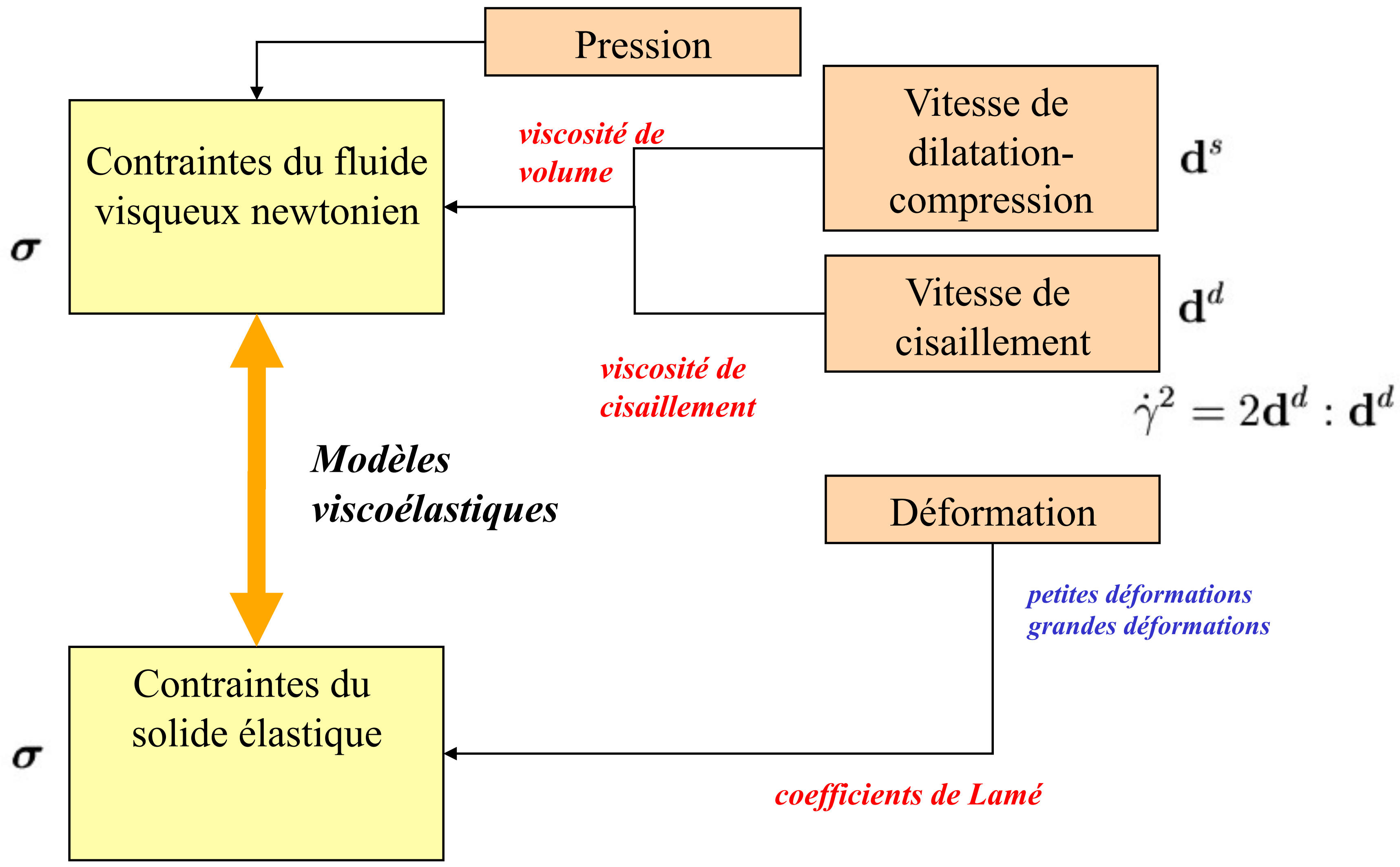
Rhéologie : la science du monde magique des équations de comportement…



Simplifications usuelles…

Ecoulement incompressible

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Transformations adiabatiques

$$q = r = 0$$

Ecoulement incompressible et irrotationnel

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{v} = 0,$$

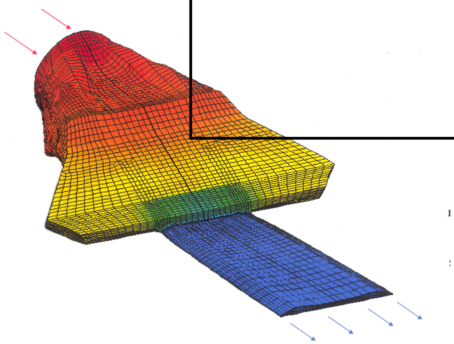
Hypothèses irréalistes

Fluide incompressible

$$\rho = cst$$

Fluide parfait

$$\mu = \kappa = 0$$



Hypothèses réalistes

Donc, simplifions…

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(p,\mathbf{v}) &= -p\boldsymbol{\delta} + \mu(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}^T)\\ \mathbf{q}(T) &= -k\boldsymbol{\nabla}T\\ U(T) &= cT\end{aligned}$$

Fluide newtonien à paramètres matériels constants

Ecoulement incompressible

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0$$

Dans un écoulement incompressible, il n'y a pas de raison de distinguer chaleur spécifique à volume ou à pression constante.
On écrit simplement le symbole c !

Les équations de continuité et de quantité de mouvement ne font pas intervenir la température : on peut résoudre la dynamique de l'écoulement sans tenir compte des aspects thermiques !

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} &= 0,\\ \rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\boldsymbol{\nabla}p + \mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{v} + \rho\mathbf{g},\end{aligned}}$$

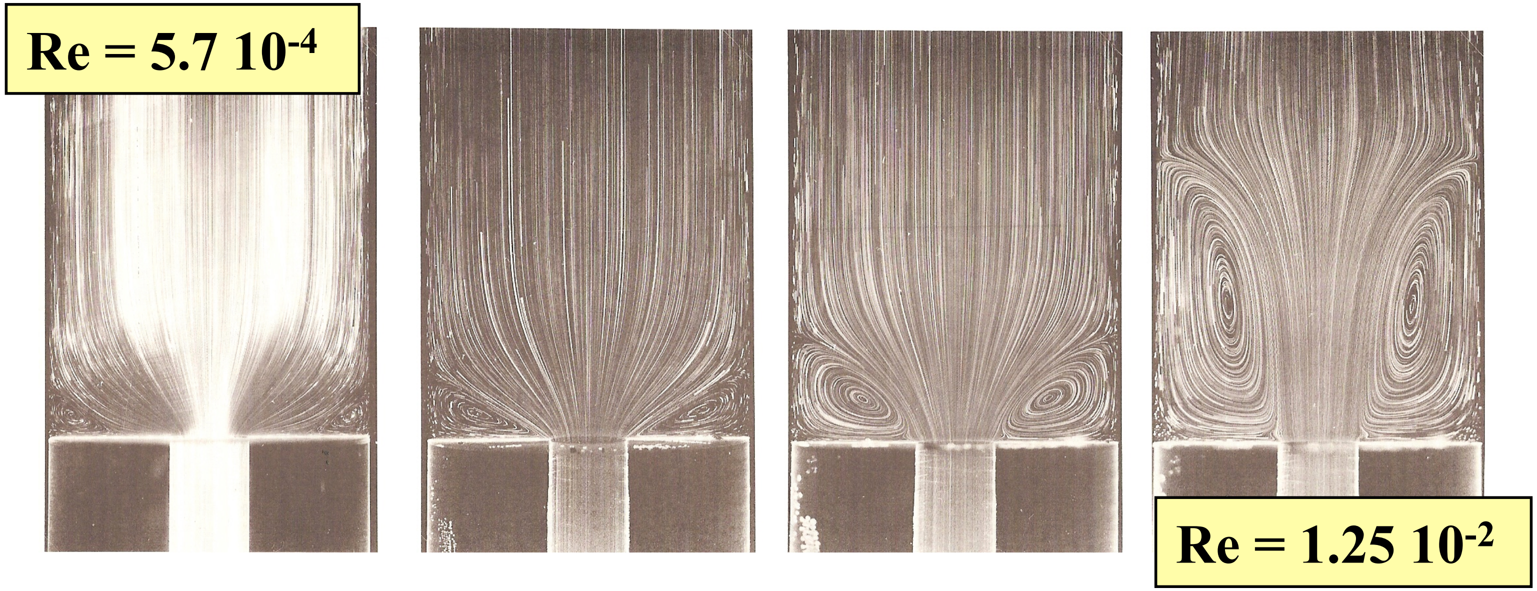
$$\rho c\frac{DT}{Dt} = 2\mu(\mathbf{d}:\mathbf{d}) + r + k\boldsymbol{\nabla}^2 T,$$

Ecoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants.

Ecoulements incompressibles stationnaires

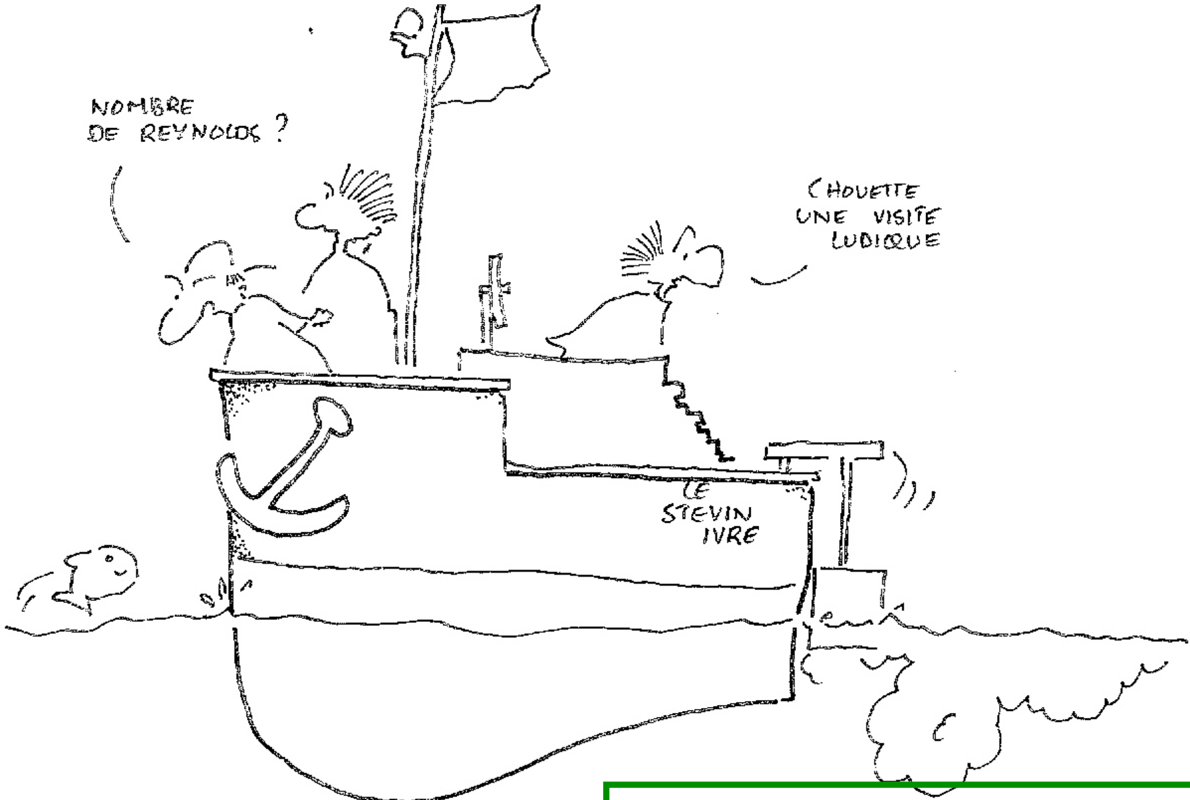
$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

Ecoulement incompressible stationnaire d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans forces de volume.



(Boger, Hur, Binnington, JNFM 1986)

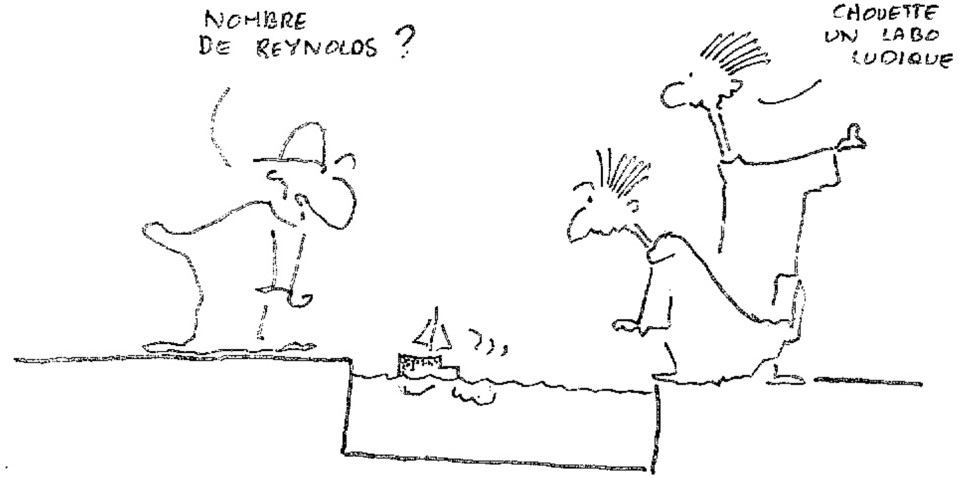
Adimensionaliser : pourquoi ?



$$\begin{aligned} U &= 0.1\ m/s \\ L &= 10\ m \\ \rho &= 10^3\ kg/m^3 \\ \mu &= 10^{-3}\ kg/ms \end{aligned}$$

$$\boxed{Re = \frac{\rho U L}{\mu} = 10^6}$$

Adimensionaliser : pourquoi ?



$$\begin{aligned} U &= 10\ m/s \\ L &= 0.1\ m \\ \rho &= 10^3\ kg/m^3 \\ \mu &= 10^{-3}\ kg/ms \end{aligned}$$

$$\boxed{Re = \frac{\rho U L}{\mu} = 10^6}$$

Adimensionaliser

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
\rho(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} &= -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \frac{\mathbf{x}}{L}, \\
\mathbf{v}' &= \frac{\mathbf{v}}{U}, \\
p' &= \frac{p - \boxed{p_0}}{\rho U^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}' \cdot \mathbf{v}' &= 0 \\
(\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\nabla}')\mathbf{v}' &= -\boldsymbol{\nabla}' p' + \frac{1}{Re}(\boldsymbol{\nabla}')^2 \mathbf{v}'
\end{aligned}
$$

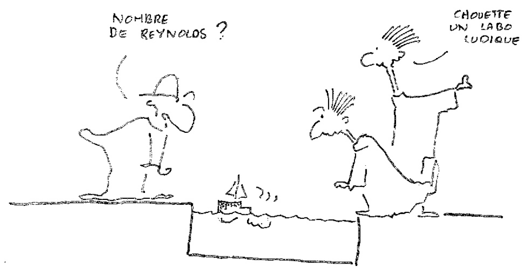
Dans un écoulement incompressible, seul un écart de pression peut être caractéristique… Ajouter ou retirer une pression constante ne change rien à l'écoulement !

En variables adimensionnelles,

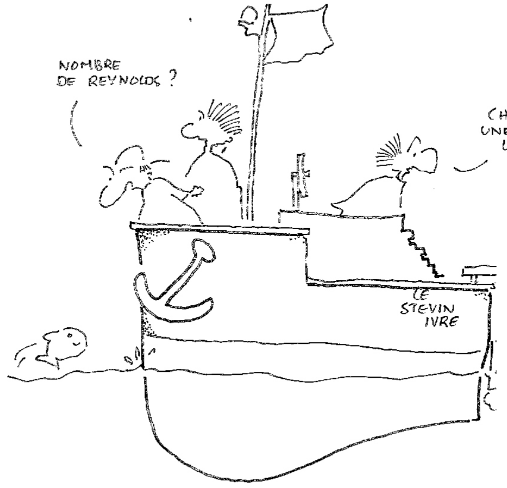
$$\boxed{Re \;=\; \frac{\rho U L}{\mu} \;=\; 10^6}$$

Ils ont le même nombre de Reynolds :-)

$$\begin{aligned} U &= 10\ m/s \\ L &= 0.1\ m \\ \rho &= 10^3\ kg/m^3 \\ \mu &= 10^{-3}\ kg/ms \end{aligned}$$



$$\frac{p_{mer}(\mathbf{x}) - p_{mer}(0)}{\rho U_{mer}^2} \;=\; p'_{mer}(\mathbf{x}') \;=\; p'_{labo}(\mathbf{x}') \;=\; \frac{p_{labo}(\mathbf{x}) - p_{labo}(0)}{\rho U_{labo}^2}$$



$$\begin{aligned} U &= 0.1\ m/s \\ L &= 10\ m \\ \rho &= 10^3\ kg/m^3 \\ \mu &= 10^{-3}\ kg/ms \end{aligned}$$

…ces deux écoulements sont identiques.

C'est quoi physiquement le nombre de Reynolds ?

Effets visqueux
Diffusion de la quantité de mouvement

$$\boxed{\rho(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} \quad \mathcal{O}(\rho U^2/L)} = -\boldsymbol{\nabla}p + \boxed{\mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{v} \quad \mathcal{O}(\mu U/L^2)}$$

Effets d'inertie
Transport de la quantité de mouvement

$$Re = \frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

Nombre de Reynolds

caractérise un écoulement d'un fluide !

$$Re = \frac{\rho_0 u_0 L}{\mu}$$

à éventuellement savoir, à titre de *double check*

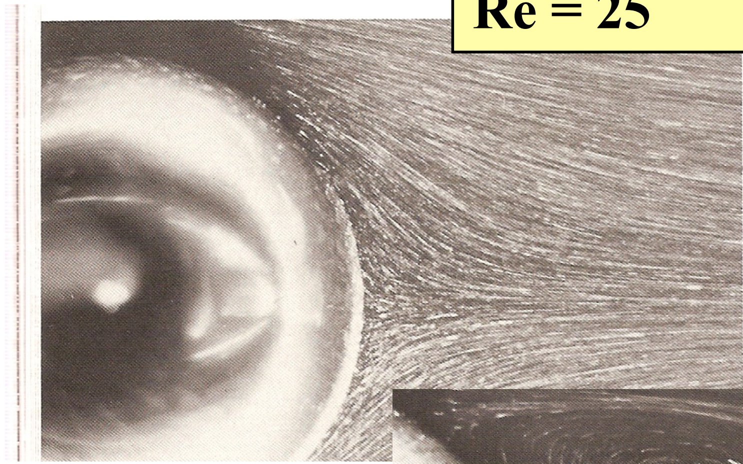
Born: 23 Aug 1842 in Belfast, Ireland

Died: 21 Feb 1912 in Watchet, Somerset, England

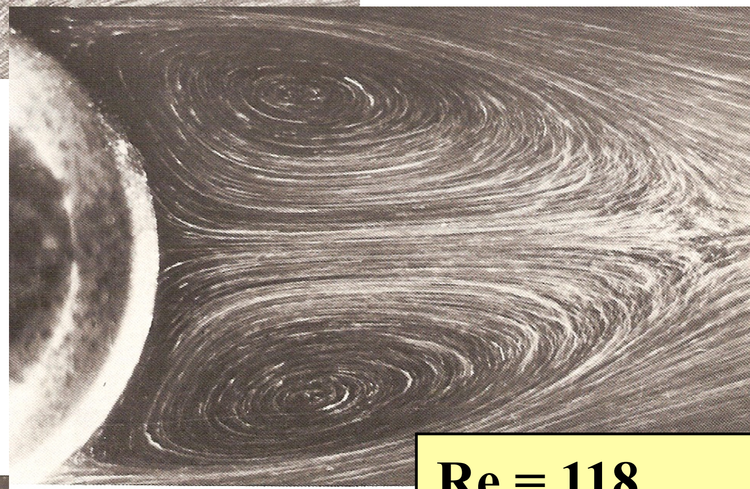
$$\frac{\textbf{Forces d'inertie}}{\textbf{Forces de viscosité}}$$

à savoir !

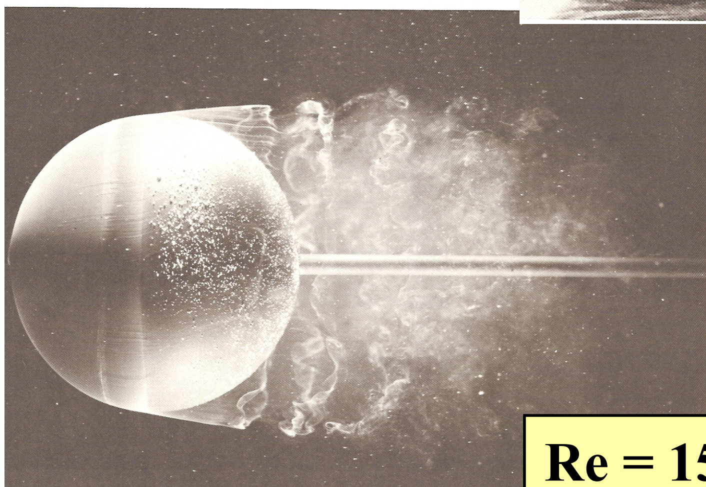
Que se passe-t-il lorsque l'on augmente le nombre de Re ?



Re = 25



Re = 118



Re = 15000

(Van Dyke, 1982)

Re très très petit…

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ 0 &= -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{v} \end{aligned}$$

Le terme d'inertie est négligeable

Ecoulements incompressibles rampants

Equations de Stokes

Le terme visqueux est négligeable

Ecoulements incompressibles irrotationnels

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \rho (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \mathbf{v} &= -\boldsymbol{\nabla} p \end{aligned}$$

…et Re très très grand !

Equations d'Euler

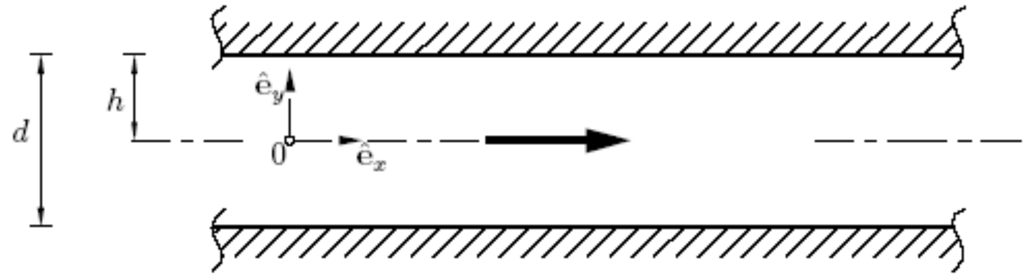
Ecoulements incompressibles stationnaires plans

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

Ecoulement incompressible stationnaire d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans forces de volume.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\rho\left(u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\
\rho\left(u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}
$$

Ecoulements 3D – 2D – 1D



Ecoulements établis :

- Une seule vitesse u
- Pas de variations de u le long de l'axe de la conduite (c'est-à-dire x)

Un écoulement établi est un écoulement dont le profil transversal de vitesse est le même quelle que ce soit la section transversale à l'écoulement.

La section doit évidemment être constante !

Ecoulements incompressibles stationnaires plans <u>établis</u>

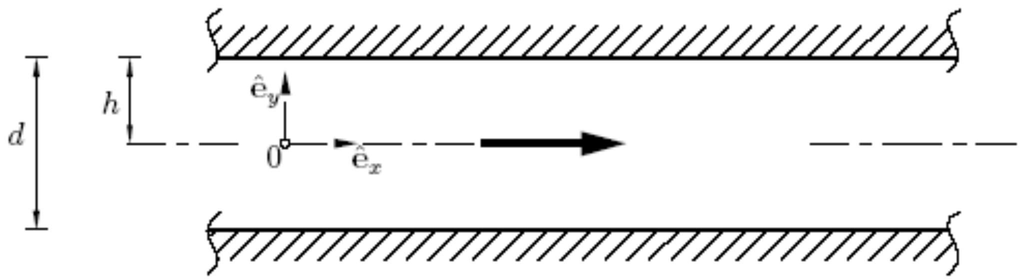
$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

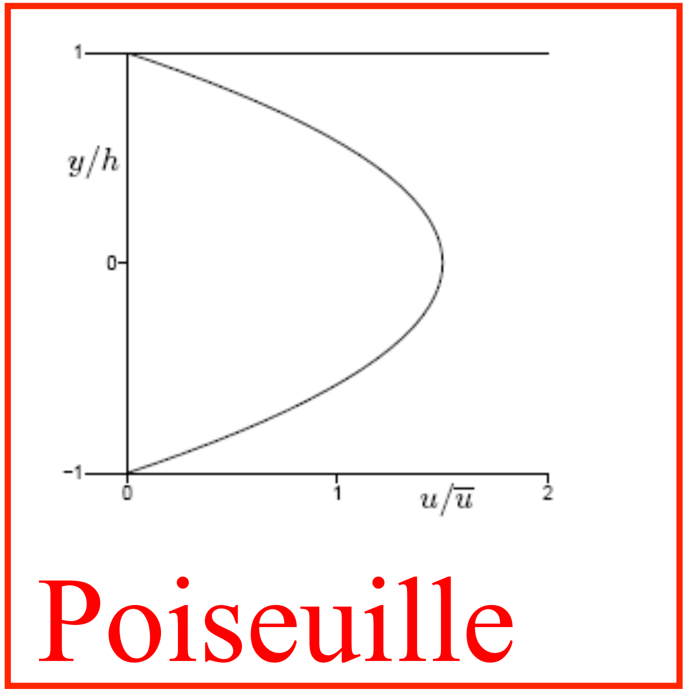
$$\rho\left(u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

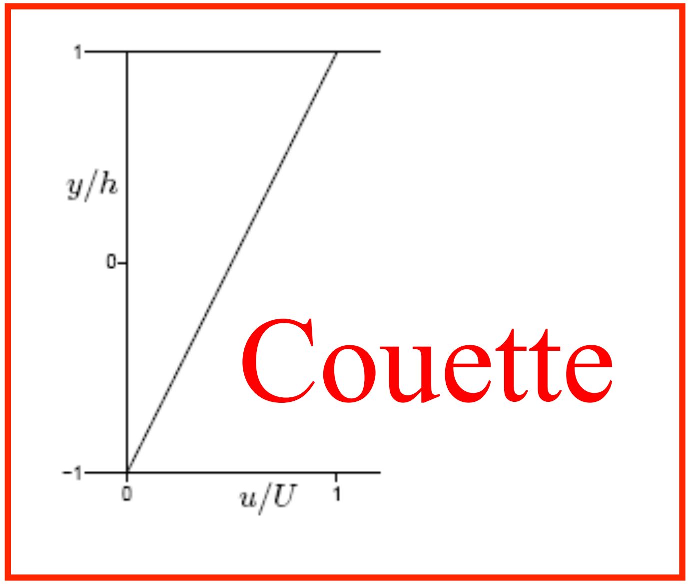
$$\rho\left(u\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} + v\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}\right)$$

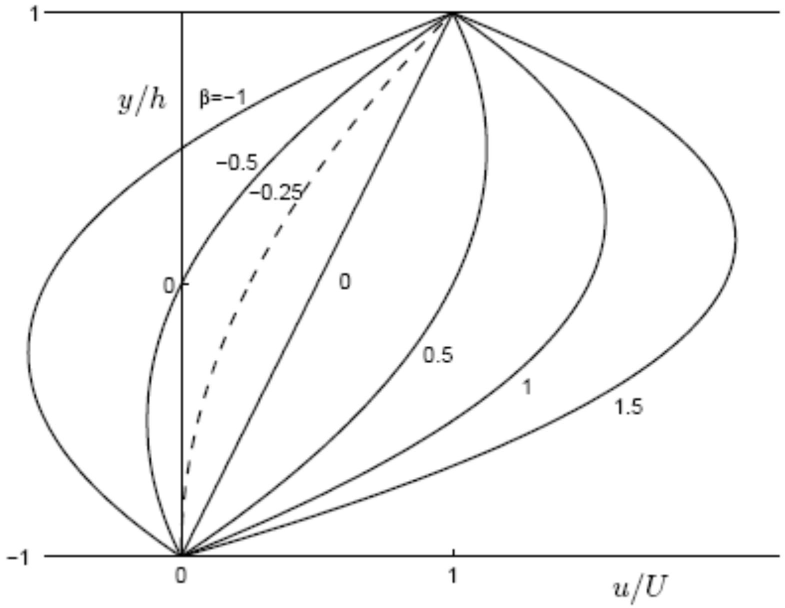
En imposant v=0 sur une des parois…

$$\boxed{0 = -\frac{dp}{dx} + \mu\frac{d^2 u}{dy^2}}$$




1
y/h
0
−1
0
1
u/ū
2
Poiseuille

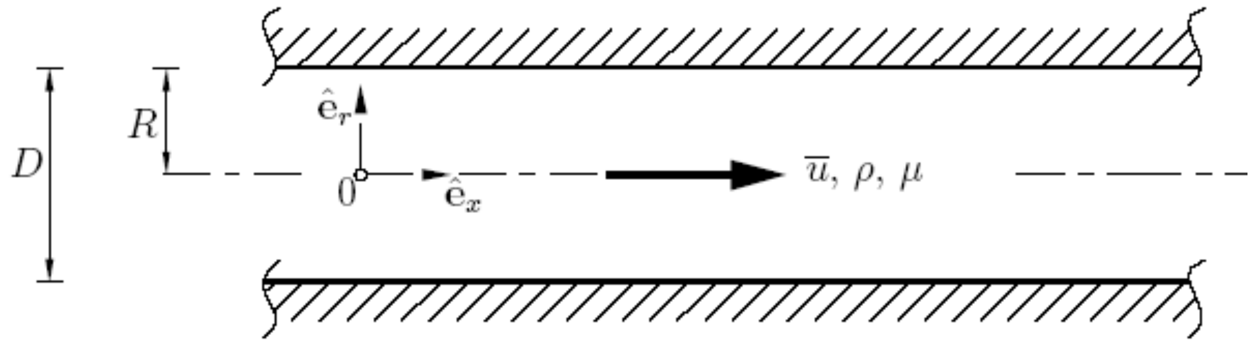

1
y/h
0
−1
0
u/U
1
Couette

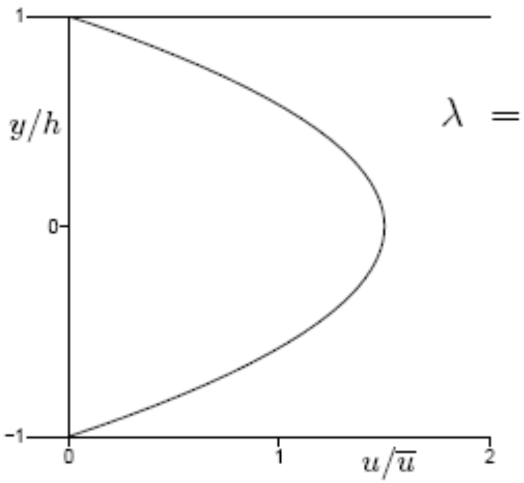

1
y/h
β=−1
−0.5
−0.25
0
0
0.5
1
1.5
−1
0
1
u/U

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v) &= 0 \\
\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right) \\
\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial r}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{v}{r^2}\right)
\end{aligned}
$$

Ecoulements incompressibles stationnaires axisymétriques établis

$$
\boxed{0 = -\frac{dp}{dx} + \mu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)}
$$





$$\lambda = 2C_f = \frac{24}{Re_d}$$

Ecoulement entre deux plaques

Poiseuille

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho\overline{u}^2/2}$$

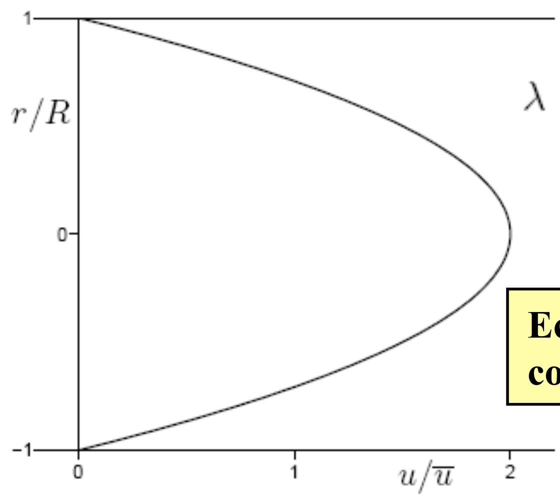
$$\lambda = -\frac{dp}{dx}\frac{d}{\rho\overline{u}^2/2}$$

Ces profils laminaires sont identiques, quel que soit le nombre de Reynolds, car les termes non-linéaires ont disparu en supposant que l'écoulement est établi…

Toutefois, ces profils laminaires deviendront temporellement instables à haut nombre de Reynolds….

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho\overline{u}^2/2}$$

$$\lambda = -\frac{dp}{dx}\frac{D}{\rho\overline{u}^2/2}$$



$$\lambda = 4C_f = \frac{64}{Re_D}$$

Ecoulement en conduite circulaire

Hagen-Poiseuille

Et le thermique…

Ecoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants.

Les équations de continuité et de quantité de mouvement ne font pas intervenir la température : on peut résoudre la dynamique de l'écoulement sans tenir compte des aspects thermiques !

Etape 1

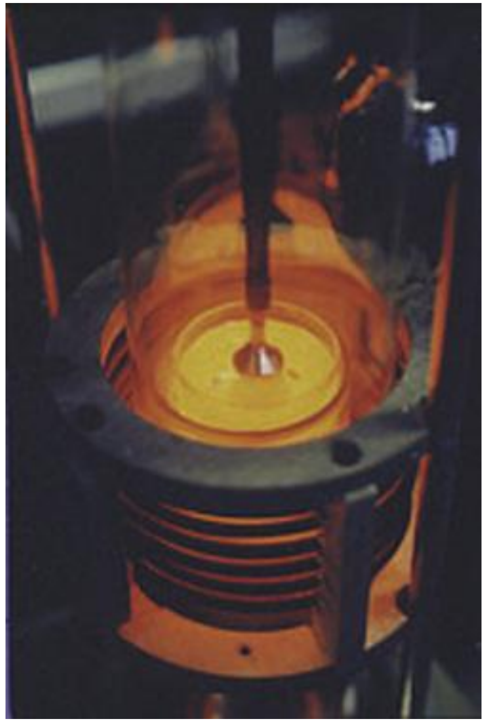
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}, \end{aligned}$$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k\boldsymbol{\nabla}^2 T,$$

Etape 2

Une fois la dynamique de l'écoulement connue, on peut ensuite résoudre le problème thermique…

Transferts de chaleur stationnaires



$$\rho c(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})T = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k\boldsymbol{\nabla}^2 T$$

Mécanismes du transfert conductif

L'énergie se propage du chaud vers le froid

$$\mathbf{q} = -k\boldsymbol{\nabla}T$$

Le point de vue microscopique…

On examine le transfert d'énergie entre porteurs du milieu considéré. La fonction de distribution des porteurs est régie par l'équation de Boltzmann de la théorie cinétique.

Isolants	***10^{-2} W/mK***
Métaux	***10^{2} W/mK***

Matériau	$k\,(W/mK)$
eau (à pression atmosphérique)	0.67
cuivre	380
aluminium	260
acier	45

Lois de conservation

Lois de comportement

Conditions aux limites

L'approche phénomélogique…

Un flux thermique dans un corps est lié à l'existence d'un gradient de température. L'équation de Fourier relie ces deux grandeurs.

Lois de comportement très approximatives…

Lois de conservation | Lois de comportement

Conditions aux limites

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= -p\boldsymbol{\delta} + 3\hat{\kappa}(p,T)\mathbf{d}^s + 2\hat{\mu}(p,T)\mathbf{d}^d,\\
\mathbf{q} &= -\hat{k}(p,T)\boldsymbol{\nabla}T,\\
\rho &= \hat{\rho}(p,T),\\
H &= \hat{H}(p,T),\\
S &= \hat{S}(p,T).
\end{aligned}
$$

Loi de Fourier

Modèle du fluide visqueux Newtonien

Nombre de Péclet

caractérise le transfert de chaleur d'un écoulement d'un fluide !

$$Pe = \frac{\rho_0 u_0 L c_p}{k}$$

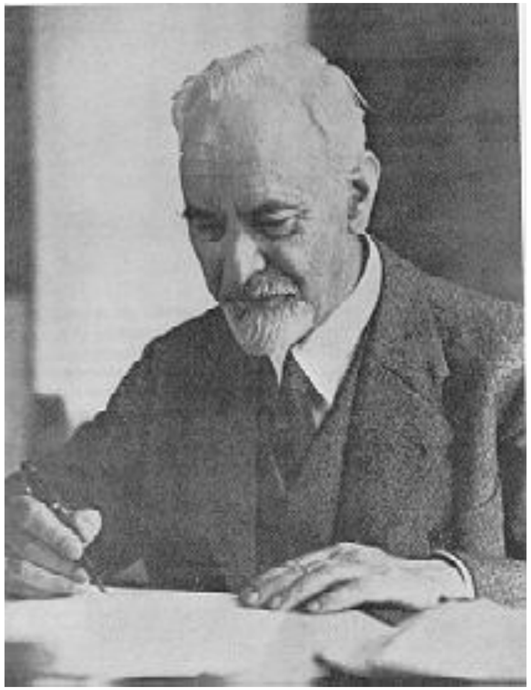
Born: 10 Feb 1793 in Besancon, France

Died: 6 Dec 1857 in Paris, France

$$\frac{\textbf{Puissance transportée}}{\textbf{Puissance diffusée}}$$

à savoir !

Nombre de Prandtl



Born: 1875 in Freising, Germany

Died: 1953 in Gottingen, Germany

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k}$$

caractérise un fluide !

Peclet = Effets de convection / effets de conduction

Reynold = Effets d'inertie / effets de viscosité

à savoir !

Validité de la loi de Fourier…

$$\boxed{\boxed{\mathbf{q}} = -k\boxed{\nabla T}}$$

L'effet (le flux de chaleur) est proportionnel à la cause (le gradient de température)

Toutefois, lorsqu'on observe un déséquilibre thermique initial, il faut un temps très faible, mais fini de l'ordre de grandeur du temps moyen entre collisions pour que les porteurs donnent naissance au flux thermique…

L'absence d'inertie dans l'expression de Fourier conduit à une vitesse de propagation infinie dans l'équation de la chaleur (équation parabolique)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = r + \nabla \cdot (k \nabla T)$$

Diffusivité thermique

$$\boxed{\alpha = \frac{k}{\rho c}}$$

Caractérise la facilité avec laquelle un flux de chaleur transmis à un solide se traduit par un relèvement de température

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = r + \boldsymbol{\nabla} \cdot (k \boldsymbol{\nabla} T)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{r}{k} + \boldsymbol{\nabla}^2 T$$

Matériau	Argent	Cuivre	Acier	Verre
$10^6 \alpha \, m^2/s$	170	103	12.9	0.59
	$9.5\, min$	$16.5\, min$	$2.2\, h$	$2.0\, jours$

Milieu semi infini soumis initialement à température nulle
Surface externe mise à 100 degrés.
Temps requis pour avoir 50 degrés à 30 cm

Le petit frère de Reynolds : Péclet

Effets de conduction
Diffusion de l'énergie

$$\boxed{\rho c(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})T \quad \mathcal{O}(\rho c U \Delta T/L)} = 2\mu(\mathbf{d}:\mathbf{d}) + r + \boxed{k\boldsymbol{\nabla}^2 T \quad \mathcal{O}(k\Delta T/L^2)}$$

Effets de convection
Transport de l'énergie

$$Pe = \frac{\boxed{\text{Energie transportée}}}{\boxed{\text{Energie diffusée}}} = \frac{\rho c U \Delta T/L}{k\Delta T/L^2} = \frac{\rho c U L}{k}$$

Oui : c'est bien le petit frère !

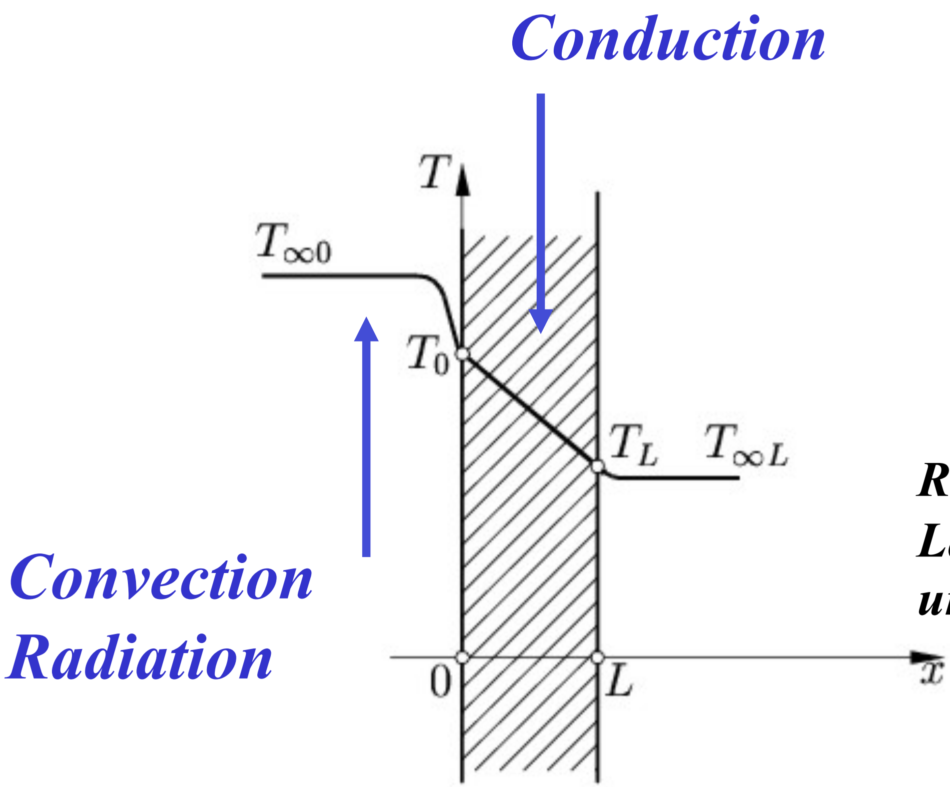
Effets visqueux
Diffusion de la quantité
de mouvement

$$\boxed{\rho(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} \quad \mathcal{O}(\rho U^2/L)} = -\boldsymbol{\nabla}p + \boxed{\mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{v} \quad \mathcal{O}(\mu U/L^2)}$$

Effets d'inertie
Transport de la quantité
de mouvement

$$Re = \frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

Conduction dans une plaque soumise à la convection



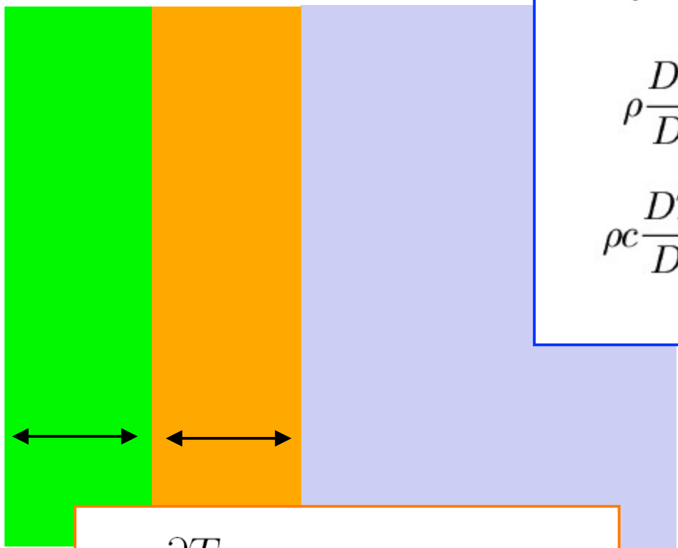
Radiateur domestique : h = 15 W/m²K
La convection libre et le rayonnement ont une contribution plus ou moins identique

régime permanent

Un problème pas aussi élémentaire que prévu…

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0,\\ \rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla p + \nabla\cdot(2\mu\mathbf{d}) + \rho\mathbf{g},\\ \rho c\frac{DT}{Dt} &= 2\mu(\mathbf{d}:\mathbf{d}) + r + \nabla\cdot(k\nabla T),\end{aligned}$$

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n} = -h\Delta T$$



$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = r + \nabla\cdot(k\nabla T)$$

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = r + \nabla\cdot(k\nabla T)$$

Simplifions-le !

Loi de Newton

$$\boxed{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -h \Delta T}$$

Lois de conservation	Lois de comportement
Conditions aux limites	

Type de transfert	Fluide	$h(W/m^2K)$
Convection forcée	gaz	10...300
	liquide aqueux	500...12000
	huile	50...1700
	métal liquide	6000...110000
Convection naturelle	gaz	5...30
	liquide aqueux	100...1000
Changement de phase	eau, ébullition	3000...60000
	eau, condensation	5000...110000

Nombre de Biot

$$Bi = \frac{hL}{k}$$

caractérise une condition d'interface

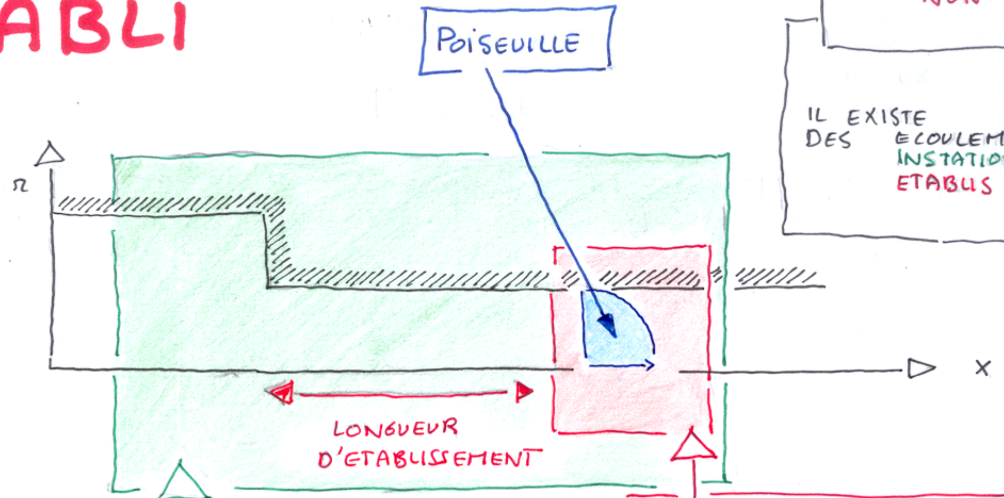
Born: 21 April 1774, Paris, France

Died: 3 Feb 1862, Paris, France

Flux de chaleur transportée par convection dans l'écoulement extérieur

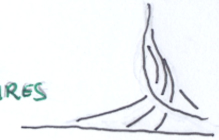
Flux de chaleur diffusif dans le solide

ECOULEMENT ETABLI



IL EXISTE DES ECOULEMENTS STATIONNAIRES NON-ETABLIS

IL EXISTE DES ECOULEMENTS INSTATIONNAIRES ETABLIS



ECOULEMENT STATIONNAIRE (PERMANENT)

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

$\neq$

ECOULEMENT ETABLI

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial x} = 0$$

Poiseuille en conduite cylindrique

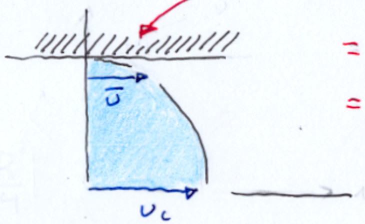
$$\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)$$

$$u(r) = \left(\frac{dp}{dx}\right)\frac{1}{\mu}\left(\frac{r^2}{4} + \underbrace{A \log r}_{=0} + \underbrace{B}_{=-R^2/4}\right)$$

$$\boxed{u\Big(\underbrace{\frac{r}{R}}_{\eta}\Big) = \underbrace{\left(-\frac{dp}{dx}\frac{R^2}{4\mu}\right)}_{u_c}\underbrace{\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)}_{(1-\eta^2)}}$$

VARIABLE ADIMENSIONNELLE

$$\tau_w = -\mu \left.\frac{du}{dr}\right|_{r=R} = \mu u_c (2/R) = \mu\, 4\bar{u}/R$$



$$Q = 2\pi u_c \underbrace{\int_0^R r - \frac{r^3}{R^2}\, dr}_{\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2R^2}\right]_0^R = \frac{R^2}{4}}$$

$$\boxed{Q = \frac{\pi R^2}{2} u_c}$$

$$\boxed{Q = \pi R^2 \bar{u}}$$

$$\boxed{\bar{u} = \frac{u_c}{2}}$$

.... ET

EN VARIABLES ADIMENSIONNELLES

$$u' = u/\bar{u}$$
$$r' = r/R$$

η

$\frac{r}{R}$

$$\boxed{\frac{u(\eta)}{\bar{u}} = 2(1-\eta^2)}$$

CONTRAINTE
DUE UNIQUEMENT
AUX EFFETS VISQUEUX

$4\mu\bar{u}/R$

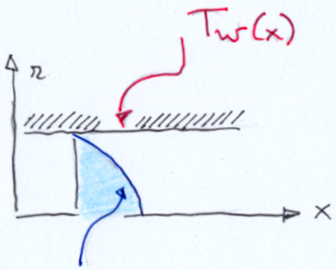
$$\boxed{C_f = \frac{\tau_w}{\rho\bar{u}^2/2} = \frac{8\mu}{\rho R\bar{u}} = \frac{16}{Re_D}}$$

PRESSION
CARACTERISTIQUE
DES EFFETS D'INERTIE
(BERNOULLI !)

$$\frac{\rho\bar{u}^2/D}{\mu\bar{u}/D^2} = \frac{\rho D\bar{u}}{\mu}$$
$$= \frac{2\rho R\bar{u}}{\mu}$$

TRANSFERT THERMIQUE EN ECOULEMENT ETABLI

$$\rho c u \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \mu \left(\frac{du}{dr}\right)^2$$



$$u(r) = 2\bar{u}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

$$\frac{du}{dr}(r) = -\frac{4\bar{u}}{R}\frac{r}{R}$$

TRANSFERT THERMIQUE ETABLI

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T - T_w\right) = 0$$

$T_w = cst$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

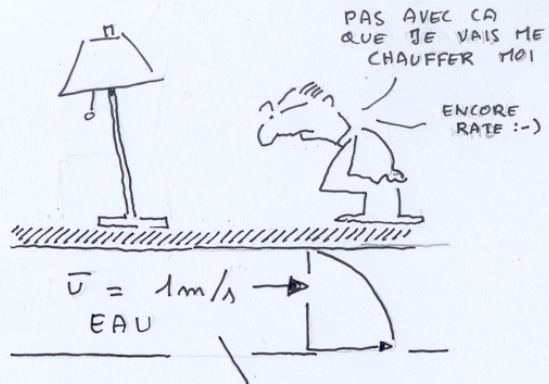
$T_w = \alpha x$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_w}{dx} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

$$T_w = \text{CST}$$

DISSIPATION VISQUEUSE $\quad 16\mu \dfrac{\bar{u}^2}{R^2}\left(\dfrac{r}{R}\right)^2$

$$0 = \underbrace{k \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)}_{\text{CONDUCTION RADIALE}} + \overbrace{\mu\left(\frac{du}{dr}\right)^2}^{\text{DISSIPATION VISQUEUSE}}$$



$$\mu = 10^{-3}\ \mathrm{Ns/m^2}$$
$$k = 0{,}6\ \mathrm{W/mK}$$
$$T_c - T_w = 0{,}002\,^\circ\mathrm{C}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{16\mu}{k}\frac{\bar{u}^2}{R^2}\frac{r^3}{R^2}$$

$$r\frac{dT}{dr} = -\frac{4\mu}{k}\bar{u}^2\frac{r^4}{R^4} + A$$

$$T(r) = -\frac{\mu}{k}\bar{u}^2\frac{r^4}{R^4} + \cancel{A\log r} + B$$

$$\boxed{T(r) - T_w = \frac{\mu\bar{u}^2}{k}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)}$$

NOMBRE DE NUSSELT

$$q_w = -k \underbrace{\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R}}_{-4\frac{\mu \bar{u}^2}{k}\frac{1}{R}} = \underbrace{4\frac{\mu \bar{u}^2}{R}}_{\text{FLUX DE CHALEUR GENEREE PAR DISSIPATION VISQUEUSE}} = \boxed{\frac{4k}{R}(T_c - T_w)}$$

$$Nu = \frac{\boxed{\text{FLUX DE CHALEUR A LA PAROI}}}{\boxed{\text{FLUX DE CHALEUR CONDUCTIF CARAC.}}}$$

$$\boxed{= k\,(\underbrace{T_c - T_w}_{\text{ECART CARACTERISTIQUE DE TEMPERATURE}})/\underbrace{D}_{\text{DIMENSION CARACTERISTIQUE}}}$$

... OU $\bar{\bar{T}} - T_w$ PLUS COURANT EN INGÉNIERIE

$$= \frac{4k\,(T_c - T_w)/R}{k\,(T_c - T_w)/D} = \underbrace{8}_{}$$

ARBITRAIRE DEPEND DU CHOIX DES DIMENSIONS CARACTERISTIQUES

Nombre de Nusselt

$$Nu = \frac{q_w L}{k \Delta T}$$

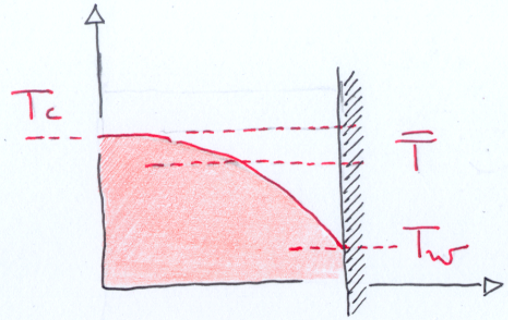
caractérise une condition d'interface !

Born: 25 Nov 1882 in Nurnberg, Germany

Died: 1 Sep 1957 in Munchen, Germany

Flux de chaleur à la paroi

Flux de chaleur diffusé dans l'écoulement



CUP MIXING TEMPERATURE

$$\underbrace{\int_A \rho c T u \, dA}_{\text{FLUX D'ENERGIE TRANSPORTEE PAR LA CONDUITE}} = \bar{\bar{T}} \int_A \rho c u \, dA$$

FLUX D'ENERGIE TRANSPORTEE PAR LA CONDUITE

ρ, c CONSTANTS

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\bar{T}} - T_w &= \frac{5}{6}\,\frac{\mu \bar{U}^2}{k} \\ T_c - T_w &= \frac{\mu \bar{U}^2}{k} \end{aligned}}$$

$$\frac{2\pi \displaystyle\int_0^{R^2} \frac{\mu \bar{U}^2}{k}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^4\right) 2\bar{U}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) r \, dr}{\pi R^2 \bar{U}} = \bar{\bar{T}} - T_w$$

$$4\,\frac{\mu \bar{U}^2}{k R^2}\, R^2 \underbrace{\int_0^1 (1-\eta^4)(1-\eta^2)\,\eta \, d\eta}_{} = \bar{\bar{T}} - T_w$$

$$\left[\frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^4}{4} - \frac{\eta^6}{6} + \frac{\eta^8}{8}\right]_0^1 = \frac{24-12-8+6}{48} = \frac{5}{24}$$

LES .... NOMBRES DE NUSSELT

$$q_w = 4\mu\bar{u}^2/R$$

$$Nu = \frac{q_w}{\text{FLUX CONDUCTIF CARACTERISTIQUE}} = \boxed{\frac{6}{5}}\ \boxed{1}\ \frac{4\mu\bar{u}^2/R}{\mu\bar{u}^2/2R} =$$

OPTION 1: $\boxed{1}$

OPTION 2: $\boxed{\frac{6}{5}}$

OPTION 1

$$8$$

OPTION 2

$$\frac{48}{5} = 9{,}6$$

OPTION 1

$$k(T_c - T_w)/D$$

$$= k\,\frac{\mu\bar{u}^2}{k}\,\frac{1}{2R}$$

OPTION 2

$$k(\bar{T} - T_w)/D$$

$$= k\,\frac{5}{6}\,\frac{\mu\bar{u}^2}{k}\,\frac{1}{2R}$$

$$\frac{dT_w}{dx} = CST$$

$$\underbrace{\rho c \frac{dT_w}{dx} 2\bar{u}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)}_{\text{CHALEUR TRANSPORTEE}} = \underbrace{k \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)}_{\text{CONDUCTION RADIALE}} + \overbrace{16\mu \frac{\bar{u}^2}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^2}^{\text{DISSIPATION VISQUEUSE}}$$

$$\boxed{T(r) - T_w = \frac{\mu \bar{u}^2}{k}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^4\right) - \frac{1}{8}\,\frac{\rho c}{k}\frac{dT_w}{dx}\bar{u}R^2\left(3-4\left(\frac{r}{R}\right)^2+\left(\frac{r}{R}\right)^4\right)}$$

$$\boxed{\beta \triangleq \frac{\frac{\rho c}{k}\frac{dT_w}{dx}\bar{u}R^2}{\frac{\mu\bar{u}^2}{k}} = \rho c \frac{dT_w}{dx}\frac{R^2}{\mu \bar{u}}}$$

NOMBRE β

$$\rho c \bar{u} \frac{dT_w}{dx}$$

$$\beta = \frac{\text{ENERGIE TRANSPORTEE DANS LA CONDUITE}}{\text{ENERGIE GENEREE PAR DISSIPATION VISQUEUSE}} = \frac{\rho c R^2}{\mu \bar{u}} \frac{dT_w}{dx}$$

$$\frac{\mu \bar{u}^2}{R^2}$$

$$T - T_w = \frac{\mu \bar{u}^2}{k}\left[\left(1-\eta^4\right) - \frac{1}{8}\beta\left(3 - 4\eta^2 + \eta^4\right)\right]$$

$$T_c - T_w = \frac{\mu \bar{u}^2}{k}\left(1 - \frac{3}{8}\beta\right)$$

$$\bar{T} - T_w = \frac{\mu \bar{u}^2}{k}\left(\frac{5}{6} - \frac{11}{48}\beta\right)$$

$$q_w = \frac{\mu \bar{u}^2}{R}\left(4 - \beta/2\right)$$

NOMBRE DE NUSSELT

$$Nu = \frac{\mu \bar{u}^2 (8 - \beta)/D}{k \frac{\mu \bar{u}^2}{k}\left(5/6 - 11/48\, \beta\right)/D} = \frac{(8-\beta)}{(5/6 - 11/48\, \beta)}$$

Une grande famille !

Effets de conduction
Diffusion de l'énergie

$$\boxed{\underset{\mathcal{O}(\rho c U \Delta T/L)}{\rho c(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})T}} = \boxed{\underset{\mathcal{O}(\mu U^2/L^2)}{2\mu(\mathbf{d}:\mathbf{d})}} + r + \boxed{\underset{\mathcal{O}(k\Delta T/L^2)}{k\boldsymbol{\nabla}^2 T}}$$

Effets de convection
Transport de l'énergie

Effets de dissipation visqueuse
Transformation d'énergie

$$Pe = \frac{\color{red}\blacksquare}{\color{green}\blacksquare} \qquad Pr\ Ec = \frac{\color{blue}\blacksquare}{\color{green}\blacksquare} \qquad \beta = \frac{Re}{Ec} = \frac{\color{red}\blacksquare}{\color{blue}\blacksquare}$$

$$Ec = \frac{\text{Energie cinétique}}{\text{Energie interne}} = \frac{\rho U^2}{\rho c \Delta T} = \frac{U^2}{c\Delta T}$$

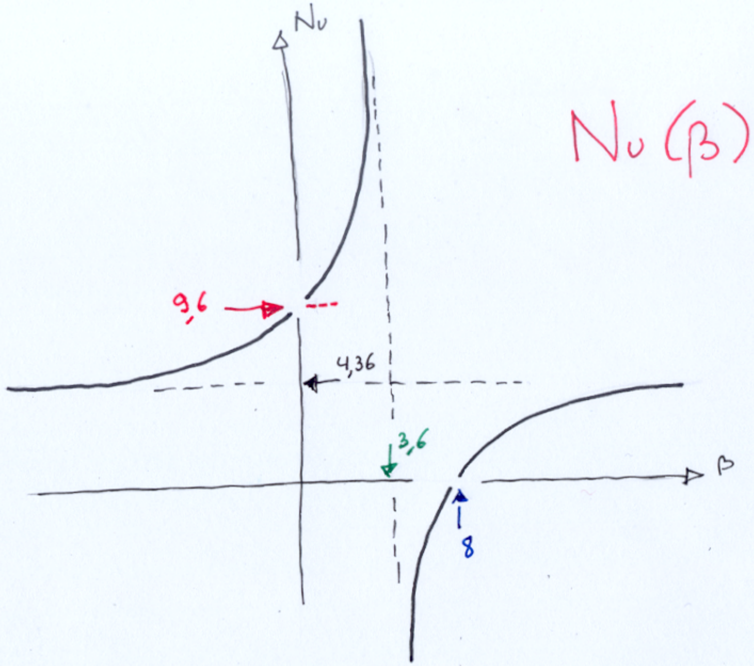
Nombre d'Eckert

$$Ec = \frac{u_e^2}{c(T_w - T_e)}$$

Picture was taken on August 22, 2000

caractérise un écoulement d'un fluide !

$$\frac{\textbf{Energie cinétique}}{\textbf{Energie interne}}$$



$$Nu(\beta) = \frac{8-\beta}{\left(5/6 - 11/48\,\beta\right)}$$

$\beta = 0$

$T_w = CST \rightarrow Nu = \frac{48}{5} = 9{,}6$

$\beta = 8$

CAS ADIABATIQUE

$q_w = 0 \rightarrow Nu = 0$

$\beta = \frac{40}{11} = 3{,}6$

$\rightarrow q_w \neq 0$

$\bar{T} - T_w = 0$

$Nu \rightarrow \infty$

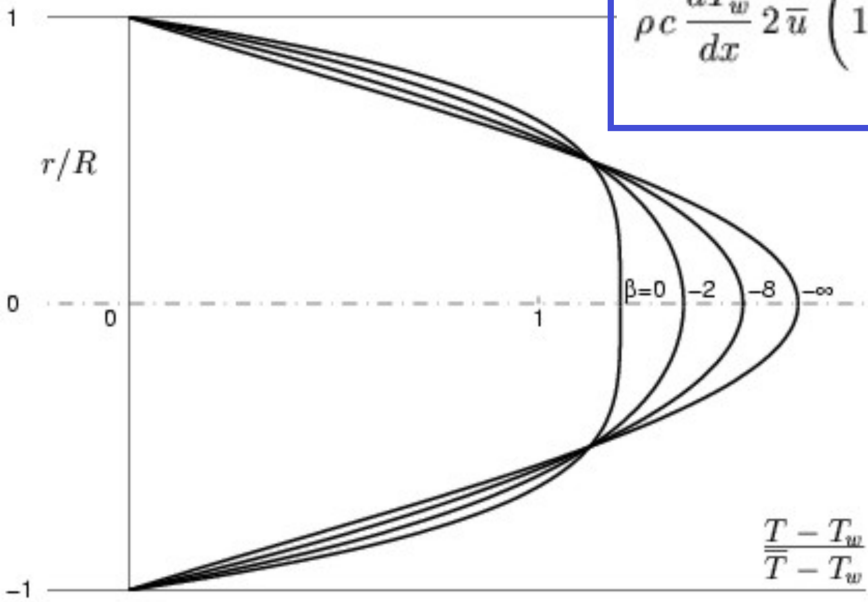
$\beta \rightarrow \pm\infty$

DISSIPATION VISQUEUSE NEGL.

$Nu \rightarrow \frac{48}{11} = 4{,}36$

Transfert thermique établi avec une température de paroi linéaire

$$\boxed{\rho c \frac{dT_w}{dx}\, 2\overline{u}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) = k\,\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}(T-T_w)\right)+16\,\mu\frac{\overline{u}^2}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^2}$$



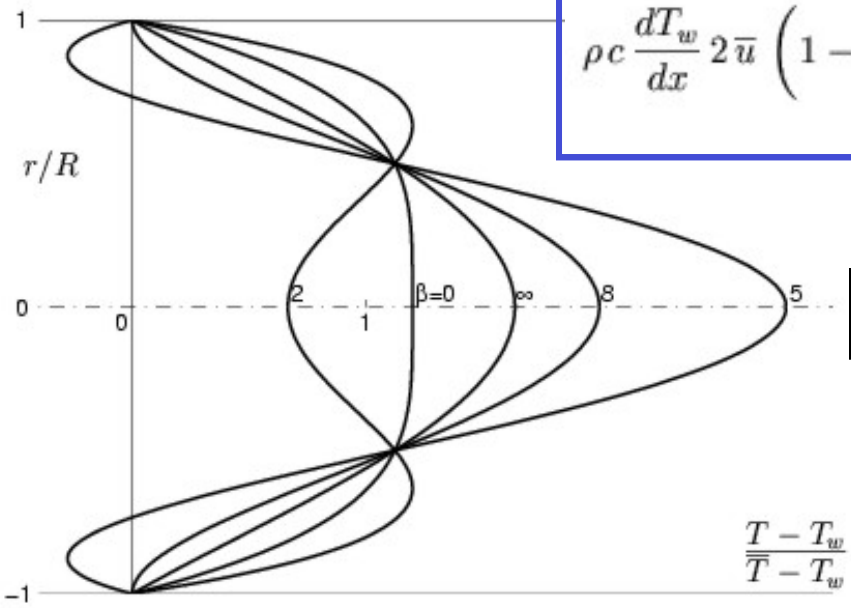
β négatif

$$\frac{T-T_w}{\overline{T}-T_w}=\frac{9}{8} \qquad \text{en} \qquad \frac{r}{R}=\frac{1}{2}\,.$$

$$T-T_w = \frac{\mu\overline{u}^2}{k}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^4\right) - \frac{1}{8}\frac{\rho c}{k}\frac{dT_w}{dx}\,\overline{u}\,R^2\left(3-4\left(\frac{r}{R}\right)^2+\left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$

Transfert thermique établi avec une température de paroi linéaire

$$\rho c \frac{dT_w}{dx} 2\overline{u} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) = k \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{d}{dr}(T - T_w)\right) + 16\,\mu \frac{\overline{u}^2}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^2$$



β positif

$$\frac{T - T_w}{\overline{T} - T_w} = \frac{9}{8} \quad \text{en} \quad \frac{r}{R} = \frac{1}{2}\,.$$

$$T - T_w = \frac{\mu \overline{u}^2}{k}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right) - \frac{1}{8}\frac{\rho c}{k}\frac{dT_w}{dx}\overline{u} R^2 \left(3 - 4\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$