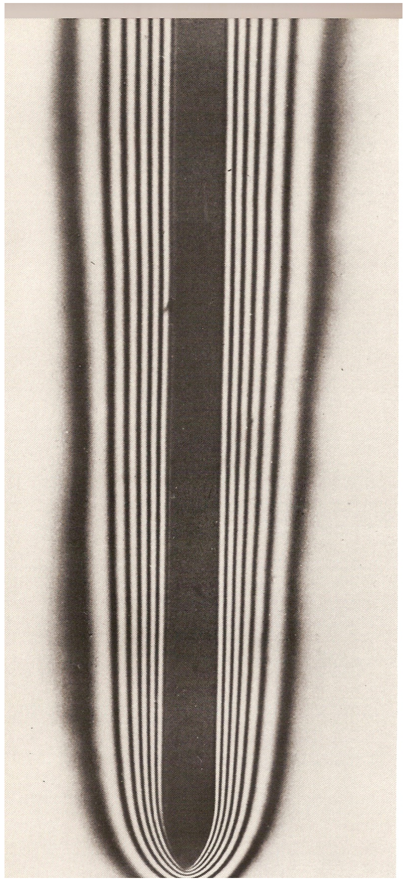
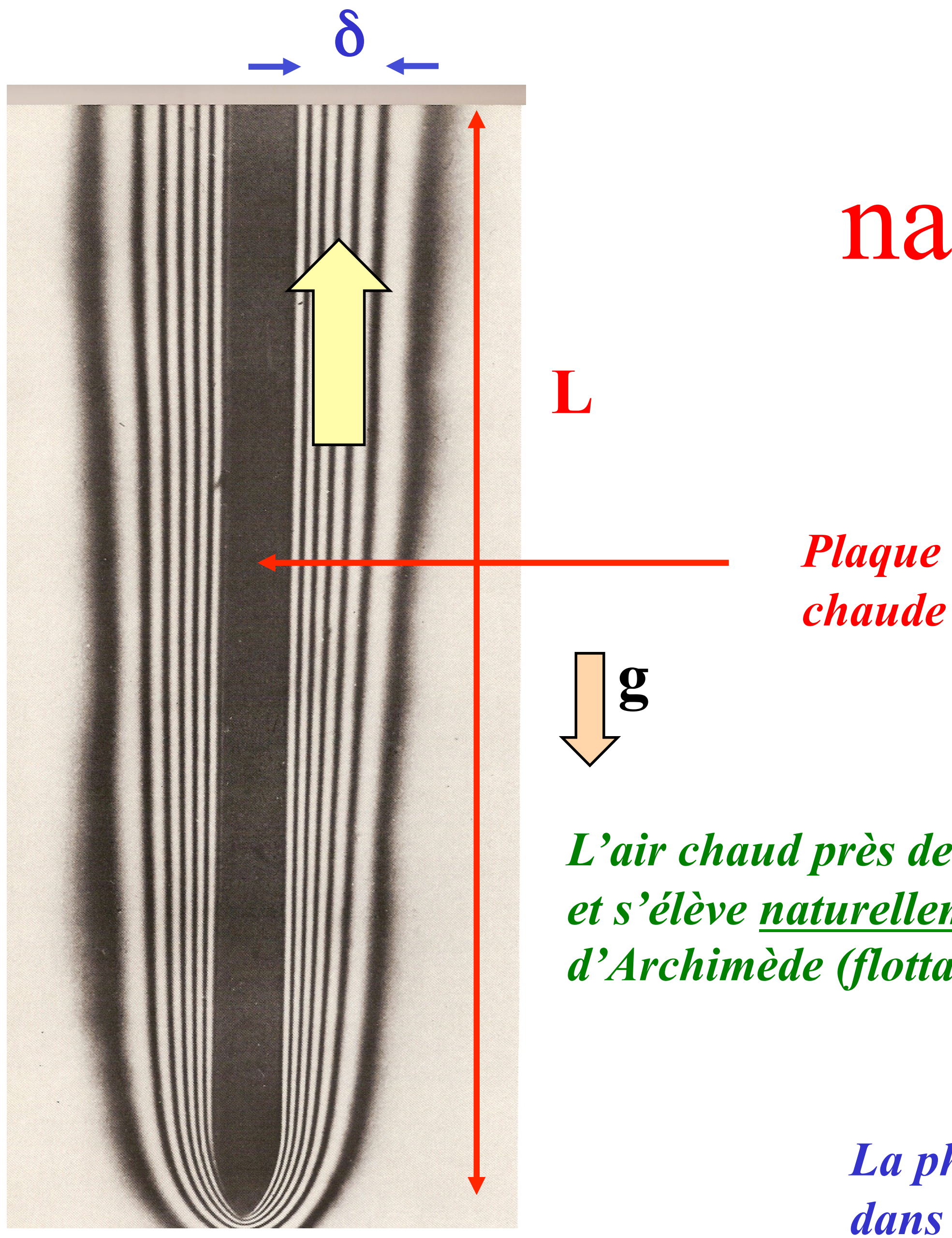
Ecoulements avec deux échelles spatiales (fin)



Convection naturelle le long d'une plaque verticale : écoulement laminaire permanent

Lubrification et convoyage hydraulique : butée Michell

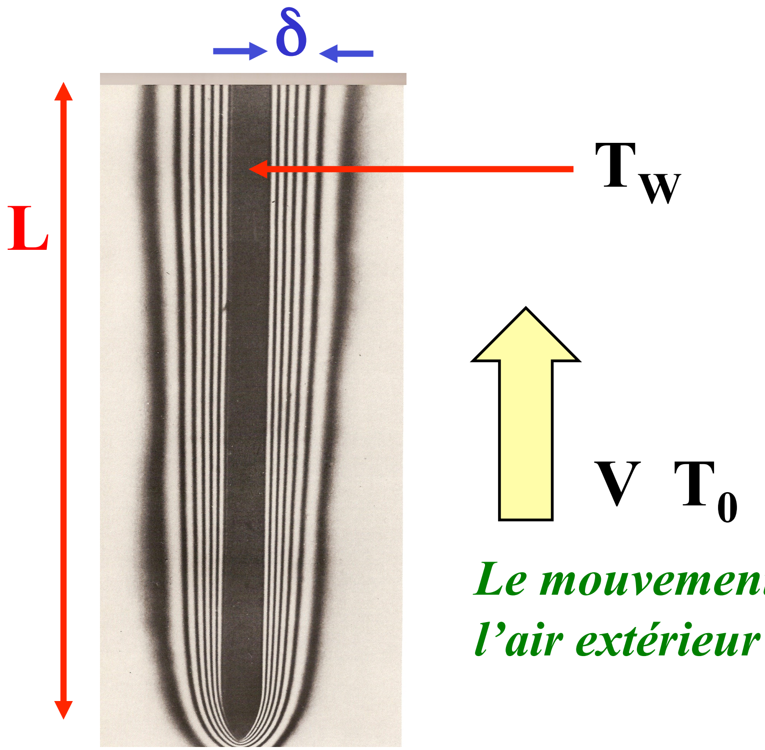
Convection naturelle le long d'une plaque suspendue dans l'air



L'air chaud près de la plaque devient plus léger et s'élève <u>naturellement</u> sous l'effet de la force d'Archimède (flottabilité)(buoyancy)

La photo a été dilatée d'un facteur six dans le long de l'axe horizontal !
(Gebhart, University of Pennsylvania)

Mais, tout d’abord, un peu de convection forcée



Le mouvement vertical de l’air extérieur est forcé

Problème de l’écoulement

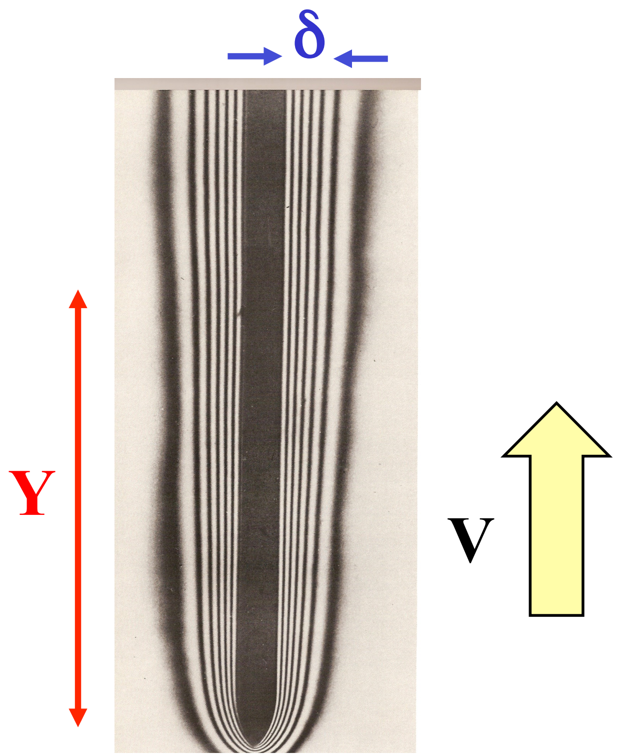
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g},$$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu \, \mathbf{d} : \mathbf{d} + r + \nabla \cdot (k \nabla T).$$

Problème thermique

Plus facile car, il est ici possible de découpler le problème de l’écoulement et le problème thermique !

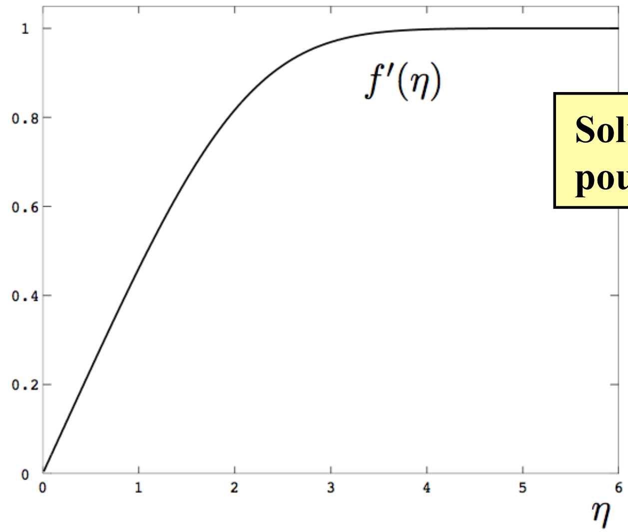


-i- problème de l'écoulement

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

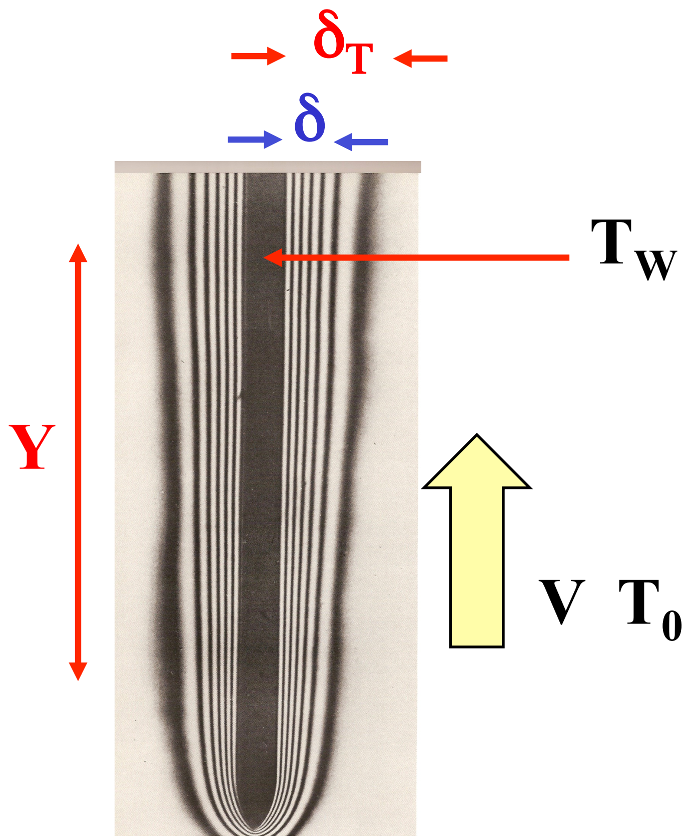
$$\delta \ll Y$$



Solution de similitude analytique de Blasius pour un écoulement externe uniforme

$$\eta(x,y) = \frac{x}{\delta(y)} = \frac{x}{\sqrt{\dfrac{2\nu y}{V}}}$$

-ii- problème thermique



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\delta \ll Y$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\delta_T \ll Y$$

Près de la plaque, les effets conductifs sont dominants…
C’est la zone dite de <u>couche limite thermique</u>
Loin de la plaque, la conduction est négligeable

On définit l’épaisseur thermique comme le lieu géométrique où la conduction et la convection sont du même ordre de grandeur.

$$\boxed{u\frac{\partial T}{\partial x}} + \boxed{v\frac{\partial T}{\partial y}} = \boxed{\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} + \boxed{\cancel{\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}}$$

Lieu où l'ordre de la convection et de la conduction sont identiques

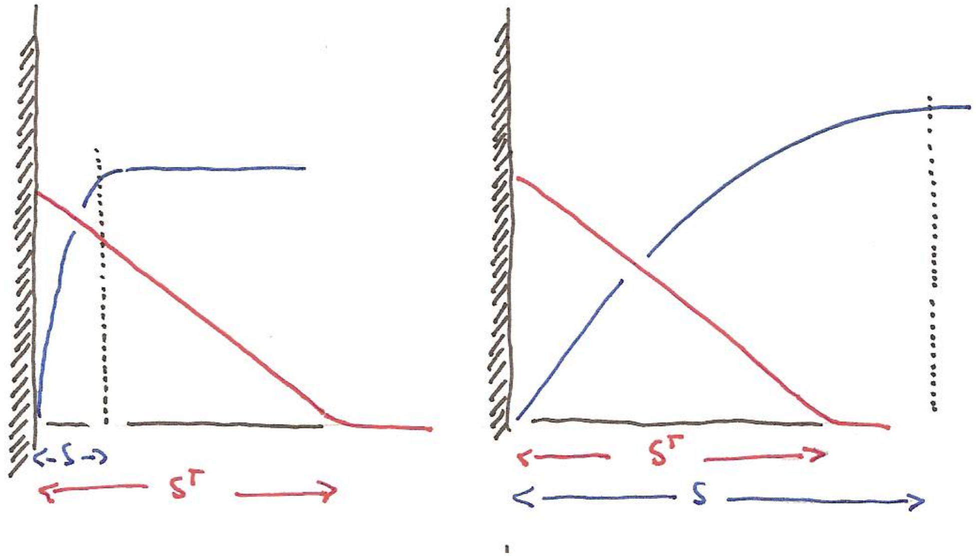
$$\frac{\boxed{\text{Convection}}}{\boxed{\text{Conduction}}} = \frac{V\Delta T/Y}{\alpha\Delta T/\delta_T^2} = \underbrace{\frac{VY}{\alpha}}_{Pe_Y}\frac{\delta_T^2}{Y^2} = 1$$

Et δ_T ?

$$\frac{\delta_T}{Y} = \sqrt{\frac{1}{Pe_Y}} = \sqrt{\frac{1}{Pr\,Re_Y}}$$

Epaisseurs de couches limites et le nombre de Prandtl

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \sqrt{\frac{1}{Pr}}$$



Métaux liquides	Pr << 1
Gaz	Pr = 0.7
Eau	Pr = 2… 7
Huiles	Pr >> 1

Attention : Prantl est une fonction de la température (davantage pour les liquides que pour les gaz) !

Soyons un peu plus général : et la dissipation visqueuse ?

Problème de l'écoulement

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Problème thermique

Eckert : dissipation visqueuse ?

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \boxed{\frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} + \boxed{\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

Dissipation visqueuse $\mathcal{O}(\frac{\nu V^2}{c\delta^2})$

$\mathcal{O}(\frac{\alpha \Delta T}{\delta_T^2})$ ***Conduction***

$$\frac{\blacksquare}{\blacksquare} = \frac{\nu V^2}{\alpha c \Delta T}\underbrace{\left(\frac{\delta_T}{\delta}\right)^2}_{Pr^{-1}} = \frac{V^2}{c\Delta T} = Ec$$

Nombre d'Eckert

$$Ec = \frac{u_e^2}{c(T_w - T_e)}$$

Picture was taken on August 22, 2000

caractérise un écoulement d'un fluide !

$$\frac{\textbf{Energie cinétique}}{\textbf{Energie interne}}$$

$$Pr = 1 \qquad Ec \ll 1$$

$$Pr = 1 \qquad Ec \not\ll 1$$

Couches limites identiques

$$Pr \neq 1 \qquad Ec \ll 1$$

$$Pr \neq 1 \qquad Ec \not\ll 1$$

Dissipation visqueuse négligeable

Quatre cas possibles !

$$Pr = 1 \qquad Ec \ll 1$$

$$Pr = 1 \qquad Ec \not\ll 1$$

$$Pr \neq 1 \qquad Ec \ll 1$$

$$Pr \neq 1 \qquad Ec \not\ll 1$$

$$u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \nu\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Les équations d'énergie et de quantité de mouvement expriment les mêmes opérateurs différentiels pour la température et la vitesse verticale !

$$\boxed{\begin{aligned} Pr &= 1 \\ Ec &\ll 1 \end{aligned}}$$

$$T = Av + B$$

Si, si, c'est aussi simple !

$$\begin{array}{ll} Pr & = 1 \\ Ec & \ll 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Pr & = 1 \\ Ec & \not\ll 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Pr & \neq 1 \\ Ec & \ll 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Pr & \neq 1 \\ Ec & \not\ll 1 \end{array}$$

$$u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_w}{T_e - T_w}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} Pr & \neq 1 \\ Ec & \ll 1 \end{array}}$$

On procède comme pour Blasius !

$$Pr\ f\theta' + \theta'' = 0$$

Solution de similitude

$Pr = 1$ $Ec \ll 1$	$Pr = 1$ $Ec \not\ll 1$
$Pr \neq 1$ $Ec \ll 1$	$Pr \neq 1$ $Ec \not\ll 1$

Relation de Crocco

$$cT + \frac{v^2}{2} = Av + B$$

$$\begin{aligned} Pr &= 1 \\ Ec &\not\ll 1 \end{aligned}$$

On a les mêmes opérateurs différentiels pour l'énergie interne totale et la vitesse verticale !

$$v\left[u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right] = v\left[\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]$$

$$c\left[u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right] = c\left[\frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \nu\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]$$

$$\begin{aligned} Pr &= 1 \\ Ec &\ll 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr &= 1 \\ Ec &\not\ll 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr &\neq 1 \\ Ec &\ll 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Pr &\neq 1 \\ Ec &\not\ll 1 \end{aligned}}$$

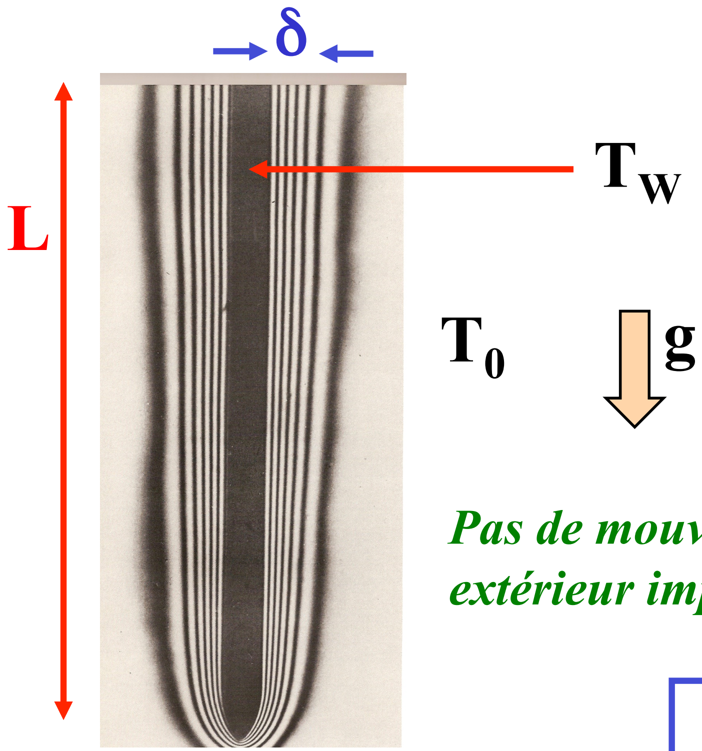
$$\boxed{\begin{aligned} Pr &\neq 1 \\ Ec &\not\ll 1 \end{aligned}}$$

Le cas le plus général
(et donc aussi le plus probable !)

$$u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Pas de solution analytique…



Pas de mouvement extérieur imposé

Reprenons le problème de convection naturelle

$$\delta \ll Y$$
$$\delta_T \ll Y$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} &= \beta g (T - T_0) + \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

Lieu où l'ordre de la convection et de la conduction sont identiques

$$\frac{\boxed{\text{Convection}}}{\boxed{\text{Conduction}}} = \frac{V\Delta T/Y}{\alpha \Delta T/\delta_T^2} = \underbrace{\frac{VY}{\alpha}}_{Pe_Y} \frac{\delta_T^2}{Y^2} = 1$$

Couche limite thermique, on connaît :-)

$$\frac{\delta_T}{Y} = \sqrt{\frac{1}{Pe_Y}} = \sqrt{\frac{1}{Pr\,Re_Y}}$$

Problème : on <u>ne connaît pas</u> V :-(

$$\delta \ll Y$$
$$\delta_T \ll Y$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} &= \beta g(T - T_0) + \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

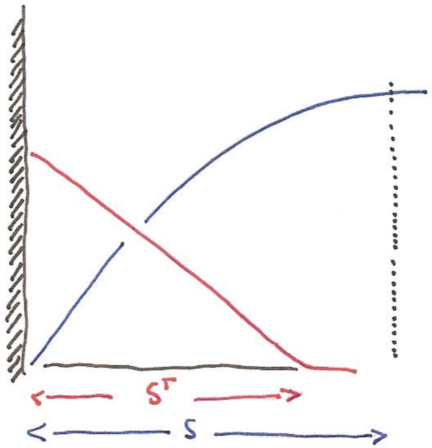
Longueur verticale caractéristique : Y
Longueur horizontale caractéristique : δ
Vitesse horizontale caractéristique : U = V δ / Y (incompressibilité :-)
Ecart de température caractéristique : $T_w - T_0$

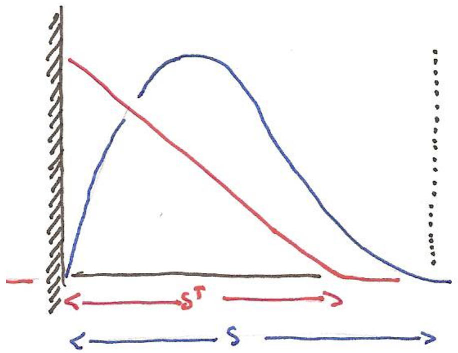
Donc, comment choisir la vitesse verticale caractéristique V ?

Buoyancy balanced by friction

$$\cancel{u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y}} = \boxed{\beta g (T - T_0)} + \boxed{\nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}$$

$$V = \frac{\beta g \Delta T \delta_T^2}{\nu}$$





$$\frac{\delta_T}{Y} = \sqrt{\frac{\alpha}{VY}} = \sqrt{\frac{\nu\ \alpha}{\beta g \Delta T\ Y \delta_T^2}} = (Gr)^{-1/4}\,(Pr)^{-1/4}$$

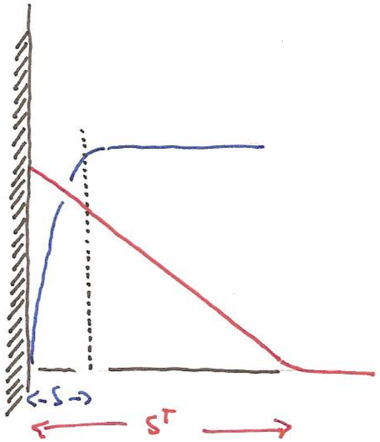
$$\frac{\delta}{Y} = (Gr)^{-1/4}\,(Pr)^{1/4}$$

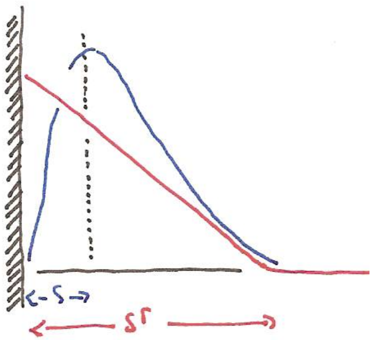
Buoyancy balanced by inertia

$$\boxed{u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}} = \boxed{\beta g (T - T_0)} + \nu \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$V = \sqrt{\beta g \Delta T \, Y}$$





$$\frac{\delta_T}{Y} = \sqrt{\frac{\alpha}{VY}} = \left(\frac{\alpha^2}{\beta g \Delta T \, Y^3}\right)^{1/4} = (Gr)^{-1/4}\,(Pr)^{-1/2}$$

$$\frac{\delta}{Y} = (Gr)^{-1/4}$$

Nombre de Grashof

$$Gr = \frac{\beta \Delta T g L^3}{\nu^2}$$

1822-1893, University of Karlsruhe, Germany
Professor of Mechanical Engineering

$$\frac{\text{(Forces d'inertie) (Forces d'Archimède)}}{\text{(Forces visqueuses)}^2}$$

Grashof - Reynolds

Forces visqueuses

$$\boxed{\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad \mathcal{O}(\rho U^2/L)} = \boxed{\rho\beta(T-T_0)g \quad \mathcal{O}(\rho\beta\Delta T g)} + \boxed{\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \quad \mathcal{O}(\mu U/L^2)}$$

Forces d'inertie

Forces d'Archimède

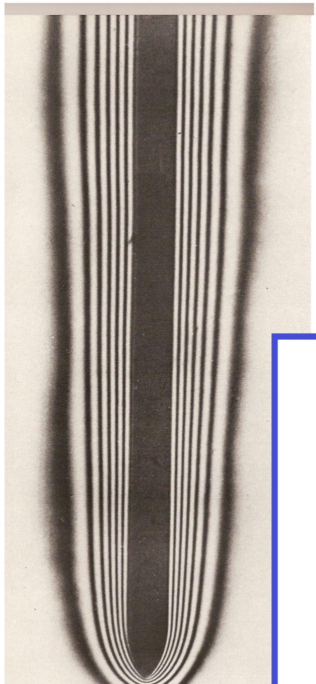
$$Re = \frac{\color{red}\blacksquare}{\color{green}\blacksquare} \qquad \frac{Gr}{Re} = \frac{\color{blue}\blacksquare}{\color{green}\blacksquare} \qquad \frac{Gr}{Re^2} = \frac{\color{blue}\blacksquare}{\color{red}\blacksquare}$$

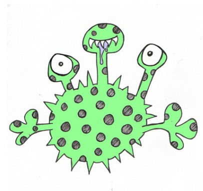
$$Gr = \frac{(\text{Forces d'Archimède})(\text{Forces d'inertie})}{(\text{Forces visqueuses})^2} = \frac{\beta\Delta T g L^3}{\nu^2}$$

Une solution approchée pour la convection naturelle…

$$v(x,y) = v_0(y)\,\frac{x}{\delta(y)}\left(1-\frac{x}{\delta(y)}\right)^2$$

$$\frac{T(x,y)-T_0}{T_w-T_0} = \left(1-\frac{x}{\delta(y)}\right)^2$$





On considère des profils semblables avec conditions de raccord très sommaires à la couche limite… mais cela va nous donner une idée des ordres de grandeurs

$$v(0,y) = 0 \qquad v(\delta,y) = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(\delta,y) = 0 \qquad \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,y) = -\rho\beta g(T_w-T_0)$$

$$T(0,y) = T_w \qquad T(\delta,y) = T_0 \qquad \frac{\partial T}{\partial x}(\delta,y) = 0$$

Il faut encore estimer $\delta_T(y)$!

$$\int_0^\delta u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}dx = \beta g \int_0^\delta (T(x,y)-T_0)\,dx + \nu\int_0^\delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx$$

$$[uv]_0^\delta - \int_0^\delta v\frac{\partial u}{\partial x}dx + \int_0^\delta v\frac{\partial v}{\partial y}dx = \beta g \int_0^\delta (T(x,y)-T_0)\,dx - \nu \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}$$

$$\boxed{\frac{d}{dy}\int_0^\delta v^2(x,y)dx = \beta g \int_0^\delta (T(x,y)-T_0)\,dx - \nu \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}}$$

$$\int_0^\delta u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}dx = \alpha\int_0^\delta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx$$

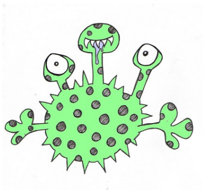
$$\boxed{\frac{d}{dy}\int_0^\delta v(x,y)T(x,y)dx = -\alpha \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}}$$

Intégrons les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie dans la couche limite en tirant profit de l'incompressibilité…

Que deviennent ces équations intégrales ?

$$\left\{\begin{array}{lcl}\displaystyle \frac{d}{dy}\int_0^{\delta} v^2 dx &=& \displaystyle \beta g \int_0^{\delta} (T - T_0)\, dx - \nu \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} \\[2ex] \displaystyle \frac{d}{dy}\int_0^{\delta} vT dx &=& \displaystyle -\alpha \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}\end{array}\right.$$

En intégrant les expressions approchées que nous avons introduites…



$$\left\{\begin{array}{lcl}\displaystyle \frac{1}{105}\,\frac{d}{dy}\left(v_0^2(y)\delta(y) \right) &=& \displaystyle \frac{\beta g\ \Delta T \delta(y)}{3} + \frac{\nu\ v_0(y)}{\delta(y)} \\[2ex] \displaystyle \frac{1}{30}\,\frac{d}{dy}\left(v_0(y)\delta(y) \right) &=& \displaystyle \frac{2\alpha}{\delta(y)}\end{array}\right.$$

On obtient finalement de deux équations différentielles ordinaires avec deux fonctions inconnues…

Résolution des équations intégrales

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{105}\frac{d}{dy}\Big(v_0^2(y)\delta(y)\Big) & = & \frac{\beta g\ \Delta T\delta(y)}{3} + \frac{\nu\ v_0(y)}{\delta(y)} \\ \frac{1}{30}\frac{d}{dy}\Big(v_0(y)\delta(y)\Big) & = & \frac{2\alpha}{\delta(y)} \end{array}\right.$$

Essayons une solution de la forme…

$$\begin{array}{rcl} v_0(y) & = & V\ y^m \\ \delta(y) & = & D\ y^n \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{105}V^2D(2m+n)\ y^{2m+n-1} & = & \frac{\beta g\ \Delta T\ D}{3}\ y^n + \frac{\nu\ V}{D}\ y^{m-n} \\ \frac{1}{30}VD(m+n)\ y^{m+n-1} & = & \frac{2\alpha}{D}\ y^{-n} \end{array}\right.$$

Et cela marche avec 2m = 1 et 4n = 1…

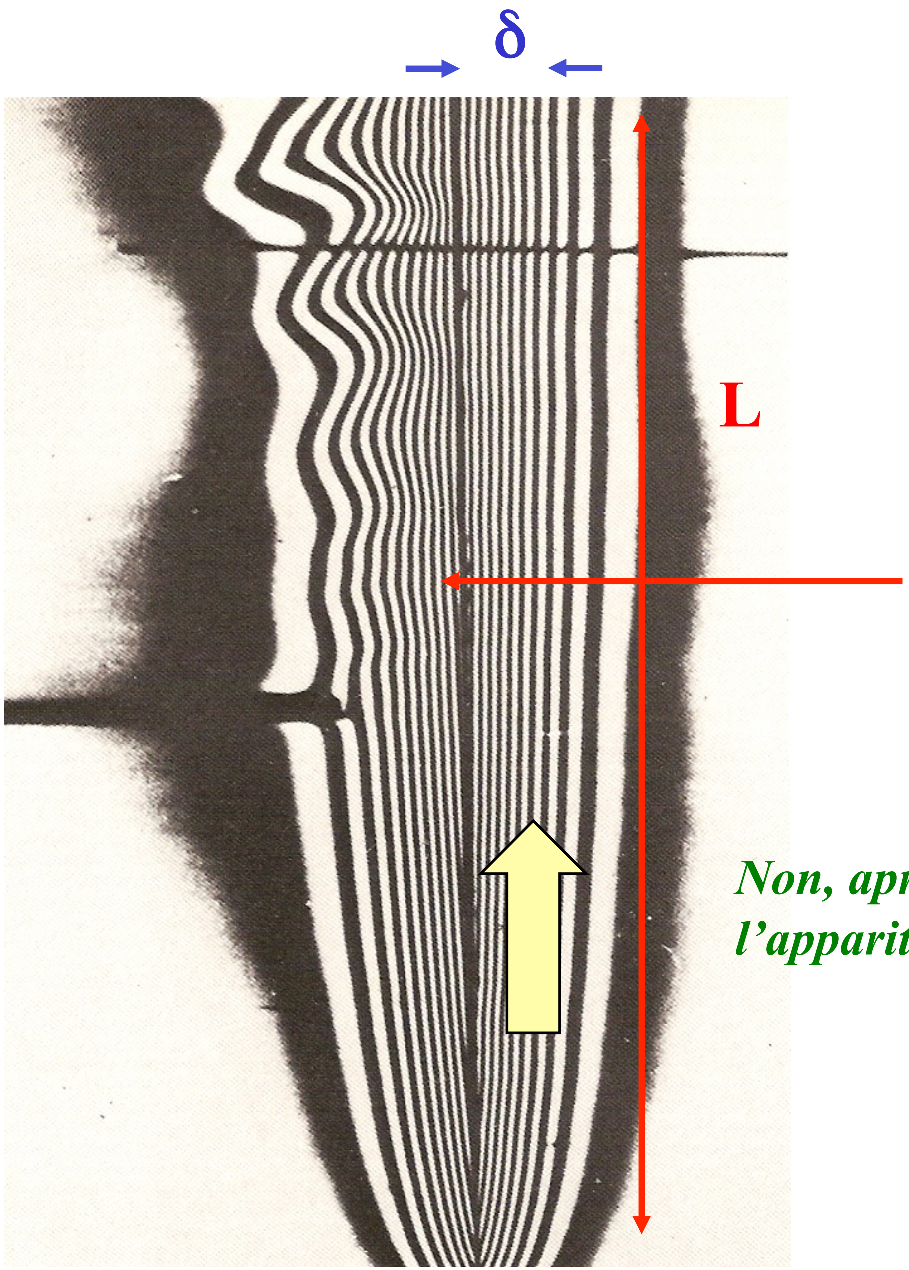
$$\begin{cases} \dfrac{V^2 D}{84} = \dfrac{\beta g\ \Delta T\ D}{3} + \dfrac{\nu\ V}{D} \\ \dfrac{V D}{40} = \dfrac{2\alpha}{D} \end{cases}$$

$$D^4 = 240 L^3 \left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha} \right) \frac{\nu^2}{\beta g \Delta T L^3} \frac{\alpha^2}{\nu^2}$$

Solution finale…

$$\frac{\delta_T(y)}{y} = 3,936\ \Big(Pr \Big)^{-1/2} \Big(Gr(y) \Big)^{-1/4} \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{1/4}$$

On peut ensuite calculer le profil de vitesse et de température, le transfert de chaleur et des nombres de Nusselt locaux et moyens.



Est-ce que cette solution est stable ?

Non, après une certaine distance, on constate l'apparition d'instabilités : c'est la <u>turbulence</u> !

Cela, c'est très très très très compliqué.