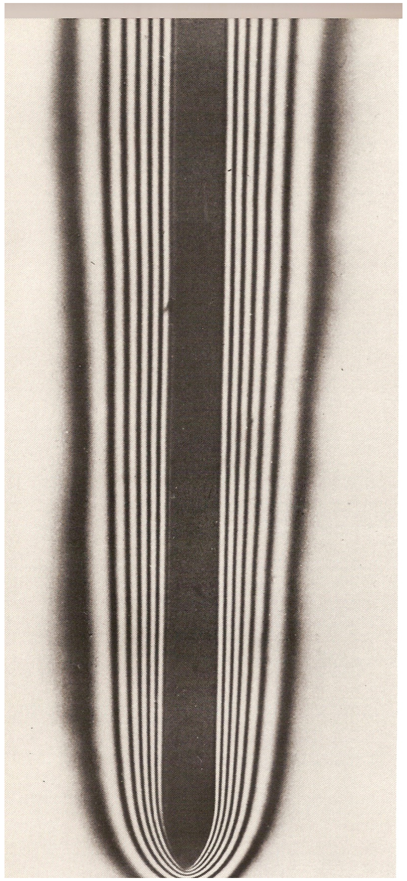
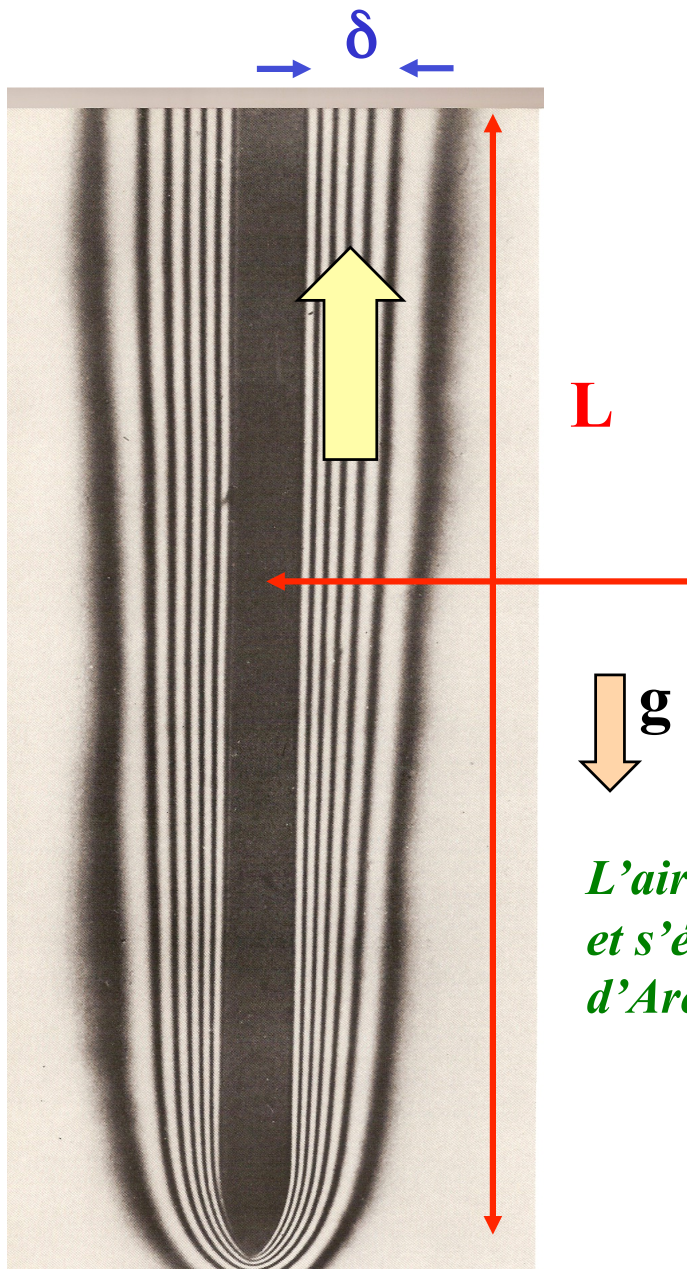
Ecoulements avec deux échelles spatiales (suite)



Convection naturelle le long d'une plaque verticale : écoulement laminaire permanent

Lubrification et convoyage hydraulique : butée Michell



Convection naturelle le long d'une plaque suspendue dans l'air

Plaque chaude

L'air chaud près de la plaque devient plus léger et s'élève <u>naturellement</u> sous l'effet de la force d'Archimède (flottabilité)(buoyancy)

La photo a été dilatée d'un facteur six dans le long de l'axe horizontal ! (Gebhart, University of Pennsylvania)

Le fluide se dilate (un peu) sous l'effet de la chaleur…

Coefficient de dilatation thermique

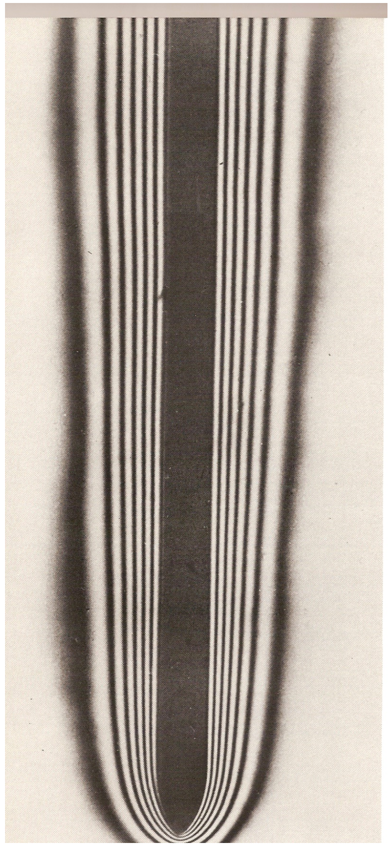
$$\boxed{\beta \triangleq -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}}$$

$$\rho(p,T) = \rho_0(1 - \underbrace{\beta(T - T_0)}_{\ll 1} + \ldots)$$

Où faut-il vraiment tenir compte de cette petite variation de densité ?

La pression est globalement hydrostatique*

$$p(x,y) \simeq p_0(y) = -\rho_0 g y$$



ρ_0

$\mathbf{g}$

****En toute rigueur, il s’agit d’un résultat qu’on pourrait déduire mathématiquement des équations, mais pour se faciliter la vie, nous allons supposer qu’il s’agit simplement d’une <u>approximation</u> simplificatrice !***

$$\rho_0(1-\underbrace{\beta(T-T_0)}_{\ll 1})\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right) \;=\; \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial y}}_{\rho_0 g}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-\rho_0(1-\beta(T-T_0))g$$

$$\rho_0\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right) \;=\; \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\rho_0\beta(T-T_0)g$$

Approximation de Boussinesq

On néglige les variations de masse volumique dans tous les termes sauf dans la poussée d'Archimède…

**** Au passage, on observe que cette hypothèse n'a vraiment du sens que dans le cas où la pression est hydrostatique … En d'autres mots, on introduit soit l'approximation hydrostatique, soit l'approximation de Boussinesq, mais on doit introduire en tous cas une approximation :-)***

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \boxed{+ \beta(T - T_0)g}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

La présence de température dans le terme d'Archimède couple ici le problème de l'écoulement et le problème thermique !

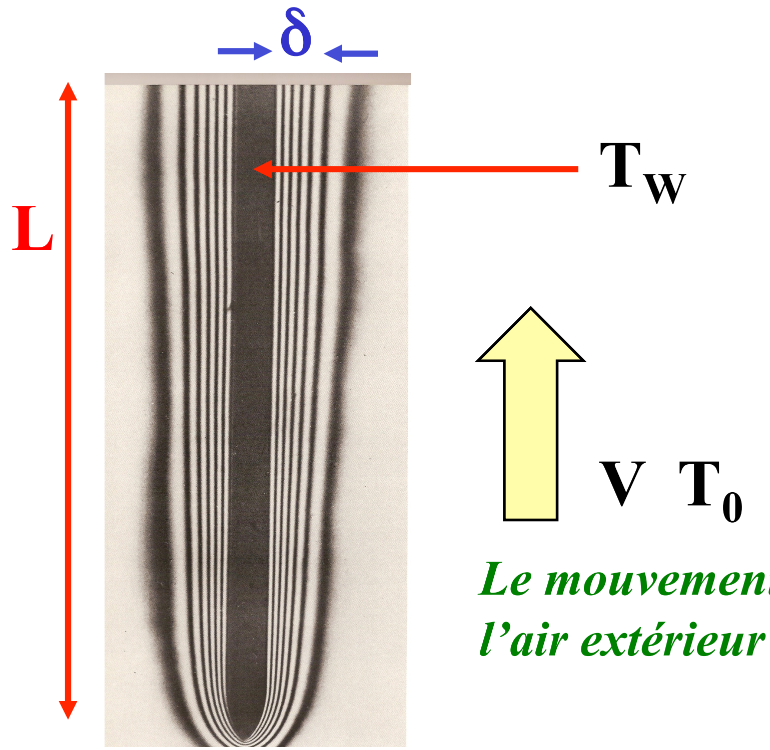
Equations de Navier-Stokes avec l'hypothèse de Boussinesq

Valentin-Joseph Boussinesq

né à Saint-André-de-Sangonis (Hérault) le 13 mars 1842, mort le 19 février 1929 à Paris

"Il faut savoir que dans la plupart des mouvements provoqués par la chaleur sur nos fluides pesants, les volumes ou les densités se conservent à très peu près, quoique la variation correspondante du poids de l'unité de volume soit justement la cause des phénomènes qu'il s'agit d'analyser. De là résulte la possibilité de négliger les variations de la densité, là où elles ne sont pas multipliées par la gravité g, tout en conservant, dans les calculs, leur produit par celle-ci"

Mais, tout d'abord, un peu de convection forcée



Le mouvement vertical de l'air extérieur est forcé

Problème de l'écoulement

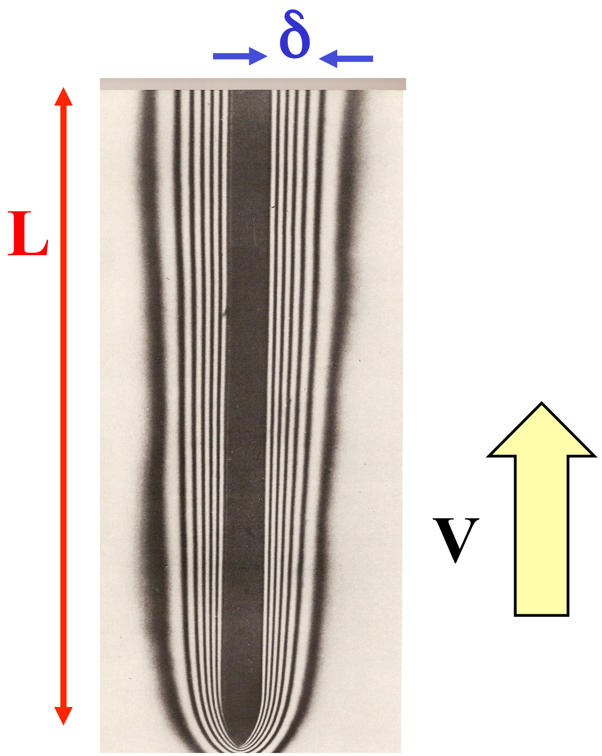
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g},$$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu\, \mathbf{d} : \mathbf{d} + r + \nabla \cdot (k \nabla T).$$

Problème thermique

Plus facile car, il est ici possible de découpler le problème de l'écoulement et le problème thermique !



-i- problème de l'écoulement

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\, u\, \frac{\partial u}{\partial x} + \rho\, v\, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho\, u\, \frac{\partial v}{\partial x} + \rho\, v\, \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu\, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

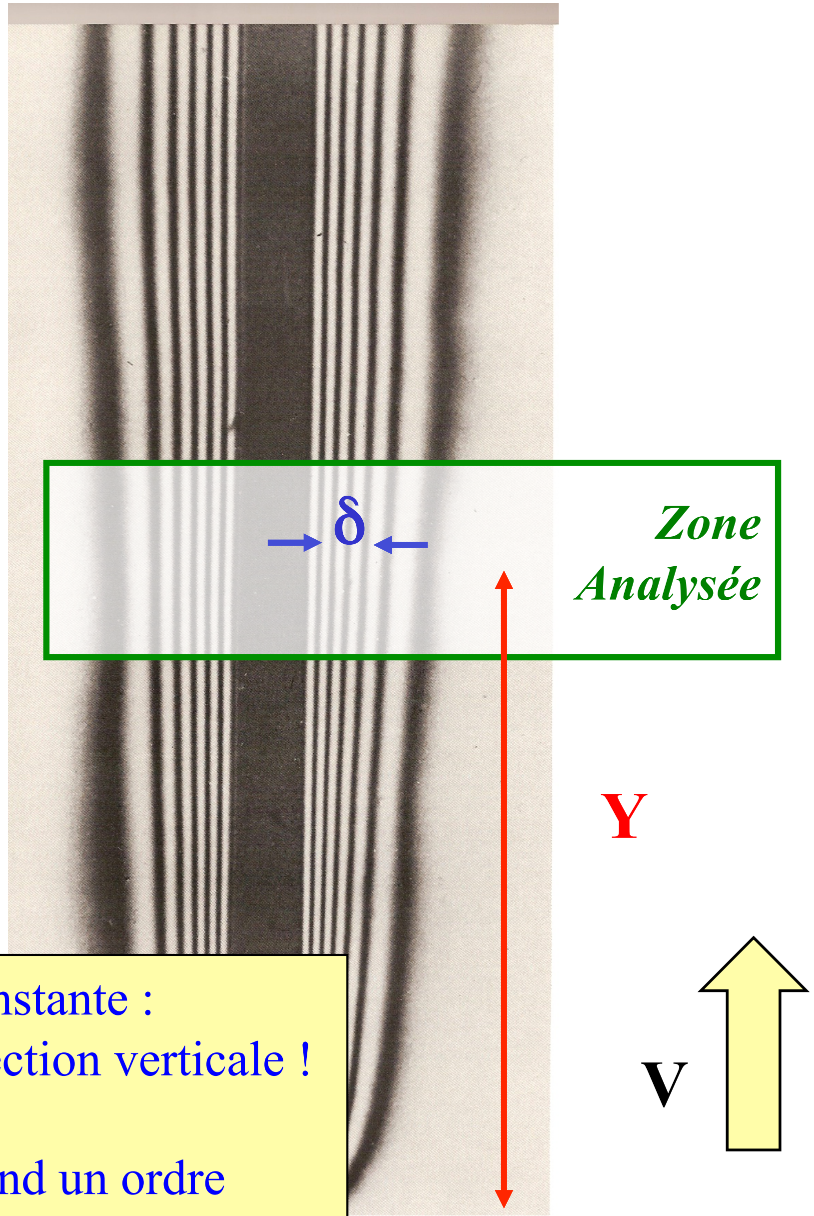
Près de la plaque, les effets visqueux sont dominants…
C'est la zone dite de couche limite de vitesse
Loin de la plaque, les effets visqueux sont supposés négligeables.

On définit l'épaisseur de la couche limite comme le lieu géométrique où les effets d'inertie et les effets visqueux sont du même ordre de grandeur.

Théorie de la couche limite

$$\boxed{\delta \ll Y}$$

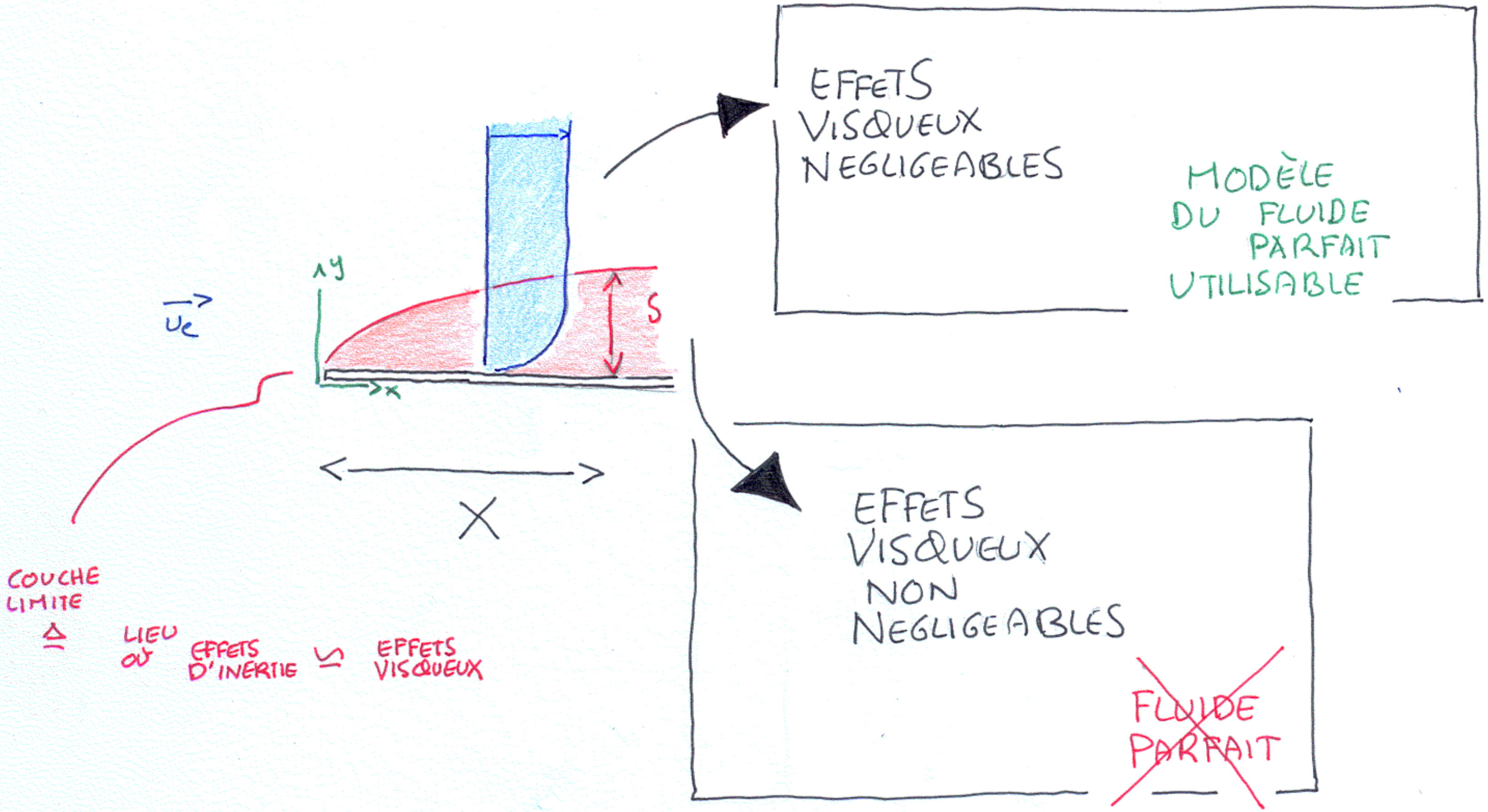
Hypothèse géométrique de base
Pas satisfaite au bord d'attaque !!



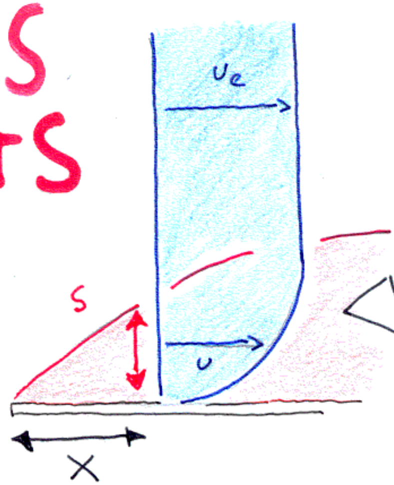
L'épaisseur de la couche limite n'est pas une constante :
elle augmente de manière monotone dans la direction verticale !

Mais, on se place dans une zone locale et on prend un ordre degrandeur constant pour notre analyse mathématique.

COUCHES LIMITES LAMINAIRES



2 MODÈLES DISTINCTS



EULER

+ HYPOTHESE

U_e INDEPENDANT DE δ

ECOULEMENT
IRROTATIONNEL
INCOMPRESSIBLE
2D STATIONNAIRE

$$\frac{dp_e}{dx} + \rho U_e \frac{dU_e}{dx} = 0$$

2 ÉCHELLES

ECOULEMENT
INCOMPRESSIBLE
2D STATIONNAIRE

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

+ HYPOTHESES

ρ, μ CONSTANTS

$\delta \ll X$

PRANDTL

$$\delta \ll Y$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\rho\, u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho\, v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
\rho\, u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho\, v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

Longueur verticale caractéristique : Y
Longueur horizontale caractéristique : δ
Vitesse verticale caractéristique : V

Comment choisir une vitesse horizontale caractéristique ?

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\mathcal{O}(U/\delta)} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\mathcal{O}(V/Y)} = 0$$

Il ne faut pas définir de vitesse caractéristique horizontale !

$$\boxed{U = \frac{V\delta}{Y} \ll V}$$

$$\underbrace{\boxed{\rho\, u\,\frac{\partial v}{\partial x}}}_{\mathcal{O}(\rho U V/\delta)}^{\mathcal{O}(\rho V^2/Y)} + \overbrace{\boxed{\rho\, v\,\frac{\partial v}{\partial y}}}^{\mathcal{O}(\rho V^2/Y)} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \boxed{\mu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \boxed{\cancel{\mu\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}}$$

$$\mathcal{O}(\mu V/\delta^2) \gg \mathcal{O}(\mu V/Y^2)$$

Lieu où l'ordre des effets visqueux et les effets d'inertie sont identiques

$$\frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho V^2/Y}{\mu V/\delta^2} = \underbrace{\frac{\rho V Y}{\mu}}_{Re_Y}\,\frac{\delta^2}{Y^2} = 1$$

Que vaut δ ?

$$\frac{\delta}{Y} = \sqrt{\frac{1}{Re_Y}}$$

$$\underbrace{\boxed{\rho\, u\,\frac{\partial u}{\partial x}}}_{}^{\mathcal{O}(\rho V^2\delta/Y^2)} + \overbrace{\boxed{\rho\, v\,\frac{\partial u}{\partial y}}}^{\mathcal{O}(\rho V^2\delta/Y^2)} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \boxed{\mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \boxed{\cancel{\mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}}$$

$$\mathcal{O}(\mu V/Y\delta) \gg \mathcal{O}(\mu V\delta/Y^3)$$

On obtient la même définition :-)

$$\frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho V^2/Y}{\mu V/\delta^2} = \underbrace{\frac{\rho V Y}{\mu}}_{Re_Y}\,\frac{\delta^2}{Y^2} = 1$$

Et l'autre équation ?

$$\frac{\delta}{Y} = \sqrt{\frac{1}{Re_Y}}$$

Et la pression ?

Sur la couche limite…

$$\boxed{\rho\, u\, \frac{\partial u}{\partial x}} + \boxed{\rho\, v\, \frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \boxed{\mu\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \boxed{\cancel{\mu\, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}}$$

$$\mathcal{O}(\rho V^2 \delta / Y^2)$$

Dans la couche limite…

$$p(x,y) - p_0 = \boxed{p(\delta, y) - p_0} + \boxed{\cancel{(x-\delta) \frac{\partial p}{\partial x}}\Big|_{x=\delta}}$$

$$\mathcal{O}(\rho V^2) \gg \mathcal{O}(\rho V \delta^2 / Y^2)$$

$$\mathcal{O}(\rho V^2 / Y)$$

A l'extérieur de la couche limite…

$$\boxed{\rho\, u\, \frac{\partial v}{\partial x}} + \boxed{\rho\, v\, \frac{\partial v}{\partial y}} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \boxed{\cancel{\mu\, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}} + \boxed{\cancel{\mu\, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}}$$

Equations de Prandtl (1904)

Equations simplifiées valables au sein de la couche limite

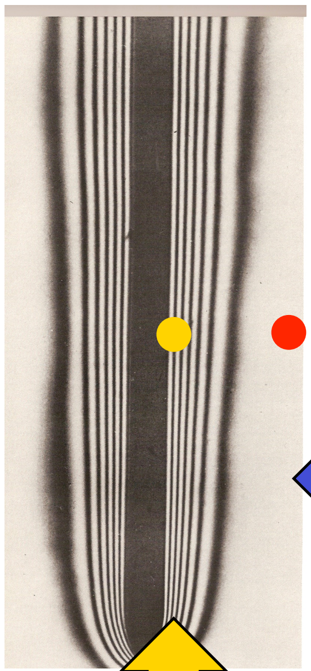
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\, u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho\, v \frac{\partial v}{\partial y} = \cancel{-\frac{dp}{dy}} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Couche limite visqueuse mince

$$\delta \ll Y$$

Pas de gradient de pression si l'écoulement extérieur est uniforme (ce n'est pas indispensable !)



$$\frac{\delta}{\boxed{\zeta}} = \frac{\boxed{\zeta}}{Y} = \frac{1}{Re^{1/4}}$$

Euler $\quad \dfrac{dp_e}{dy} = \rho v_e \dfrac{dv_e}{dy}$

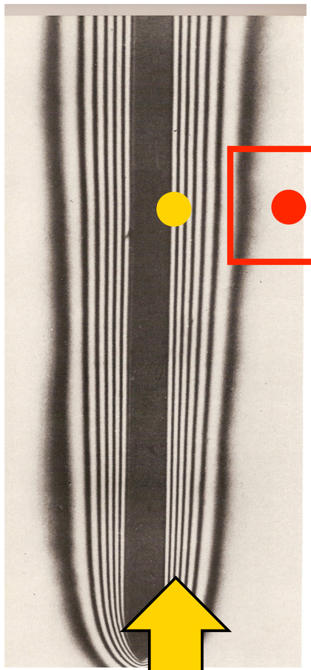
$$\boxed{x'_{Euler} = \frac{x}{Y}}$$

Prandtl

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho\, u \dfrac{\partial v}{\partial x} + \rho\, v \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \mu \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ 0 = \dfrac{\partial p}{\partial x} \end{cases}$$

$$\boxed{x'_{Prandtl} = \frac{x}{\delta}}$$

Deux mondes distincts à raccorder !



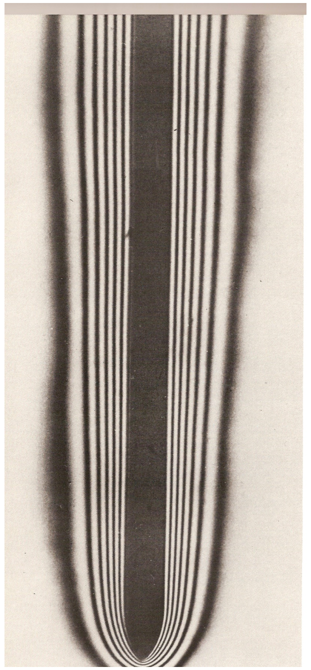
Euler

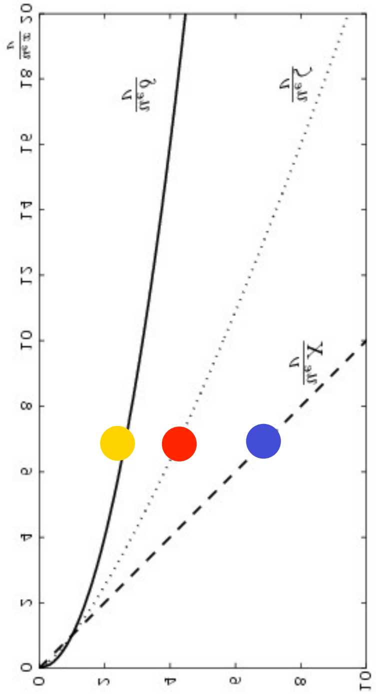
On effectue le raccord en ζ

$$
\boxed{\begin{array}{l} \lim_{x/\delta\to\infty} v(\frac{x}{\delta}, y) \\[2em] \lim_{x/\delta\to\infty} p(\frac{x}{\delta}, y) \end{array}}
\begin{array}{c} = \\[2em] = \end{array}
\boxed{\begin{array}{rcl} \lim_{x/Y\to 0} v_e(\frac{x}{Y}, y) & = & v_e(0, y) \\[2em] \lim_{x/Y\to 0} p_e(\frac{x}{Y}, y) & = & p_e(0, y) \end{array}}
$$

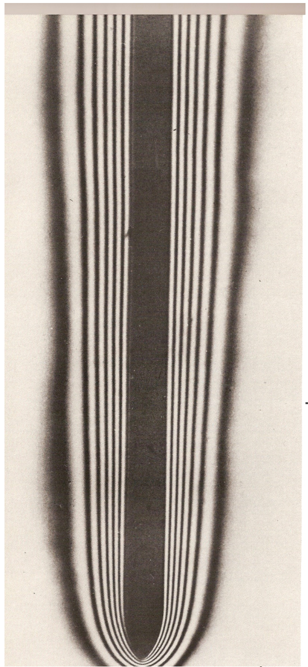
Prandtl

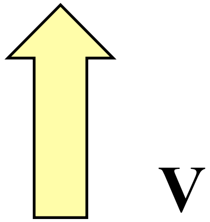
$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} & = & 0 \\[1em]
\rho\, u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho\, v \frac{\partial v}{\partial y} & = & -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\[1em]
0 & = & \frac{\partial p}{\partial x}
\end{array}
\right.
$$



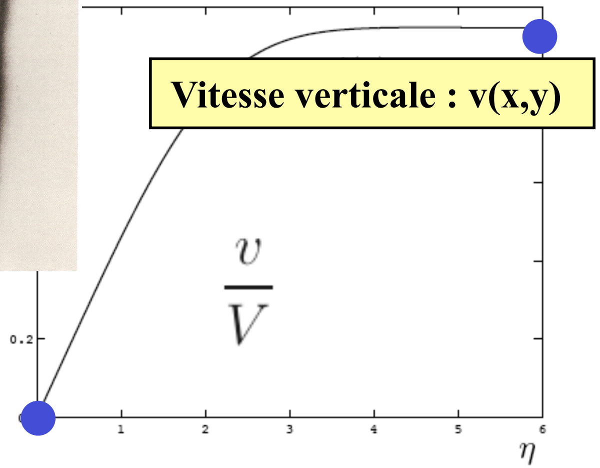


Grandeurs
caractéristiques
le long de la plaque…

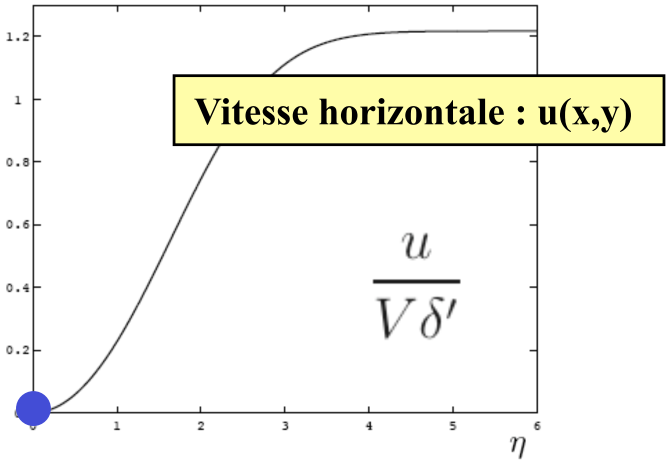




Solution de similitude de Blasius



$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} &= \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$



$$
\eta(x,y) = \frac{x}{\delta(y)} = \frac{x}{\sqrt{\dfrac{2\nu y}{V}}}
$$

PROBLEME DE BLASIUS

COUCHE LIMITE DE VITESSE

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$y = 0 \quad u = v = 0$

$y \to \infty \quad u \to U_e$

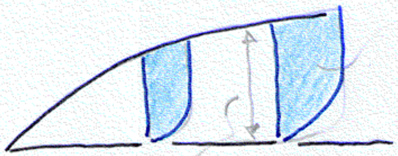
$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

$y = 0 \quad T = T_w$

$y \to \infty \quad T \to T_e$

COUCHE LIMITE THERMIQUE

SOLUTION DE LA COUCHE LIMITE DE VITESSE



$$u = u_e \, g(\eta)$$

IDEE 1

$$\eta = \underbrace{\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x \, 2}{u_e}}}}_{S(x)}$$

VARIABLE DE SIMILITUDE

POUR "SIMPLIFIER" L'ALGEBRE !

IDEE 2

$$\psi(x,y) = u_e \, S(x) \, f(\eta(x,y))$$

$$u = u_e \, f'(\eta)$$

$$v = u_e \, S'(x) \left(\eta f'(\eta) - f(\eta) \right)$$

$$f'' f + f''' = 0$$

$\eta = 0$ $\quad f = f' = 0$

$\eta \to \infty$ $\quad f' \to 1$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e\, S(x)\, \frac{df}{d\eta}\, \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{\frac{1}{S(x)}}$$

$$\boxed{u = u_e\, f'(\eta)}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left(u_e\, S'(x)\, f + u_e\, S(x)\, \frac{df}{d\eta}\, \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{= -y \frac{S'(x)}{S^2(x)} = -\eta \frac{S'(x)}{S(x)}} \right)$$

$$\boxed{v = u_e\, S'(x) \left(\eta\, f'(\eta) - f(\eta) \right)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -u_e\, f''\, \eta\, \frac{S'}{S}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_e\, f''\, \frac{1}{S} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_e\, f'''\, \frac{1}{S^2}$$

$u_e = cst \rightsquigarrow p_e = cst$

CAR LA COUCHE LIMITE N'INFLUENCE PAS LA VITESSE HORS DE CELLE-CI !

$$\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}} + \underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}} = \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

$$\cancel{-u_e^2 f' f'' \eta \frac{\delta'}{\delta}} \qquad \cancel{u_e^2 \frac{\delta'}{\delta} \eta f' f''} \underbrace{- u_e^2 f f'' \frac{\delta'}{\delta}} \qquad \underbrace{\nu\, u_e f''' \frac{1}{\delta^2}}$$

$$-u_e^2 \sqrt{\frac{u_e}{2\nu x}} \sqrt{\frac{2\nu}{u_e}} \, \frac{1}{2} \, \frac{1}{\sqrt{x}} f f'' \qquad \nu\, u_e \frac{u_e}{2\nu x} f'''$$

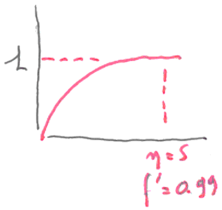
RESOLUTION NUMERIQUE

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{u_e^2}{2x} f f'' + \dfrac{u_e^2}{2x} f''' = 0 \\ \eta = 0 \qquad f = f' = 0 \\ \eta \to \infty \qquad f' \to 1 \end{array}}$$

RUNGE KUTTA
+ METHODE DU TIR

$$\begin{cases} f' = g \\ g' = h \\ h' = -fh \end{cases}$$

$\hookrightarrow f'' = 0.4696$



$$\delta(x) \simeq 5\sqrt{\frac{\nu x}{u_e}}$$

FROTTEMENT A LA PAROI ?

$$D = \int_0^X \tau_w \, dx$$

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \mu \, u_e \underbrace{f''|_{\eta=0}}_{0.4696} \underbrace{\frac{1}{\delta}}_{\sqrt{\frac{u_e}{2\nu x}}} = 0.332 \sqrt{\frac{\mu \rho u_e^3}{x}} = 0.664 \, \rho \frac{u_e^2}{2} \sqrt{\frac{\nu}{u_e x}}$$

$$= 0.332 \sqrt{\mu \rho u_e^3} \underbrace{\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{x}}}_{2\sqrt{X}}$$

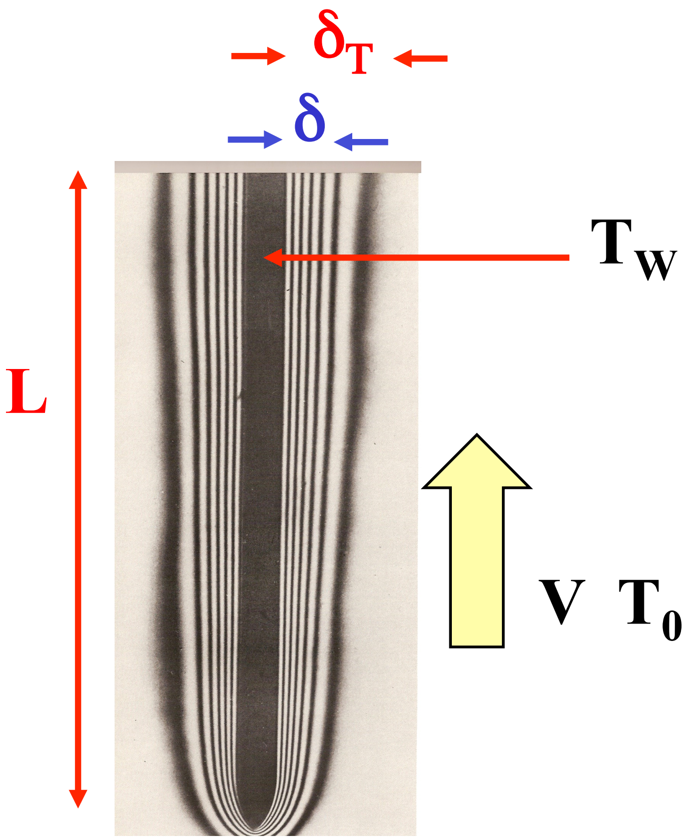
$$= 0.664 \sqrt{\mu \rho U_e^3 X} = 1.328 \, \frac{\rho u_e^2 X}{2} \sqrt{\frac{\nu}{u_e X}}$$

$$C_f = \frac{\tau_w|_{x=X}}{\rho u_e^2/2} = 0.664 \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

$$C_{f,m} = \frac{D}{\rho u_e^2 X/2} = 1.328 \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

COEFFICIENTS DE FROTTEMENT LOCAL ET GLOBAL

-ii- problème thermique



$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned}} \qquad \delta \ll Y$$

$$\boxed{u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \qquad \delta_T \ll Y$$

Près de la plaque, les effets conductifs sont dominants…
C'est la zone dite de <u>couche limite thermique</u>
Loin de la plaque, la conduction est négligeable

On définit l'épaisseur thermique comme le lieu géométrique où la conduction et la convection sont du même ordre de grandeur.