{DH}{Dt} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}, \\
&= -p\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}, \\
&= \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho}\underbrace{\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{v}\right)}_{=0}.
\end{aligned}$$

Lois de conservation, lois de comportement, conditions aux limites.

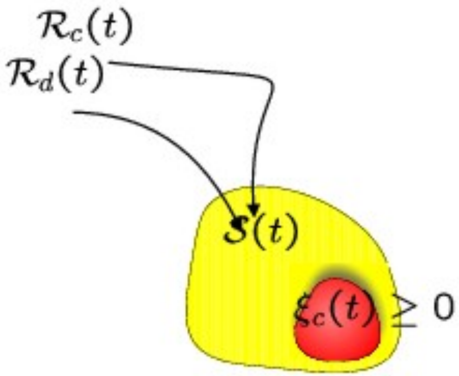


Second principe de la thermodynamique,
Modèle du fluide visqueux newtonien



Les équations de comportement ne peuvent pas être écrites n'importe comment !
Il faut respecter certaines règles !
En particulier, il faut les écrire afin que le second principe de la thermodynamique soit toujours satisfait.

Second principe de la thermodynamique



$$\boxed{\rho \frac{DS}{Dt} \geq \frac{r}{T} - \frac{1}{T}\nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\mathbf{q}}{T^2} \cdot \nabla T,}$$

Inégalité de Clausius-Duhem : $\rho T \dfrac{DS}{Dt} - \rho \dfrac{DU}{Dt} \geq -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \dfrac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T$

Quelques jolis tenseurs pour construire notre modèle…

$$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}^T)\right)}_{\mathbf{d}} + \left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} - \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}^T)\right)$$

Tenseur des taux de déformation

$$\mathbf{d} = \underbrace{(\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d})\frac{\boldsymbol{\delta}}{3}}_{\mathbf{d}^s} + \underbrace{(\mathbf{d} - (\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d})\frac{\boldsymbol{\delta}}{3})}_{\mathbf{d}^d}$$

Partie sphérique du tenseur des taux de déformation

Partie déviatoire du tenseur des taux de déformation

Viscosité de volume

Viscosité de cisaillement

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= -p\boldsymbol{\delta} + 3\boxed{\hat{\kappa}(p,T)}\mathbf{d}^s + 2\boxed{\hat{\mu}(p,T)}\mathbf{d}^d, \\
\mathbf{q} &= -\boxed{\hat{k}(p,T)}\boldsymbol{\nabla} T, \\
\rho &= \hat{\rho}(p,T), \\
H &= \hat{H}(p,T), \\
\boxed{S} &\boxed{= \hat{S}(p,T).}
\end{aligned}$$

Conductibilité thermique

$$T dS = dH - \frac{dp}{\rho} = dU - \frac{p d\rho}{\rho^2},$$

$$\begin{aligned}
k &\geq 0, \\
\kappa &\geq 0, \\
\mu &\geq 0.
\end{aligned}$$

Contraintes à respecter pour satisfaire Clausius-Duhem

L'équation de comportement pour l'entropie n'est utile que pour vérifier que le second principe est bien satisfait !

Modèle du fluide visqueux newtonien

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= -p\boldsymbol{\delta} + 3\widehat{\kappa}(p,T)\mathbf{d}^s + 2\widehat{\mu}(p,T)\mathbf{d}^d, \\
\mathbf{q} &= -\widehat{k}(p,T)\boldsymbol{\nabla}T, \\
\rho &= \widehat{\rho}(p,T), \\
H &= \widehat{H}(p,T), \\
S &= \widehat{S}(p,T).
\end{aligned}
$$

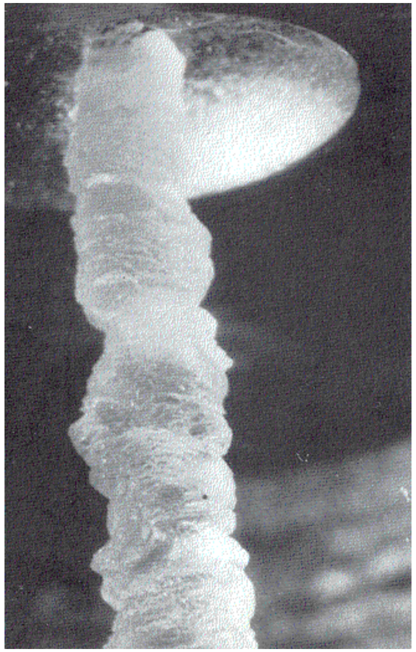
Le compte est bon !

conservation locale de la masse	ρ	1
conservation locale de la quantité de mouvement	$\mathbf{v}$	3
conservation locale de l'énergie	T	1
constitution pour les contraintes	$\boldsymbol{\sigma}$	6
constitution pour le flux calorifique	$\mathbf{q}$	3
constitution pour la masse volumique	p	1
constitution pour l'enthalpie	H	1
constitution pour l'entropie	S	1

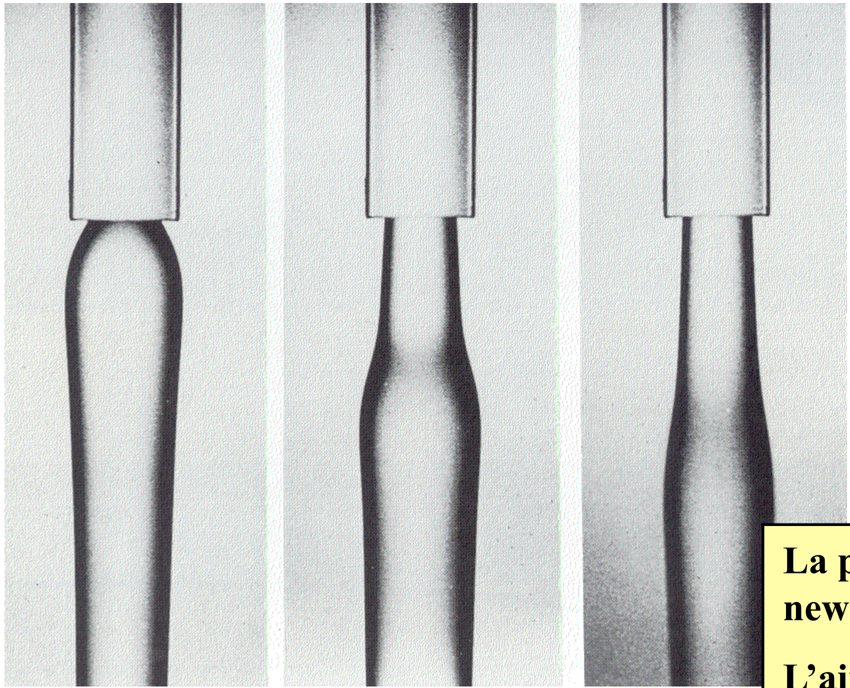
Remarque : si une équation de comportement pour l'enthalpie est donnée… on en déduit automatique l'énergie interne et vice-versa.

$$U = -\frac{p}{\rho} + H$$

De tels gonflement de jets sont imprévisibles avec ce modèle newtonien



(Piau, JNNFM, 90)

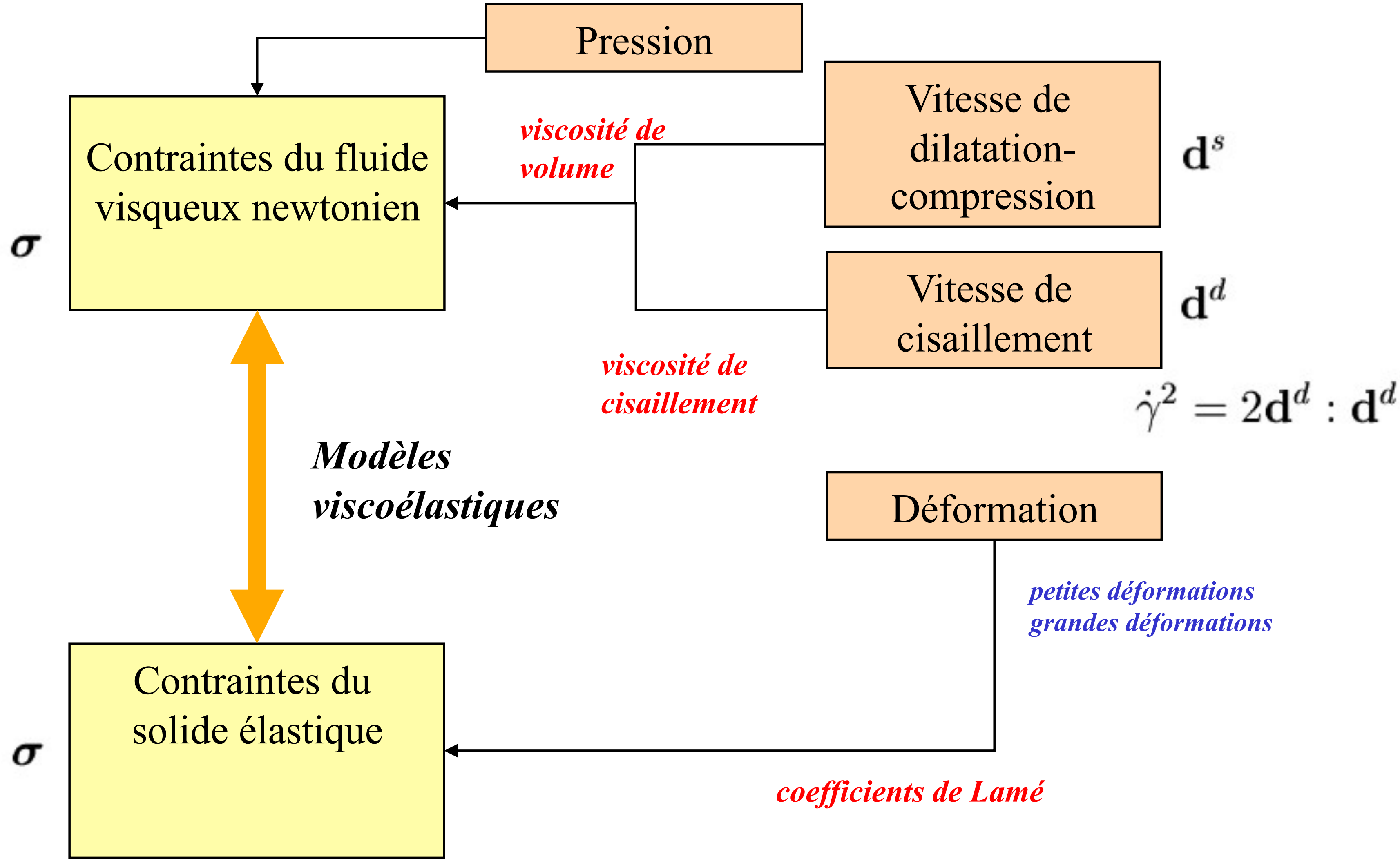


(Giesekus, Rheologica Acta, 68)

La plupart de fluides réels NE SONT PAS des fluides newtoniens…

L'air et l'eau sont toutefois newtoniens et constituent les fluides les plus largement répandus…

Rhéologie : la science du monde magique des équations de comportement…



Simplifications usuelles…

Ecoulement incompressible

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Hypothèses irréalistes

Ecoulement incompressible et irrotationnel

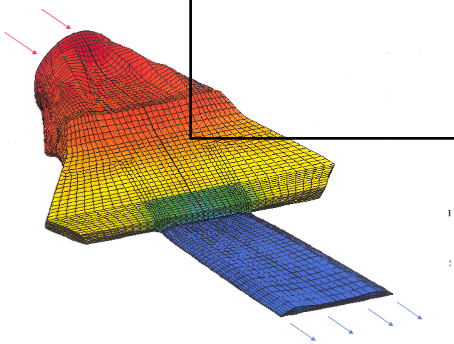
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{v} = 0,$$

Transformations adiabatiques

$$q = r = 0$$

Fluide incompressible

$$\rho = cst$$



Hypothèses réalistes

Fluide parfait

$$\mu = \kappa = 0$$

Donc, simplifions…

$$\boldsymbol{\sigma}(p, \mathbf{v}) = -p\boldsymbol{\delta} + \mu(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}^T)$$

$$\mathbf{q}(T) = -k\boldsymbol{\nabla}T$$

$$U(T) = cT$$

Fluide newtonien à paramètres matériels constants

Ecoulement incompressible

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Dans un écoulement incompressible, il n'y a pas de raison de distinguer chaleur spécifique à volume ou à pression constante.
On écrit simplement le symbole c !

Les équations de continuité et de quantité de mouvement ne font pas intervenir la température : on peut résoudre la dynamique de l'écoulement sans tenir compte des aspects thermiques !

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\boldsymbol{\nabla}p + \mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{v} + \rho\mathbf{g},$$

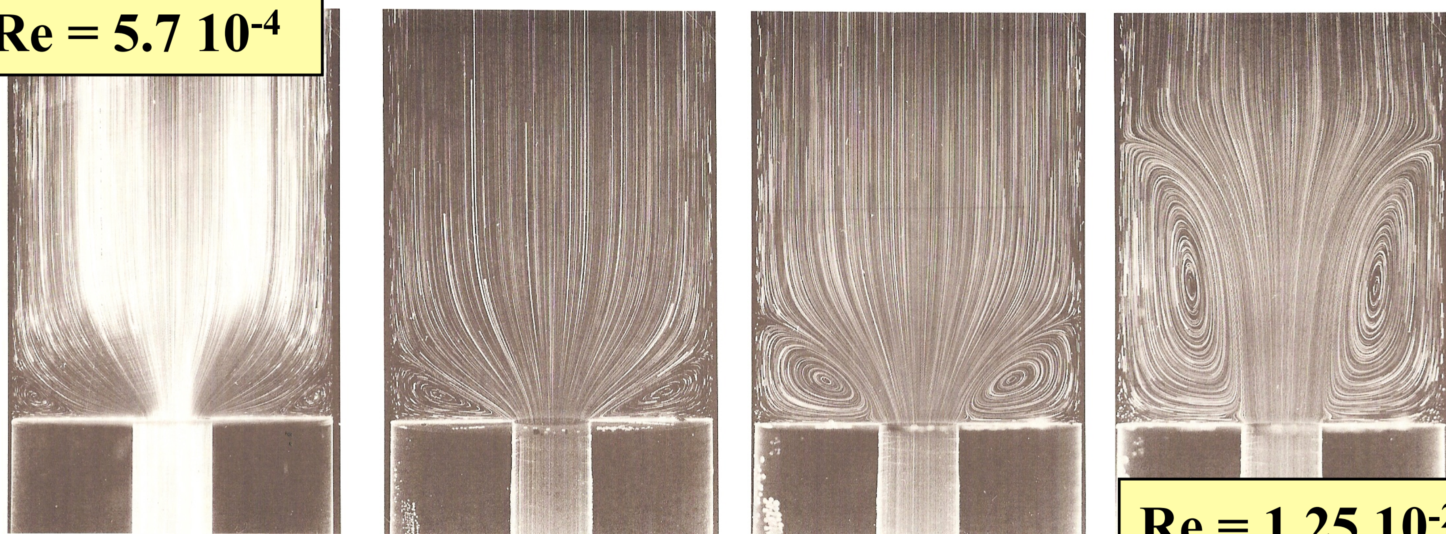
$$\rho c\frac{DT}{Dt} = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k\boldsymbol{\nabla}^2T,$$

Ecoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants.

Ecoulements incompressibles stationnaires

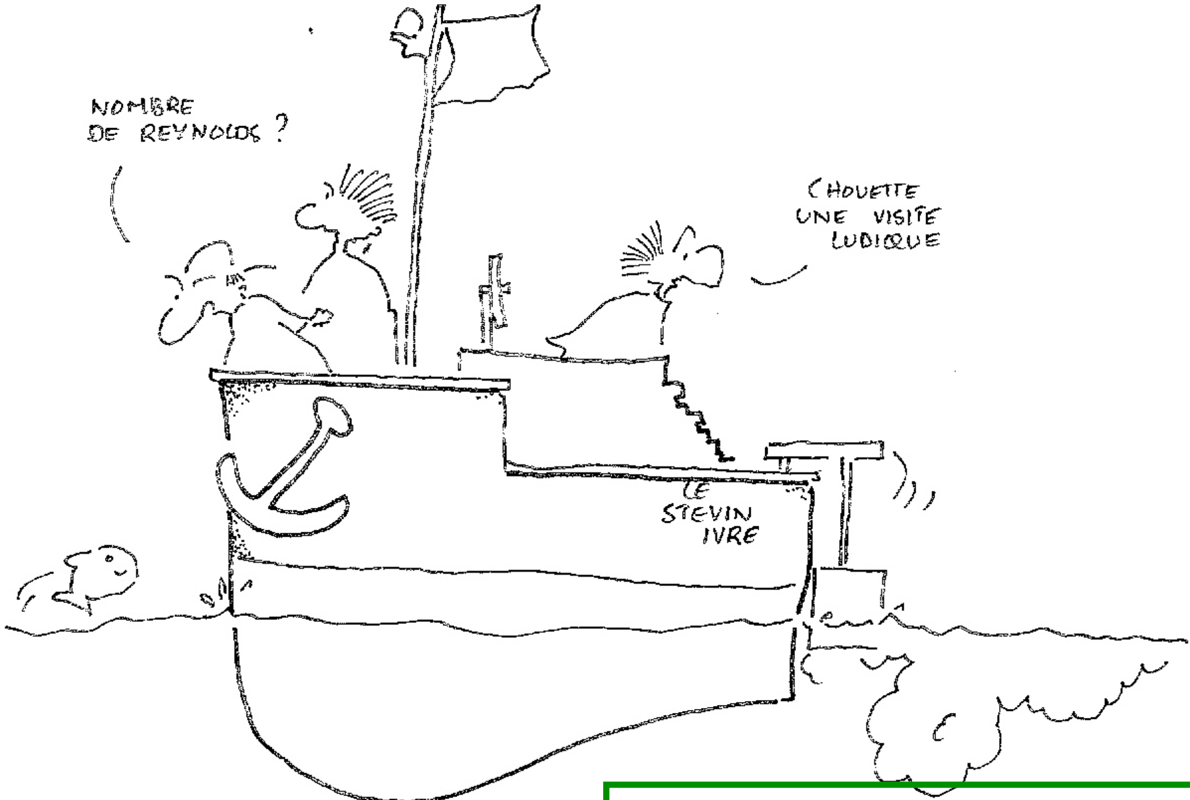
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \rho(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} &= -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{v} \end{aligned}$$

Ecoulement incompressible stationnaire d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans forces de volume.



(Boger, Hur, Binnington, JNFM 1986)

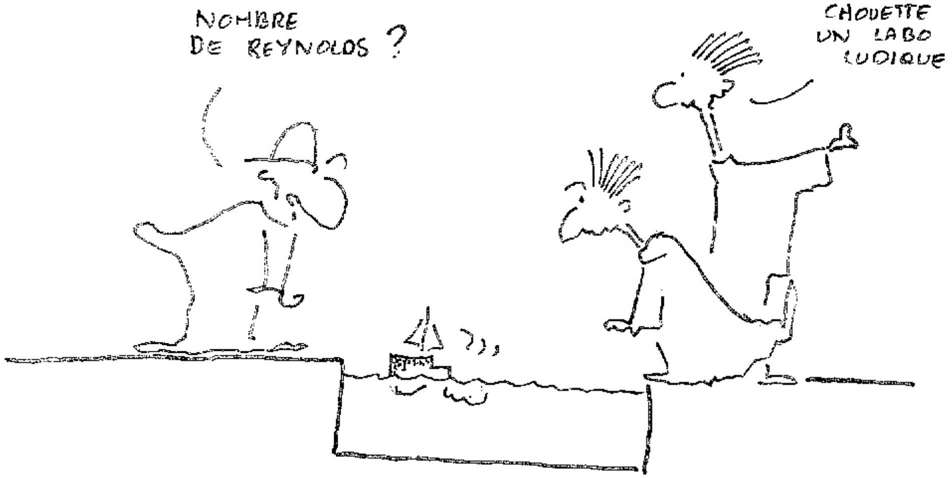
Adimensionaliser : pourquoi ?



$$\begin{aligned} U &= 0.1\ m/s \\ L &= 10\ m \\ \rho &= 10^3\ kg/m^3 \\ \mu &= 10^{-3}\ kg/ms \end{aligned}$$

$$\boxed{Re = \frac{\rho U L}{\mu} = 10^6}$$

Adimensionaliser : pourquoi ?



$$
\begin{aligned}
U &= 10\ m/s \\
L &= 0.1\ m \\
\rho &= 10^3\ kg/m^3 \\
\mu &= 10^{-3}\ kg/ms
\end{aligned}
$$

$$\boxed{Re = \frac{\rho U L}{\mu} = 10^6}$$

Adimensionaliser

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

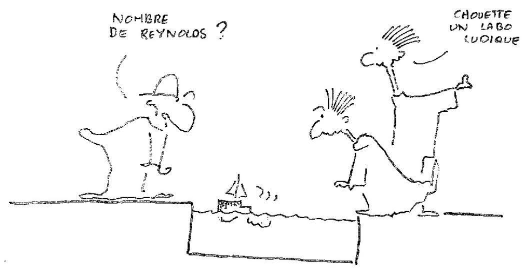
$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \frac{\mathbf{x}}{L}, \\
\mathbf{v}' &= \frac{\mathbf{v}}{U}, \\
p' &= \frac{p - \boxed{p_0}}{\rho U^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla' \cdot \mathbf{v}' &= 0 \\
(\mathbf{v}' \cdot \nabla')\mathbf{v}' &= -\nabla' p' + \frac{1}{Re}(\nabla')^2 \mathbf{v}'
\end{aligned}
$$

Dans un écoulement incompressible, seul un écart de pression peut être caractéristique… Ajouter ou retirer une pression constante ne change rien à l'écoulement !

En variables adimensionnelles,

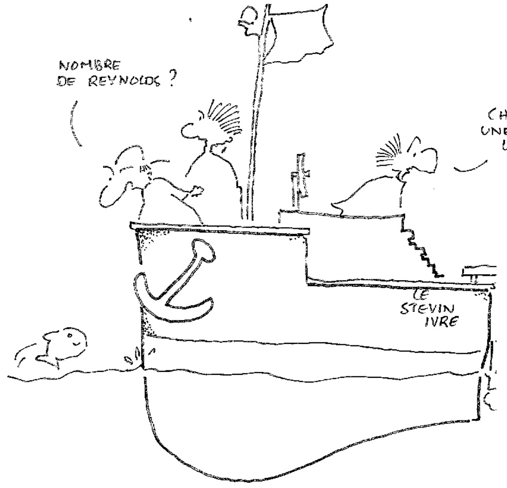
$$
\begin{aligned}
U &= 10 \; m/s \\
L &= 0.1 \; m \\
\rho &= 10^3 \; kg/m^3 \\
\mu &= 10^{-3} \; kg/ms
\end{aligned}
$$



$$\boxed{Re = \frac{\rho U L}{\mu} = 10^6}$$

Ils ont le même nombre de Reynolds :-)

$$\frac{p_{mer}(\mathbf{x}) - p_{mer}(0)}{\rho U_{mer}^2} = p'_{mer}(\mathbf{x}') = p'_{labo}(\mathbf{x}') = \frac{p_{labo}(\mathbf{x}) - p_{labo}(0)}{\rho U_{labo}^2}$$



$$
\begin{aligned}
U &= 0.1 \; m/s \\
L &= 10 \; m \\
\rho &= 10^3 \; kg/m^3 \\
\mu &= 10^{-3} \; kg/ms
\end{aligned}
$$

…ces deux écoulements sont identiques.

C'est quoi physiquement le nombre de Reynolds ?

Effets visqueux
Diffusion de la quantité de mouvement

$$\underbrace{\boxed{\rho(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}}}_{\mathcal{O}(\rho U^2/L)} = -\boldsymbol{\nabla}p + \underbrace{\boxed{\mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{v}}}_{\mathcal{O}(\mu U/L^2)}$$

Effets d'inertie
Transport de la quantité de mouvement

$$Re = \frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

Nombre de Reynolds

caractérise un écoulement d'un fluide !

$$Re = \frac{\rho_0 u_0 L}{\mu}$$

à éventuellement savoir, à titre de *double check*

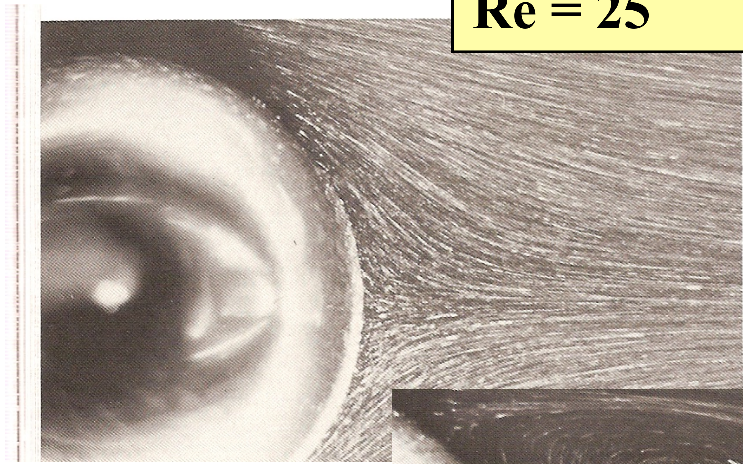
Born: 23 Aug 1842 in Belfast, Ireland

Died: 21 Feb 1912 in Watchet, Somerset, England

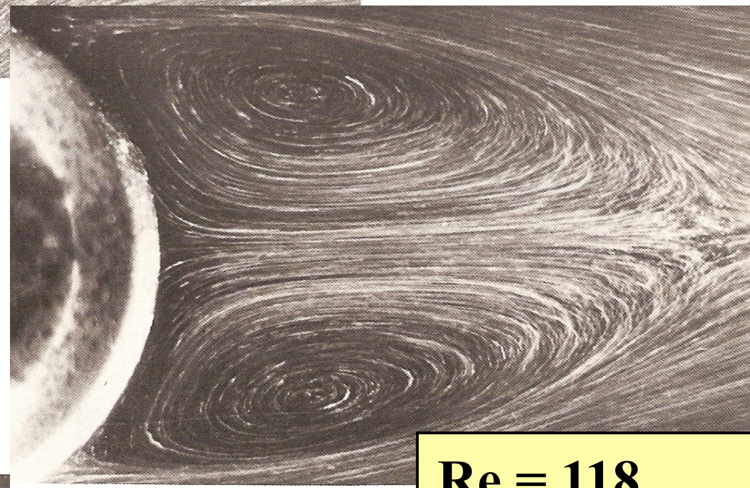
$$\frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces de viscosité}}$$

à savoir !

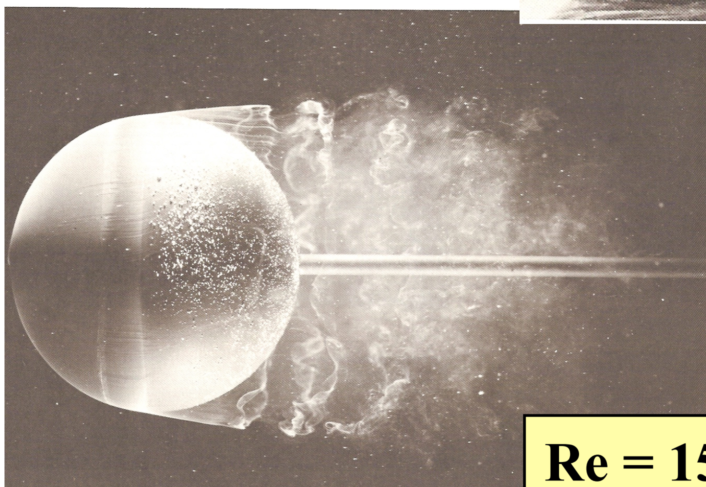
Que se passe-t-il lorsque l'on augmente le nombre de Re ?



Re = 25



Re = 118



Re = 15000

(Van Dyke, 1982)

Re très très petit…

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ 0 &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \end{aligned}$$

Le terme d'inertie est négligeable

Ecoulements incompressibles rampants

Equations de Stokes

Le terme visqueux est négligeable

Ecoulements incompressibles irrotationnels

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p \end{aligned}$$

…et Re très très grand !

Equations d'Euler