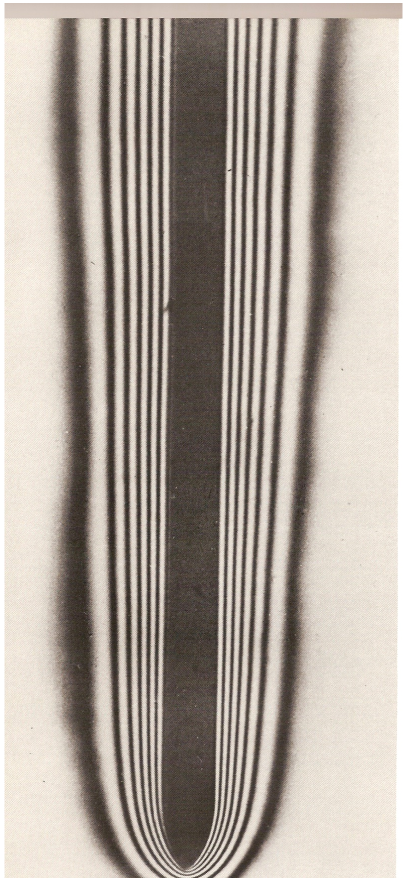
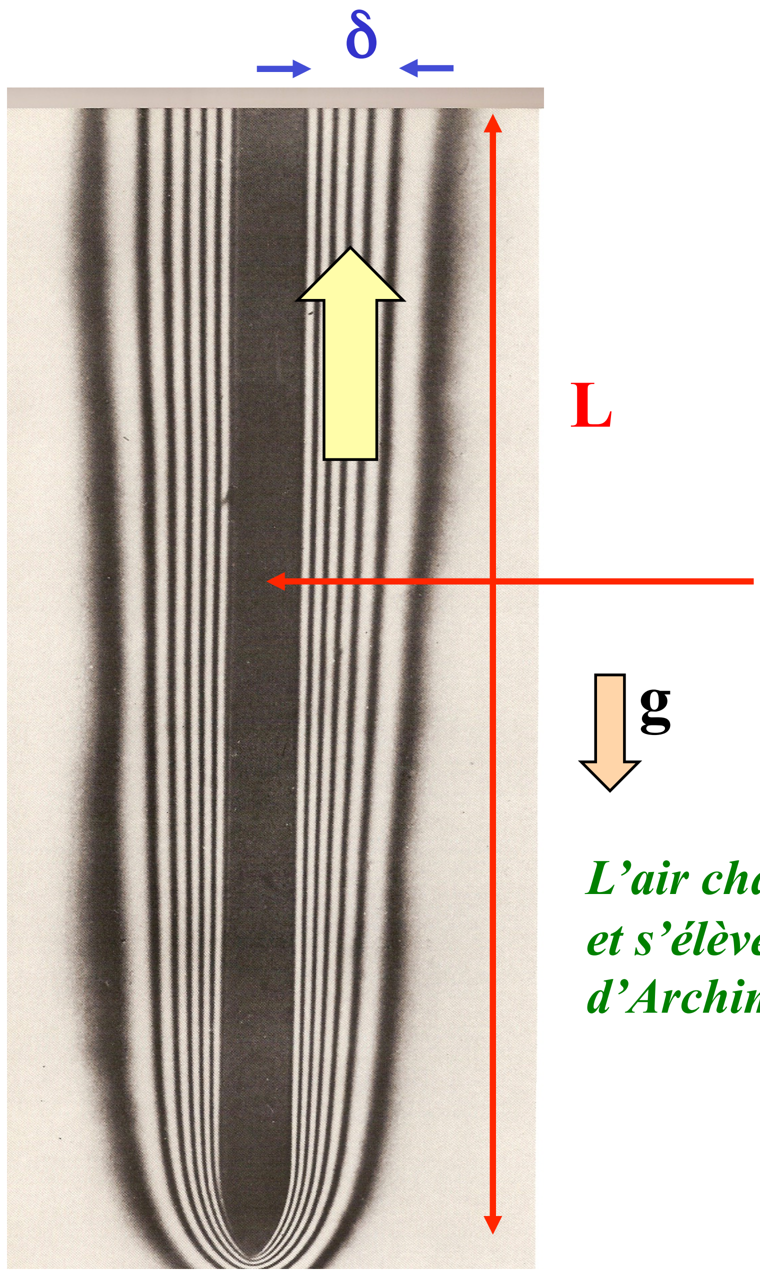
Ecoulements avec deux échelles spatiales (fin)



Convection naturelle le long d'une plaque verticale : écoulement laminaire permanent

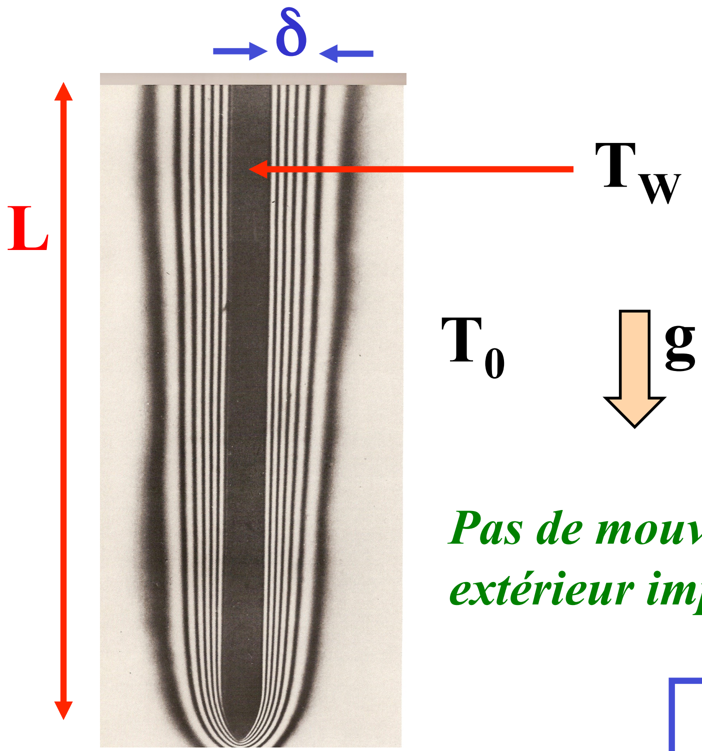
Lubrification et convoyage hydraulique : butée Michell

Convection naturelle le long d'une plaque suspendue dans l'air



L'air chaud près de la plaque devient plus léger et s'élève <u>naturellement</u> sous l'effet de la force d'Archimède (flottabilité)(buoyancy)

La photo a été dilatée d'un facteur six dans le long de l'axe horizontal ! (Gebhart, University of Pennsylvania)



Pas de mouvement extérieur imposé

Reprenons le problème de convection naturelle

$$\delta \ll Y$$
$$\delta_T \ll Y$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} &= \beta g (T - T_0) + \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

Lieu où l'ordre de la convection et de la conduction sont identiques

$$\frac{\boxed{\text{Convection}}}{\boxed{\text{Conduction}}} = \frac{V\Delta T/Y}{\alpha \Delta T/\delta_T^2} = \underbrace{\frac{VY}{\alpha}}_{Pe_Y} \frac{\delta_T^2}{Y^2} = 1$$

Couche limite thermique, on connaît :-)

$$\frac{\delta_T}{Y} = \sqrt{\frac{1}{Pe_Y}} = \sqrt{\frac{1}{Pr\,Re_Y}}$$

Problème : on <u>ne connaît pas</u> V :-(

$$\delta \ll Y$$
$$\delta_T \ll Y$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} &= \beta g (T - T_0) + \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

Longueur verticale caractéristique : Y
Longueur horizontale caractéristique : δ
Vitesse horizontale caractéristique : U = V δ / Y (incompressibilité :-)
Ecart de température caractéristique : $T_w - T_0$

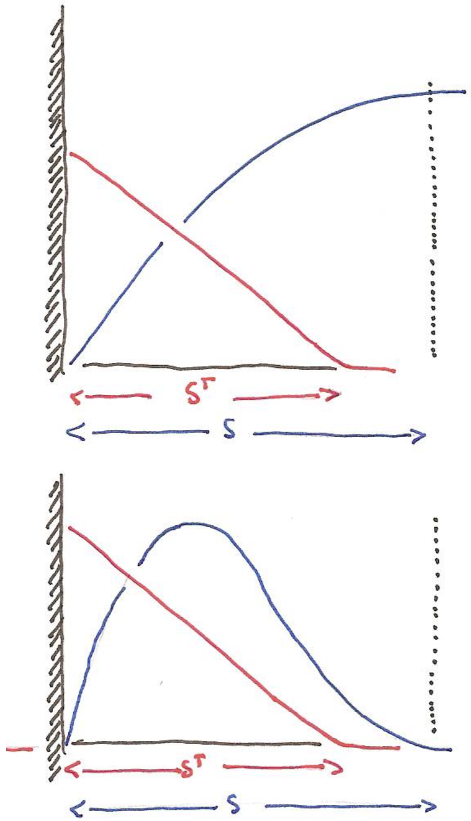
Comment choisir V la vitesse verticale caractéristiques ?

Buoyancy balanced by friction

$$\cancel{u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y}} \;=\; \boxed{\beta g(T - T_0)} + \boxed{\nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$V \;=\; \frac{\beta g \Delta T \delta_T^2}{\nu}$$



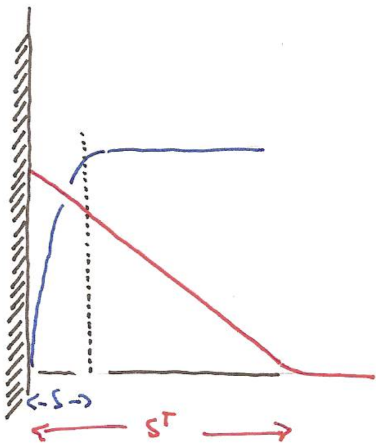
$$\frac{\delta_T}{Y} \;=\; \sqrt{\frac{\alpha}{VY}} \;=\; \sqrt{\frac{\nu\ \alpha}{\beta g \Delta T\ Y \delta_T^2}} \;=\; (Gr)^{-1/4}\,(Pr)^{-1/4}$$

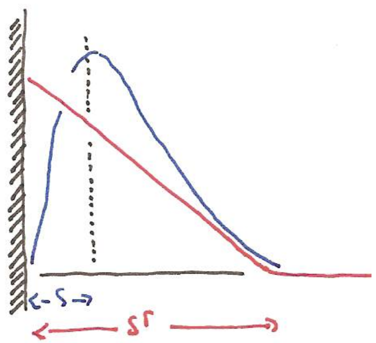
$$\frac{\delta}{Y} \;=\; (Gr)^{-1/4}\,(Pr)^{1/4}$$

Buoyancy balanced by inertia

$$\boxed{u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y}} = \boxed{\beta g (T - T_0)} + \nu\,\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}$$

$$V = \sqrt{\beta g \Delta T\, Y}$$





$$\frac{\delta_T}{Y} = \sqrt{\frac{\alpha}{VY}} = \left(\frac{\alpha^2}{\beta g \Delta T\, Y^3}\right)^{1/4} = (Gr)^{-1/4}\,(Pr)^{-1/2}$$

$$\frac{\delta}{Y} = (Gr)^{-1/4}$$

Nombre de Grashof

$$\boxed{Gr = \frac{\beta \Delta T g L^3}{\nu^2}}$$

1822-1893, University of Karlsruhe, Germany
Professor of Mechanical Engineering

$$\boxed{\frac{\textbf{(Forces d'inertie) (Forces d'Archimède)}}{\textbf{(Forces visqueuses)}^2}}$$

Grashof - Reynolds

Forces visqueuses

$$\boxed{\underbrace{\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\mathcal{O}(\rho U^2/L)}} = \boxed{\underbrace{\rho\beta(T-T_0)g}_{\mathcal{O}(\rho\beta\Delta T g)}} + \boxed{\underbrace{\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)}_{\mathcal{O}(\mu U/L^2)}}$$

Forces d'inertie

Forces d'Archimède

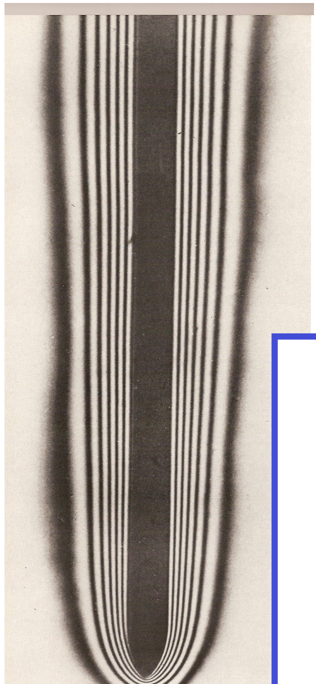
$$Re = \frac{\color{red}\blacksquare}{\color{green}\blacksquare} \qquad \frac{Gr}{Re} = \frac{\color{blue}\blacksquare}{\color{green}\blacksquare} \qquad \frac{Gr}{Re^2} = \frac{\color{blue}\blacksquare}{\color{red}\blacksquare}$$

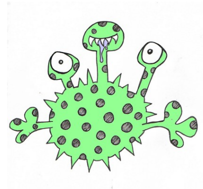
$$Gr = \frac{(\text{Forces d'Archimède})(\text{Forces d'inertie})}{(\text{Forces visqueuses})^2} = \frac{\beta\Delta T g L^3}{\nu^2}$$

Une solution approchée pour la convection naturelle…

$$v(x,y) = v_0(y)\,\frac{x}{\delta(y)}\left(1-\frac{x}{\delta(y)}\right)^2$$

$$\frac{T(x,y)-T_0}{T_w-T_0} = \left(1-\frac{x}{\delta(y)}\right)^2$$





On considère des profils semblables avec conditions de raccord très sommaires à la couche limite… mais cela va nous donner une idée des ordres de grandeurs

$$v(0,y) = 0 \qquad v(\delta,y) = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(\delta,y) = 0 \qquad \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,y) = -\rho\beta g(T_w-T_0)$$

$$T(0,y) = T_w \qquad T(\delta,y) = T_0 \qquad \frac{\partial T}{\partial x}(\delta,y) = 0$$

Il faut encore estimer $\delta_T(y)$!

$$\int_0^\delta u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}dx \;=\; \beta g\int_0^\delta (T(x,y)-T_0)\,dx + \nu\int_0^\delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx$$

$$[uv]_0^\delta - \int_0^\delta v\frac{\partial u}{\partial x}dx + \int_0^\delta v\frac{\partial v}{\partial y}dx \;=\; \beta g\int_0^\delta (T(x,y)-T_0)\,dx - \nu\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}$$

$$\boxed{\frac{d}{dy}\int_0^\delta v^2(x,y)dx \;=\; \beta g\int_0^\delta (T(x,y)-T_0)\,dx - \nu\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}}$$

$$\int_0^\delta u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}dx \;=\; \alpha\int_0^\delta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx$$

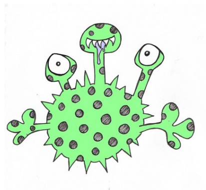
$$\boxed{\frac{d}{dy}\int_0^\delta v(x,y)T(x,y)dx \;=\; -\alpha\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}}$$

Intégrons les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie dans la couche limite en tirant profit de l'incompressibilité…

Que deviennent ces équations intégrales ?

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_0^{\delta} v^2 dx & = & \beta g \displaystyle\int_0^{\delta} (T - T_0)\, dx - \nu \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} \\
\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_0^{\delta} vT dx & = & -\alpha \left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}
\end{array}
\right.
$$

En intégrant les expressions approchées que nous avons introduites…



$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\dfrac{1}{105}\,\dfrac{d}{dy}\left(v_0^2(y)\delta(y) \right) & = & \dfrac{\beta g\ \Delta T \delta(y)}{3} + \dfrac{\nu\ v_0(y)}{\delta(y)} \\
\dfrac{1}{30}\,\dfrac{d}{dy}\left(v_0(y)\delta(y) \right) & = & \dfrac{2\alpha}{\delta(y)}
\end{array}
\right.
$$

On obtient finalement de deux équations différentielles ordinaires avec deux fonctions inconnues…

Résolution des équations intégrales

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{105}\,\dfrac{d}{dy}\Big(v_0^2(y)\delta(y)\Big) & = & \dfrac{\beta g\ \Delta T\delta(y)}{3} + \dfrac{\nu\ v_0(y)}{\delta(y)} \\ \dfrac{1}{30}\,\dfrac{d}{dy}\Big(v_0(y)\delta(y)\Big) & = & \dfrac{2\alpha}{\delta(y)} \end{array}\right.$$

Essayons une solution de la forme…

$$\begin{array}{rcl} v_0(y) & = & V\ y^m \\ \delta(y) & = & D\ y^n \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{105}\,V^2D(2m+n)\ y^{2m+n-1} & = & \dfrac{\beta g\ \Delta T\ D}{3}\ y^n + \dfrac{\nu\ V}{D}\ y^{m-n} \\ \dfrac{1}{30}\,VD(m+n)\ y^{m+n-1} & = & \dfrac{2\alpha}{D}\ y^{-n} \end{array}\right.$$

Et cela marche avec 2m = 1 et 4n = 1…

$$\left\{\begin{aligned} \frac{V^2 D}{84} &= \frac{\beta g\ \Delta T\ D}{3} + \frac{\nu\ V}{D} \\ \frac{V D}{40} &= \frac{2\alpha}{D} \end{aligned}\right.$$

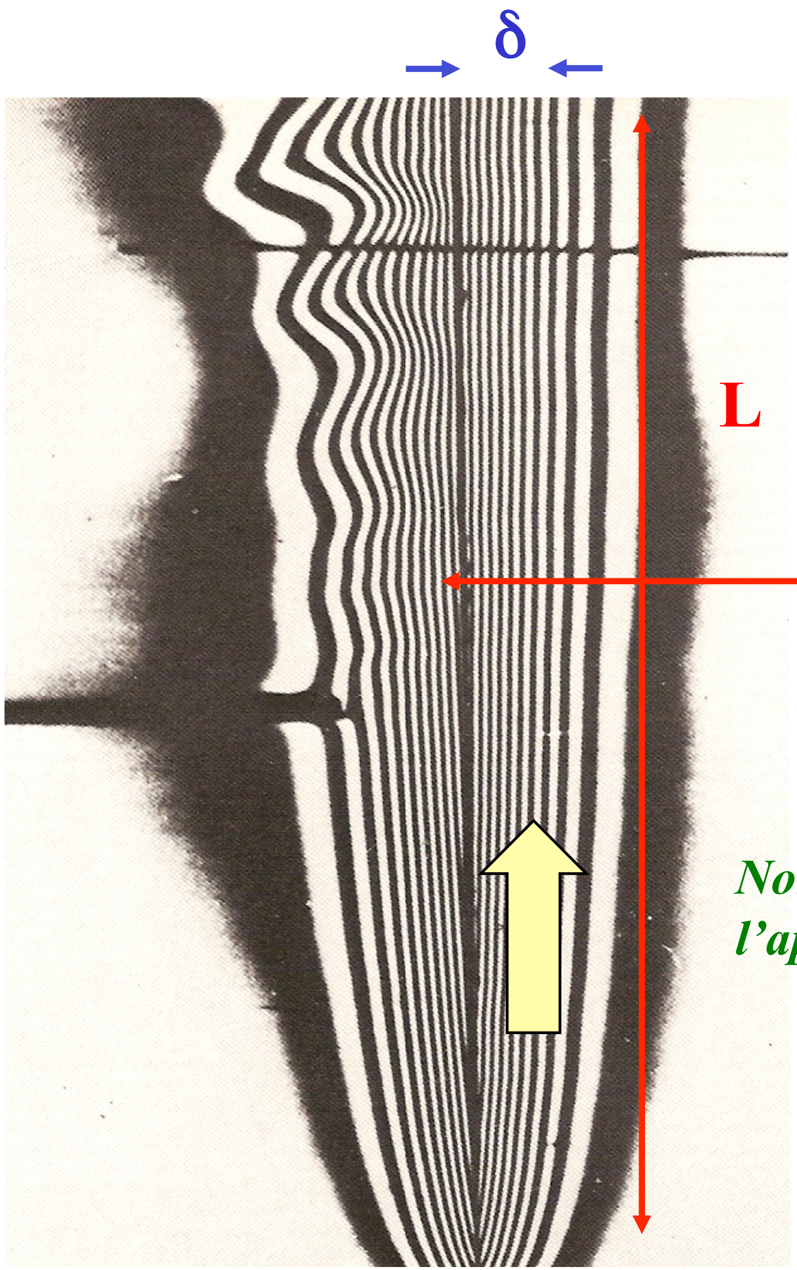
$$D^4 = 240 L^3 \left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha}\right) \frac{\nu^2}{\beta g \Delta T L^3}\ \frac{\alpha^2}{\nu^2}$$

Solution finale…

$$\frac{\delta_T(y)}{y} = 3,936\ \Big(\ Pr\ \Big)^{-1/2} \Big(\ Gr(y)\ \Big)^{-1/4} \left(\frac{20}{21} + Pr\right)^{1/4}$$

On peut ensuite calculer le profil de vitesse et de température, le transfert de chaleur et des nombres de Nusselt locaux et moyens.

Est-ce que cette solution est stable ?



Plaque chaude

Non, après une certaine distance, on constate l'apparition d'instabilités : c'est la <u>turbulence</u> !

Cela, c'est très très très très compliqué.

Equations d’état pour des écoulements compressibles…

Lois de conservation | Lois de comportement

Conditions aux limites

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= -p\boldsymbol{\delta} + 3\hat{\kappa}(p,T)\mathbf{d}^s + 2\hat{\mu}(p,T)\mathbf{d}^d, \\
\mathbf{q} &= -\hat{k}(p,T)\boldsymbol{\nabla}T, \\
\rho &= \hat{\rho}(p,T), \\
H &= \hat{H}(p,T), \\
S &= \hat{S}(p,T).
\end{aligned}
$$

Equations d’état ?

Modèle du fluide visqueux Newtonien

Modèle de gaz idéal

$$\boxed{\widehat{\rho}(p,T) \;=\; \frac{p}{R_* T}}$$

Un exemple d'équation d'état pour la masse volumique

Constante du gaz

Ecoulements compressibles

Propagation des sons au sein de l'air : c'est un effet de la compressibilité de l'écoulement.
Caractérisation par le <u>nombre de Mach</u>

Presque comme en thermo…

Concentration molaire [mole/m³]

$$\boxed{\rho} = \boxed{c}\boxed{M}$$

Masse volumique [kg/m³]

Masse molaire [kg/mole]

$$pV = nRT$$

$$c = \frac{n}{V}$$

$$c = \frac{p}{RT}$$

Constante <u>des</u> gaz

$$\rho = \frac{p}{R_* T}$$

Constante <u>du</u> gaz

$$R = 8.314 \; [J/moleK]$$

$$R_{*,air} = \frac{R}{M_{air}} = 287 \; [m^2/s^2K]$$

Nombre de Mach

$$Ma = \frac{U}{\sqrt{\frac{c_p}{c_v} R_* T}}$$

Born: 18 Feb 1838, Turas, Moravia

Died: 19 Feb 1916, Munchen, Germany

caractérise un écoulement d'un fluide !

$$\frac{\textbf{Vitesse caractéristique du fluide}}{\textbf{Vitesse caractéristique de propagation du son}}$$

Calcul de la vitesse du son : l'erreur de Newton !

$$
\begin{aligned}
\rho(x,t) &= \rho_0 + \rho'(x,t) \\
v(x,t) &= \cancel{v_0} + v'(x,t) \\
p(x,t) &= p_0 + \underbrace{p'(x,t)}_{\mathcal{O}(\epsilon)}
\end{aligned}
$$

Petites pertubations de vitesse, pression et de densité.
Les effets visqueux sont négligeables.
L'air est un gaz idéal.

Que devient la conservation de la masse ?

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v\right) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial x} + \underbrace{\cancel{\rho' \frac{\partial v'}{\partial x}} + \cancel{v' \frac{\partial \rho'}{\partial x}}}_{\mathcal{O}(\epsilon^2)} = 0$$

Equation linéarisée en termes de petites perturbations

Par paresse de notations, nous noterons désormais les perturbations sans apostrophe :-)

Modèle 1 :
Ecoulement isotherme :-(

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial x} & = & 0 \\[2ex] \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} & = & -\dfrac{\partial p}{\partial x} \end{array}\right.}$$

$$\boxed{p = \rho R_* T} \quad \boxed{T = cst}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = R_* T \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

Modèle 1 :
Ecoulement isotherme :-(

$$\boxed{p = \rho R_* T}$$

$$\boxed{T = cst}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = R_* T \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

$$\Downarrow$$

La vitesse du son ainsi prédite ne correspond pas aux valeurs mesurées expérimentalement ...

$$c = \sqrt{R_* T}$$

Modèle 2 :
Ecoulement adiabatique :-)

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Petites pertubations de vitesse, pression et de densité.
Les effets visqueux sont négligeables : pas de dissipation.
L'air est un gaz idéal.

Il s'agit donc d'un écoulement adiabatique réversible ou encore d'un <u>écoulement isentropique</u>

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial x} & = & 0 \\[2ex] \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} & = & -\dfrac{\partial p}{\partial x} \\[2ex] \rho_0 c_p \dfrac{dT}{dt} & = & \dfrac{\partial p}{\partial t} \end{array}\right.$$

$$\boxed{p = \rho R_* T} \qquad \boxed{\frac{\partial T}{\partial x} = 0}$$

L'air est un
mauvais conducteur !
C'est même un bon isolant !

Il faut conserver une densité variable pour avoir une pression non constante dans l'espace !

Un peu d'algèbre fastidieuse

$$\boxed{p = \rho R_* T} \qquad \boxed{\frac{\partial T}{\partial x} = 0}$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{p}{R_* T} c_p \frac{dT}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\ln\big(T^{c_p}\big)\Big) = \frac{c_p}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{c_p - c_v}{p}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{d}{dt}\Big(\ln\big(p^{c_p - c_v}\big)\Big)$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\ln\Big(\frac{p^{c_p - c_v}}{T^{c_p}}\Big)\Big) = 0$$

$$\frac{p^{c_p - c_v}}{T^{c_p}} = C$$

$$\frac{R_*^{c_p}\rho^{c_p}}{p^{c_v}} = C$$

$$\boxed{\frac{\rho^{\gamma}}{p} = C^*}$$

Modèle 2 :
Ecoulement adiabatique :-)

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial x} & = & 0 \\ \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} & = & -\dfrac{\partial p}{\partial x} \end{array}\right.$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$$p = A\rho^\gamma$$

$$p = \rho R_* T \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = A\gamma\rho^{\gamma-1}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \gamma R_* T \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \gamma R_* T \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \gamma R_* \cancel{\frac{\partial T}{\partial x}} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Modèle 2 :
Ecoulement adiabatique :-)

$$p = \rho R_* T$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \gamma R_* T \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

La vitesse du son ainsi prédite correspond bien aux valeurs mesurées expérimentalement ...

$$c = \sqrt{\gamma R_* T} = 342[m/s]$$